LÖSNINGAR : **MATEMATIK OCH OPTIONER 25 april 1998**

Uppgift 1. Betrakta binomialmodellen i ett tidssteg för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u \geq r \geq d$ och $u > 0 > d$. Aktiens pris vid tiden $t \in \{0, 1\}$ betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet

$$\max(0, \frac{S(0) + S(1)}{2} - S(0))$$

vid tiden $t = 1$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t = 0$.

Lösning: Sätt

$$Y = \max(0, \frac{S(0) + S(1)}{2} - S(0)),$$

$S(0) = s$ och

$$S(1) = se^X.$$

Derivatets värde vid tiden $t = 0$ ges av

$$v(0) = e^{-r} E^Q [Y]$$

där Q är martingalmåttet. Observera att

$$X = u \Rightarrow Y = \frac{s}{2}(e^u - 1)$$

och att

$$X = d \Rightarrow Y = 0.$$

Alltså är

$$v(0) = e^{-r} \frac{s}{2}(e^u - 1) Q [X = u] =$$

$$\frac{se^{-r}}{2}(e^u - 1)\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = \frac{s}{2}(e^u - 1)\frac{1 - e^{d-r}}{e^u - e^d}.$$

Svar: $\frac{S(0)}{2}(e^u - 1)\frac{1-e^{d-r}}{e^u-e^d}$

Uppgift 2: Antag $\theta \in \mathbf{R}$ och betrakta ett aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $B(T)^{1-\theta}S(T)^{\theta}$ slutdagen T. Derivatets värde vid tiden $t < T$ är en funktion av $B(t)$, $S(t)$, $T-t$, σ och θ. Bestäm denna funktion.

Lösning: Sätt $f(s) = B(T)^{1-\theta}s^{\theta}$, $s > 0$ och $\tau = T - t$. Derivatets värde vid tiden t är lika med $v(t, S(t))$ där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[f(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right].$$

Härav följer att

$$v(t,s) = B(T)^{1-\theta}e^{-r\tau}E\left[s^{\theta}e^{\theta(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \theta\sigma W(\tau)}\right] =$$

$$B(T)^{1-\theta}e^{-r\tau}s^{\theta}e^{\theta(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}E\left[e^{\theta\sigma W(\tau)}\right] = B(T)^{1-\theta}e^{-r\tau}s^{\theta}e^{\theta(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}e^{\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\tau} =$$

$$B(T)^{1-\theta}e^{-(1-\theta)r\tau}s^{\theta}e^{\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2\tau}.$$

Vi får därför att

$$v(t,S(t)) = B(T)^{1-\theta}e^{-(1-\theta)r\tau}S(t)^{\theta}e^{\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2\tau} = e^{\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2\tau}B(t)^{1-\theta}S(t)^{\theta}$$

Svar: $e^{\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\sigma^2\tau}B(t)^{1-\theta}S(t)^{\theta}$ där $\tau = T - t$

Uppgift 3. Betrakta ekvationen

$$\begin{cases} dX(t) = -X(t)dt + dW(t) \\ X(0) = 0, \ t \geq 0. \end{cases}$$

a) Bestäm kovariansen för processen $(X(t))_{t\geq 0}$. b) Beräkna $E\left[\int_0^1 X(t)dX(t)\right]$.

Lösning: a) Vi skriver ekvationen på formen

$$dX(t) + X(t)dt = dW(t)$$

och får efter förlängning med den integrerande faktorn e^t den ekvivalenta ekvationen

$$d(e^t X(t)) = e^t dW(t).$$

Integration ger nu att

$$e^t X(t) = \int_0^t e^\lambda dW(\lambda)$$

dvs

$$X(t) = \int_0^t e^{\lambda - t} dW(\lambda).$$

Speciellt gäller att $E\left[X(t)\right] = 0$.

Antag nu att $0 \le s \le t$. Då är

$$X(s) = \int_0^t 1_{[0,s]}(\lambda) e^{\lambda - s} dW(\lambda)$$

och det följer att

$$E\left[X(s)X(t)\right] = \int_0^t 1_{[0,s]}(\lambda) e^{\lambda - s}\ e^{\lambda - t} d\lambda =$$

$$e^{-s-t} \int_0^s e^{2\lambda}\ d\lambda = \frac{1}{2}(e^{s-t} - e^{-s-t}) = \frac{1}{2}(e^{-|s-t|} - e^{-s-t}).$$

För godtyckliga $s, t \ge 0$ gäller därför att

$$\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = \frac{1}{2}(e^{-|s-t|} - e^{-s-t}).$$

b) Eftersom

$$E\left[\int_0^1 X^2(t) dt\right] = \int_0^1 E\left[X^2(t)\right] dt =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) dt = \frac{1}{4}(1 + e^{-2}) < \infty$$

följer att processen $(X(t))_{0 \le t \le 1} \in M_W^2\left[0,1\right]$ och vi får att

$$E\left[\int_0^1 X(t) dW(t)\right] = 0.$$

Ekvationen

$$X(t) dX(t) = -X^2(t) dt + X(t) dW(t)$$

ger nu att

$$E\left[\int_0^1 X(t)dX(t)\right] = -E\left[\int_0^1 X^2(t)dt\right] = -\frac{1}{4}(1+e^{-2}).$$

Svar: $\mathrm{Cov}(X(s),X(t)) = \frac{1}{2}(e^{-|s-t|} - e^{-s-t})$; $E\left[\int_0^1 X(t)dX(t)\right] = -\frac{1}{4}(1+e^{-2})$

Uppgift 4: Låt $t_0 < T$ och betrakta ett aktiederivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $\max(S(t_0), S(T))$ slutdagen T. Bestäm derivatets värde vid en godtycklig tidpunkt $t \le t_0$.

Lösning: Vi har att

$$\max(S(t_0), S(T)) = S(t_0) + \max(0, (S(T) - S(t_0)).$$

Låt $v(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Om $t \in [t_0, T]$ så ger dominansprincipen att

$$v(t) = S(t_0)e^{-r(T-t)} + c(t, S(t), S(t_0); T).$$

Vi påminner om att det för $t < T$ gäller att

$$c(t,s,K;T) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln\frac{s}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

och $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$. Alltså är

$$v(t_0) = S(t_0)(e^{-r(T-t_0)} + c(t_0, 1, 1; T))$$

och dominansprincipen ger för $t \le t_0$ att

$$v(t) = S(t)(e^{-r(T-t_0)} + c(t_0, 1, 1; T)).$$

Här är

$$c(t_0,1,1;T)) = \Phi((\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T-t_0}) - e^{-r(T-t_0)}\Phi((\frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T-t_0}))$$

och det följer att

$$v(t) = S(t)(\Phi((\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T - t_0}) + e^{-r(T-t_0)}(1 - \Phi((\frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T - t_0}))) =$$

$$S(t)(\Phi((\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T - t_0}) + e^{-r(T-t_0)}\Phi((-\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T - t_0})) =$$

Svar: $v(t) = S(t)(\Phi((\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T - t_0}) + e^{-r(T-t_0)}\Phi((-\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma)\sqrt{T - t_0}))$, $t \leq t_0$