Matematik och optioner (CTH&GU), lp3-lp4, 97/98

INLÄMNINGSUPPGIFT 3

1. En aktie har priset $S(t)$ vid tiden t. Antag $t_0 < T$ och betrakta ett derivat av europeisk typ med slutdagen T som utbetalar beloppet $S(t_0)$ vid tiden T. Visa med hjälp av dominansprincipen att derivatets värde vid tiden $t < t_0$ är lika med $S(t)e^{-r(T-t_0)}$, där r betecknar räntan. Vilket värde har derivatet vid tiden $t \in [t_0, T]$?

2. Antag $f(x) = \sin(x+1)$, $x \in \mathbf{R}$. a) Beräkna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

b) Låt $G_{jk} \in N(0,1)$, $j = 1, ..., m$, $k = 1, ...n$, vara stokastiskt oberoende och betrakta följande Monte-Carloskattningar av I, nämligen

$$MC_{1n}(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(G_{jk}),\ j = 1, ..., m$$

och

$$MC_{2n}(j) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (f(G_{jk}) + f(-G_{jk})),\ j = 1, ..., m.$$

Låt den kontinuerliga funktionen $g_{mn}(x)$, $1 \le x \le 2m$, vara affin i varje delintervall $[j, j+1]$, $j = 1, ..., 2m-1$ och sådan att $g(j) = MC_{1n}(j)$, $j = 1, ..., m$ och $g(j+m) = MC_{2n}(j)$, $j = 1, ..., m$. Rita grafen av funktionen $y = g_{mn}(x), 1 \le x \le 2m$, då b1) $m = 50$ och $n = 10^2$ b2) $m = 100$ och $n = 10^5$.

3. Låt $X, Y \in N(0,1)$ vara stokastiskt oberoende. Visa att

$$E\left[e^{\xi \max(X, X+Y)}\right] = e^{\xi^2}\Phi(\xi) + \frac{1}{2}e^{\frac{\xi^2}{2}},\ \xi \in \mathbf{R}.$$