Matematik och optioner (TM), lp3-lp4, 97/98

INLÄMNINGSUPPGIFT 5

1. Antag $a \in \mathbf{R}$ och
$$X(t) = \int_0^t e^{-\frac{a}{2}(t-\lambda)} dW(\lambda), \ t \geq 0.$$
Bestäm processens kovarians.

I nedanstående uppgifter betraktas en kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $S(t)$ vid tiden $t \geq 0$, och en obligation med priset $B(t) = e^{-r(T-t)}$ vid tiden $t \leq T$ där $r > 0$.

2. Låt $t_0 < T$ och $n \in \mathbf{N}_+$. Sätt $h = \frac{1}{n}(T - t_0)$ och $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, ..., n$. Antag vidare att $K > 0$ och betrakta två europeiska derivat av medelvärdestyp med utbetalningarna
$$X_c = \max(0, \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S(t_i) - K)$$
och
$$X_p = \max(0, K - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S(t_i))$$
vid tidpunkten T. Antag dessa derivat har de teoretiska värdena $v_c(t)$ resp $v_p(t)$ vid tiden t. Visa med hjälp av dominansprincipen att
$$\frac{B(t)}{n+1}\sum_{i=0}^{m-1} S(t_i) + \frac{1 - e^{-r(n-m+1)h}}{1 - e^{-rh}} \frac{S(t)}{n+1} - v_c(t) =$$
$$KB(t) - v_p(t)$$
för alla $t \in [t_{m-1}, t_m[$ och $m \in \{1, ..., n\}$. Försök finna ett liknande samband för $t < t_0$. Beskriv tydligt de strategier härledningarna bygger på.

3. Antag aktiepriset beskriver en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift och antag aktiepriset har volatiliten $\sigma > 0$. En amerikansk säljoption i aktien med slutdagen T och lösenpriset K har det teoretiska priset $P(t, S(t), K; T)$ vid tiden t. Rita grafen för funktionen $y = P(s) = P(t, s, K; T)$, $35 \le s \le 54$, då $\sigma = 0.25$, $r = \ln 1.05$, $t = 0$, $T = 1/6$, och $K = 45$. Rita i samma koordinatsystem grafen för funktionen $y = \max(0, K - s)$, $35 \le s \le 54$.