MATEMATIK OCH OPTIONER (CTH[$TMA861$]&GU[$MAN690$])

lp3-lp4, 1998/99

Läromedel

Borell, C., Matematik och optioner, Matematiska instutionen CTH&GU, Version: jan 99 (kompendium).

Tentamen

Lördagen den 8 maj, kl 8^{45}-13^{45}, mg (dvs maskin gamla) och lördagen den 22 maj, kl 8^{45}-13^{45}, mg

Examinations-PM

Det skriftliga slutprovet omfattar 25 poäng. Kursen har sex ej obligatoriska inlämningsuppgifter. Av dessa räknas endast de fem bästa resultaten och man kan maximalt erhålla $5 \times 9 = 45$ poäng från denna del. Erhålls X poäng på slutprovet och sammanlagt Y poäng från de fem bästa inlämningsuppgifterna beräknas nyckeltalet

$$S = [X + 0.1 \times Y]$$

där $[a]$ betyder heltalsdelen av a. Inom grundutbildningen på CTH krävs ett nyckeltal S minst lika med 10 för godkänt ($15 \leq S < 20$ ger en 4:a och $S \geq 20$ ger en 5:a). Inom grundutbildningen på GU krävs ett nyckeltal S minst lika med 12 för godkänt ($S \geq 18$ ger betyget VG). Hur uppnått kursresultat bedöms inom forskarutbildningen bestämmer den forskarstuderandes handledare.

Det skriftliga slutprovet omfattar alltså 25 poäng; problemdelen omfattar 13 poäng och teoridelen 12 poäng. Minst 6 av de 12 poängen från teoridelen kommer från följande lista:

1. Sats 2, kap 2
2. Sats 7, kap 2

3. Exempel 1, kap 2

4. Exempel 1, kap 3

5. Sats 2, kap 4

6. Sats 4, kap 4

7. Antag funktionen $f \in L^1(m_1)$ är jämn och icke-negativ. Visa att funktionen $C(s,t) = \hat{f}(s-t)$, $s,t \in \mathbf{R}$, är en kovarians (kap 4, sid 71-72).

8. Sätt
$$L_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mid W(\frac{k+1}{2^n}T) - W(\frac{k}{2^n}T) \mid .$$
Visa att
$$\lim_{n\to\infty} L_n^{(1)} = \infty \text{ n.s.}$$
(kap 5, sid 78).

9. Om $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$ definieras
$$L_\Delta^{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1} (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2.$$
Visa att
$$L_\Delta^{(2)} \to T \text{ i } L^2(P)$$
då indelningens finhet
$$\delta = \max_{0\le k\le n-1} (t_{k+1} - t_k)$$
går mot noll (kap 5, sid 78-79).

10. Sats 2, kap 6

11. Korollarium 1, kap 7

12. Definiera Paley-Wiener-Zygmunds stokastiska integral (kap 9).

13. Sats 2, kap 10

14. Lemma 1, kap 10

15. Sats 6, kap 11.

16. Antag att $a \in L_W^1[0,T]$, $b \in L_W^2[0,T]$ och låt

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t).$$

Visa med hjälp av produktregeln att

$$dX^n(t) = nX^{n-1}(t)dX(t) + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2}(t)b^2(t)dt,\ n = 2,3,...$$

(kap 11, sid 162).

17. Korollarium 1, kap 11

18. Sats 1, kap 12

19. Ett enkelt aktiederivat av europeisk typ med slutdagen T har värdet $v(t,S(t))$ vid tiden t. Härled Black-Scholes differentialekvation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + rs\frac{\partial v}{\partial s} - rv = 0,\ t < T,\ s > 0,$$

med hjälp av stokastisk kalkyl. Härled också en analog differentialekvation då aktien ger kontinuerlig utdelning av den typ som behandlas i kurskompendiet (sid 178-179).

20. Sats 2, kap 12.

Göteborg 3 februari 1999
Christer Borell