LÖSNINGAR : **MATEMATIK OCH OPTIONER 2 juni 1998**

Uppgift 1. Antag att $K, T > 0$ och $S(0) < Ke^{-\mu T}$. Bestäm det största talet $\sigma_0 > 0$ sådant att sannolikheten $P[S(T) > K]$ är en växande funktion av σ i intervallet $[0, \sigma_0]$.

Lösning. Sätt $f(\sigma) = P[S(T) > K]$ och $s = S(0)$. Relationen

$$S(T) = se^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)}$$

ger

$$f(\sigma) = P\left[se^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W(T)} > K\right] =$$

$$P\left[-W(T) < \frac{1}{\sigma} \ln \frac{se^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}}{K}\right] = \Phi(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln \frac{s}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T).$$

Eftersom $\Phi' > 0$ så är $f'(\sigma) \geq 0$ om och endast om

$$\frac{d}{d\sigma}\left\{\frac{1}{\sigma}(\ln \frac{s}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T)\right\} \geq 0$$

vilket betyder att

$$-\frac{1}{\sigma^2}(\ln \frac{s}{K} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T) - T \geq 0$$

eller

$$\sigma \leq \sqrt{\frac{2}{T} \ln \frac{K}{s} - 2\mu}.$$

Svar: $\sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{T} \ln \frac{K}{S(0)} - 2\mu}$

Uppgift 2. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u \geq r > 0 \geq d$ och $t \in \{0, 1, ..., n\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen n utbetalar denna dag beloppet Y, där $Y = S(n)$ om $S(0) < S(1) < ... < S(n)$ och $Y = S(0)$ i annat fall. Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

Lösning. Eftersom $S(0)$ är en känd konstant är derivatets värde $v(0)$ vid tiden 0 är lika med $e^{-rn}E^Q[Y]$, där Q är martingalmåttet. Här gäller att

$$Q[S(0) < S(1) < ... < S(n)] = Q[\text{aktien går upp i varje tidssteg}] =$$

$$\left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n.$$

Alltså är

$$v(0) = e^{-rn}\left\{\left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n S(0)e^{nu} + (1 - \left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n)S(0)\right\}$$

eller

$$v(0) = e^{-rn}\left\{1 + \left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n (e^{nu} - 1)\right\} S(0).$$

Svar: $e^{-rn}\left\{1 + \left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n (e^{nu} - 1)\right\} S(0)$

Uppgift 3: Antag $n \in \mathbf{N}_+$. a) Visa att

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W(\frac{k}{n}) = \int_0^1 h_n(t)dW(t)$$

där

$$h_n(t) = 1 - \frac{k}{n},\ \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n},\ k = 0, ..., n-1.$$

b) Beräkna variansen av den stokastiska variabeln

$$X = \int_0^1 W(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W(\frac{k}{n}).$$

Lösning: a) Det gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} W(\frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{n}((k-n)-(k-1-n))W(\frac{k}{n}) =$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}(k-n)(W(\frac{k+1}{n}) - W(\frac{k}{n}))$$

och vi får att

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W(\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}(1-\frac{k}{n})(W(\frac{k+1}{n}) - W(\frac{k}{n}))$$

dvs

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W(\frac{k}{n}) = \int_0^1 h_n(t)dW(t).$$

b) Det gäller att

$$\int_0^1 W(t)dt = [(t-1)W(t)]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (t-1)dW(t)$$

och därmed

$$\int_0^1 W(t)dt = \int_0^1 (1-t)dW(t).$$

Alltså är

$$X = \int_0^1 (1-t-h_n(t))dW(t).$$

Eftersom

$$\int_0^1 (1-t-h_n(t))^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (1-t-h_n(t))^2 dt =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (\frac{k}{n}-t)^2 dt = \frac{1}{3n^2} < \infty$$

följer nu att $E[X] = 0$ och $E[X^2] = \frac{1}{3n^2}$. Den stokastiska variabeln X har alltså variansen $\frac{1}{3n^2}$.

Svar: b) $\frac{1}{3n^2}$

Uppgift 4: Ett derivat av europeisk typ utbetalar beloppet $\max(S(T), K)$ slutdagen $T > 0$, där $K > 0$ är ett givet tal. Låt $u(t, S(t))$ beteckna derivatets värde vid tiden $t < T$. a) Visa att $u'_s(t, s) = \Phi(d_1)$. b) Visa att funktionen

$$\frac{su'_s(t,s)}{u(t,s)},\ \ s > 0$$

är strängt växande för fixt t. Ge en ekonomisk tolkning av denna egenskap.

Lösning: a) Det gäller att $\max(S(T), K) = K + \max(0, S(T) - K)$ och dominansprincipen medför att $u(t, S(T)) = Ke^{-r\tau} + c(t, S(t), K; T)$. Vidare vet vi att

$$c(t, s, K; T) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2).$$

Med beteckningen $\varphi = \Phi'$ får vi därför att

$$\frac{\partial}{\partial s}c(t, s, K; T) = \Phi(d_1) + s\frac{1}{s\sigma\sqrt{\tau}}\varphi(d_1) - Ke^{-r\tau}\frac{1}{s\sigma\sqrt{\tau}}\varphi(d_2).$$

Vidare följer att

$$s\varphi(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}se^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}(\ln\frac{s}{Ke^{-r\tau}}+\frac{1}{2}\sigma^2\tau)^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}s\frac{Ke^{-r\tau}}{s}e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}(\ln\frac{s}{Ke^{-r\tau}}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau)^2} = Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)$$

varför

$$\frac{\partial}{\partial s}c(t, s, K; T) = \Phi(d_1)$$

och

$$u'_s(t, s) = \Phi(d_1).$$

b) Sätt

$$\phi(s) = \frac{su'_s(t,s)}{u(t,s)}.$$

Det följer att

$$\phi(s) = \frac{s\Phi(d_1)}{Ke^{-r\tau} + s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)} =$$

$$\frac{s\Phi(d_1)}{s\Phi(d_1) + Ke^{-r\tau}\Phi(-d_2)} = \frac{1}{1 + Ke^{-r\tau}f(s)}$$

där

$$f(s) = \Phi(-d_2)\frac{1}{s}\frac{1}{\Phi(d_1)}$$

är en produkt av tre positiva strängt avtagande funktioner. Funktionen $f(s)$ är därför strängt avtagande och funktionen $\phi(s)$ är därmed strängt växande.

Betrakta en självfinansierande strategi i aktien och obligationen, som innehåller $u'_s(t, S(t))$ aktier vid tiden t och som har värdet $\max(K, S(T))$ slutdagen T. Portföljens aktievärde vid tiden $t < T$ ges av $u'_s(t, S(t))S(t)$ och portföljen består därför vid denna tidpunkt till

$$\frac{S(t)u'_s(t, S(t))}{u(t, S(t))} \times 100$$

procent av aktier. Vi kan därför säga att denna procentandel växer strängt med aktiepriset om alla andra oberoende variabler hålls konstanta.