Matematik och optioner 98/99
INLÄMNINGSUPPGIFT 3

1. Låt $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en i.i.d. där varje $X_n \in N(0,1)$. Sätt $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ och
$$M_n = e^{X_1+...+X_n-\frac{n}{2}}, \; n = 1, 2, ... \quad .$$
Visa att $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ är en martingal.

2. Betrakta binomialmodellen och antag $u \geq r \geq d$ och $T = 2$. En europeisk medelvärdesoption utbetalar beloppet
$$\max\left(0, \frac{1}{3}(S(0) + S(1) + S(2)) - K\right)$$
vid tiden T där K är ett givet positivt tal som uppfyller
$$\frac{S(0)}{3}(1 + e^d + e^{2d}) < K < \frac{S(0)}{3}(1 + e^d + e^{u+d}).$$
Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

3. Antag $f(x) = \cos(x + \frac{1}{2})$, $x \in \mathbf{R}$. a) Beräkna
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$
b) Låt $G_1, ..., G_n \in N(0,1)$ vara stokastiskt oberoende. Beräkna approximationer av I med Monte-Carloskattningarna
$$MC_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(G_k)$$
och
$$MC_2 = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (f(G_k) + f(-G_k))$$
då b1) $n = 10^3$. Gör tre försök. b2) $n = 10^6$. Gör tre försök.