Matematik och optioner (TM), lp3-lp4, 97/98

INLÄMNINGSUPPGIFT 4

1. Sätt $\mathcal{F}_t = \sigma(W(\lambda);\ \lambda \leq t)$ för $t \geq 0$. Beräkna $E\left[W^2(t) \mid \mathcal{F}_s\right]$ och $E\left[W^3(t) \mid \mathcal{F}_s\right]$ för $0 \leq s \leq t$.

2. Låt $(X_j)_{j=1}^n$ vara en i.i.d. Antag $Z_n(t)$ är kontinuerlig för $0 \leq t \leq 1$ och affin i varje intervall $\frac{k-1}{n} \leq t \leq \frac{k}{n}$, $k = 1, ..., n$, samt $Z_n(0) = 0$. Rita två realisationer av processen $(Z_n(t))_{0\leq t \leq 1}$, då

   a)
   $$Z_n(\frac{k}{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{k} X_j,\ \ k = 1, ..., n$$
   och $E\left[e^{i\xi X_k}\right] = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$.

   b)
   $$Z_n(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} X_j,\ \ k = 1, ..., n$$
   och $E\left[e^{i\xi X_k}\right] = e^{-|\xi|}$.

   I båda fallen väljs $n = 1000$. (Ledning för b): om en stokastisk variabel U har en likformig fördelning i intervallet $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ så gäller att $E\left[e^{i\xi \tan U}\right] = e^{-|\xi|}$).

3. Betrakta en kapitalmarknad bestående av en aktie och en obligation. Aktiens pris $S(t)$, $t \geq 0$, beskriver en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift och aktieprisets volatilitet är lika med σ. Obligationens pris $B(t)$ vid tiden t är lika med $e^{-r(t-T)}$ för $t \leq T$. Antag slutligen att K och L är positiva parametrar.

   $a)$ **("cash or nothing call")** Ett europeiskt derivat i aktien utbetalar ingenting slutdagen T om aktiepriset denna dag understiger K och i annat fall utbetalar derivatet denna dag beloppet L. Bestäm derivatets värde vid tiden t.

b) **(”asset or nothing call”)** Ett europeiskt derivat i aktien utbetalar ingenting slutdagen T om aktiepriset denna dag understiger K och i annat fall utbetalar derivatet denna dag beloppet $S(T)$. Bestäm derivatets värde vid tiden t.

c) Antag tiden mäts i år och att $r = \ln 1.05$ och $\sigma = 0.27$. En europeisk aktieköpoption har slutdagen 20 mars och lösenpriset 100 kr. Under perioden 20 januari-20 februari stiger aktiepriset från 97 kr till 112 kr. Med hur många procent stiger det teoretiska optionspriset under samma period?