1. Några inledande ord om finansiella derivat

Ett värdepapper som definieras i termer av andra värdepapper kallas ett finansiellt derivat. Inledningsvis betraktar vi endast finansiella derivat, som definieras av ett enda värdepapper, nämligen en aktie. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Låt nu T vara ett givet framtida datum och antag att ett visst derivat i aktien kan inlösas vid tiden T och då utbetalar beloppet $f(S(T))$. Ett sådant derivat sägs vara ett enkelt derivat av europeisk typ eller ett enkelt kontrakt av europeisk typ. Här kallas f utbetalningsfunktion eller kontraktsfunktion och T kallas slutdag eller mognadsdag för kontraktet. Ett motsvarande amerikanskt kontrakt med utbetalningsfunktionen f kan inlösas vid vilken tidpunkt t som helst före eller på slutdagen T om kontraktsinnehavaren så önskar och utbetalar då beloppet $f(S(t))$.

Antag nu att K är ett givet positivt tal. En europeisk köpoption i aktien med lösenpris K och slutdag T är rättigheten, men ej skyldigheten, att köpa en aktie till priset K vid tiden T. En europeisk säljoption i aktien med lösenpris K och slutdag T är rättigheten, men ej skyldigheten, att sälja en aktie till priset K vid tiden T. På liknande sätt är en amerikansk köpoption (säljoption) i aktien med lösenpris K och slutdag T rättigheten, men ej skyldigheten, att vid ett tillfälle köpa (sälja) en aktie till priset K under tidsperioden från nu fram till och med tidpunkten T. Slutdagen för en aktieoption kallas också lösendag. Ett enkelt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen

$$c(s) = \max(0, s - K)$$

och slutdagen T är på en friktionsfri marknad ekvivalent med en europeisk köpoption med lösenpriset K och lösendagen T. Notera också att på en friktionsfri marknad är ett enkelt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen

$$p(s) = \max(0, K - s)$$

och slutdagen T ekvivalent med en europeisk säljoption med lösenpriset K och lösendagen T. Köpoption heter "call" på engelska och säljoption "put", vilket ligger till grund för våra beteckningar. I begreppet friktionsfri marknad inbegripes gratis transaktioner av värdepapper samt att in- och utlåningsräntan är lika. Därutöver antas att lån av värdepapper är gratis samt att handel förekommer i delar av värdepapper. Vi bortser också från alla typer av skatter. I denna framställning förutsätts att alla kapitalmarknader är friktionsfria. Om inte annat anges förutsätts också att aktien ej ger utdelning och att räntan är konstant.

Aktier och optionskontrakt är mycket gamla företeelser. Aktier har varit kända under minst 750 år. Merton berättar i sin bok "Continuous-Time Finance" $[MER1]$ om handel i köpoptionsliknande instrument på Amsterdams fondbörs för 350 år sedan. Optionskontrakt på jordbruksprodukter användes för övrigt redan av medeltidens köpmän $[GEM]$. Att värdera finansiella derivat på ett teoretiskt övertygande sätt har emellertid varit svårt i historien och problemet fick ingen tillfredsställande lösning förrän under 1970-talet. Begreppet arbitrage dvs riskfri vinst är här mycket centralt. Det mest komplicerade momentet i detta sammanhang består dock i att förstå de underliggande värdepapperens prisdynamik. Den matematiska teorin för stokastiska processer har hittills spelat en avgörande roll för de framsteg som gjorts.

En kombination av värdepapper kallas för en portfölj. Vi tillåter värdepappersinnehav i delar av värdepapper, som eventuellt kan vara negativa. Vi antar alltid att marknaden erbjuder obligationer. Betrakta en godtycklig portfölj $\mathcal{A}$ med värdet $V_{\mathcal{A}}(t)$ vid tiden t. Om $V_{\mathcal{A}}(T) \geq 0$ medför att $V_{\mathcal{A}}(t) \geq 0$ för alla tider $t < T$ så sägs dominansprincipen gälla (jmfr $[S]$). På en arbitragefri marknad gäller dominansprincipen. Om en portfölj består av aktier, obligationer och derivat av europeisk typ och portföljen är värdelös vid en viss tid, så medför dominansprincipen att portföljen är värdelös vid alla tidigare tidpunkter. En portföljstrategi där byte av värdepapper tillåts utan att portföljvärdet ändras i samband med bytet kallas självfinansierande. Dominansprincipens definition kan generaliseras till denna allmännare situation.

För att belysa dominansprincipen betraktar vi ett enkelt europeiskt derivat i aktien med slutdagen T och utbetalningsfunktionen

$$f(s) = s.$$

Låt $v(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Antag först att

$$v(t) > S(t).$$

Detta leder till följande handlingsplan: *utfärda derivatet och köp aktien vid tiden t; sälj aktien vid tiden T och ge likviden till innehavaren av kontraktet.*

Vid tiden t erhålls därvid beloppet $v(t)$ för utfärdandet av derivatet och efter köp av aktien kvarstår nettot $v(t)-S(t)$. Strategin ökar således portföljvärdet från noll till $(v(t)-S(t))e^{r\tau}$ i tidsintervallet från t till T där

$$\tau = T - t$$

och $r > 0$ är räntan.

Antag nu att

$$v(t) < S(t).$$

Denna olikhet leder till följande handlingsplan: *låna aktien vid tiden t och sälj den omedelbart; köp därefter derivatet; vid tiden T utbetalar derivatet en summa som betalar köp av aktien, som lämnas tillbaka till långivaren.* Strategin ger nettot $S(t) - v(t)$ vid tiden t. Vi har alltså funnit en strategi som ökar portföljvärdet från noll till $(S(t)-v(t))e^{r\tau}$ i tidsintervallet från t till T . En självfinansierande strategi som under ett givet tidsintervall ökar portföljvärdet från noll till ett positivt värde kallas för en arbitragestrategi. Sådana strategier är naturligtvis populära och en effektiv värdepappershandel eliminerar alla arbitragestrategier. På en effektiv marknad har det aktuella derivatet därför värdet

$$v(t) = S(t)$$

vid tiden t. Att låna aktier som säljs och senare köps tillbaka för att kunna lämnas tillbaka till långivaren kan eventuellt komma i konflikt med regler för värdepappershandel. Dessa regler växlar från tid till annan och från land till land. Aktieägaren kan dock alltid resonera som i exemplet genom att rent fiktivt låna av sig själv. Vi tar dominansprincipen som given i detta kapitel.

Vi utnyttjar i denna framställning ofta en obligation vars värde vid tiden T är lika med ett. Obligationens värde vid tiden $t \le T$ betecknas med $B(t)$ och ges av

$$B(t) = e^{-r\tau}$$

där $\tau = T - t$ och $r > 0$.

Betrakta nu ett enkelt europeiskt derivat med lösendatum T och med utbetalningsfunktionen

$$f(s) = s - K$$

där K är en positiv konstant. På en marknad där dominansprincipen gäller får detta derivat värdet

$$S(t) - Ke^{-r\tau}$$

vid tiden t. Vid tiden T har nämligen derivatet ifråga samma värde som en portfölj bestående av en aktie och $-K$ obligationer. Väljs K så att motsvarande kontrakt är värdelöst vid teckningstiden t kallas K för aktiens terminspris vid tiden t för leverans vid tiden T och betecknas med $S^T_{term}(t)$. Alltså gäller

$$S^T_{term}(t) = S(t)e^{r\tau}.$$

Vi kan som exemplen ovan visar värdera en del derivat av intresse med mycket enkla medel. Svårigheten ökar dock snabbt. Antag att en europeisk köpoption i aktien med lösenpriset K och lösendagen T har värdet $c(t, S(t), K)$ vid tiden t. Det finns inte något enkelt sätt att bestämma detta värde. I själva verket kräver problemet en mycket ingående analys av aktieprisets dynamik. Om $p(t, S(t), K)$ betecknar värdet för en motsvarande europeisk säljoption, så finns inte heller här någon enkel metod att bestämma optionsvärdet. Värdena för motsvarande optioner av amerikansk typ betecknas med $C(t, S(t), K)$ respektive $P(t, S(t), K)$. Inte heller dessa värden är enkla att bestämma. Om slutdagen T behöver betonas skriver vi $p(t, S(t), K) = p(t, S(t), K; T)$ och på motsvarande sätt för de övriga optionsvärdena.

Följande relation mellan aktiepris, europeiskt köpoptionspris, europeiskt säljoptionspris och obligationspris är dock möjlig att visa utan kännedom om aktieprisets dynamik, nämligen

$$S(t) - c(t, S(t), K) = Ke^{-r\tau} - p(t, S(t), K).$$

Vi behöver bara konstatera att relationen ifråga är sann för $t = T$ samtidigt som vi noterar att vänstra ledet representerar värdet av en aktie och en utfärdad köpoption och högra ledet värdet av K obligationer och en utfärdad säljoption. Dominansprincipen medför att likheten även gäller före slutdagen (relationen kallas ”put-call parity relation” på engelska). Relationen visar att den europeiska säljoptionen är lätt att värdera, så snart vi kan prissätta den europeiska köpoptionen. Vi ser också att värdet $p(S(T))$ vid tiden T är uppnåeligt på en kapitalmarknad som endast består av aktien, den europeiska köpoptionen och obligationen.

Betrakta nu för givna positiva konstanter A, B, K och L funktionen

$$f(s) = \min(A(s-K)^+, B(L-s)^+)$$

där $K < L$ och där s är en positiv variabel. Denna polygonfunktions derivata har tre språngpunkter. Om vi subtraherar funktionen $B(L-s)^+$ från funktionen $f(s)$ så erhålls en polygonfunktion vars derivata har två språngpunkter.

Man inser nu lätt att en lämplig kombination av säljoptioner med olika löptid har värdet $f(S(T))$ vid tiden T. Vi utnyttjar här handel i delar av värdepapper. Värdet $f(S(T))$ vid tiden T är därför uppnåeligt på en kapitalmarknad som endast består av aktien, europeiska köpoptioner och obligationen.

Om $f(s)$ betecknar en godtycklig polygonfunktion i intervallet $s > 0$ så inser vi på liknande sätt att värdet $f(S(T))$ vid tiden T är uppnåeligt på en kapitalmarknad som endast består av aktien, europeiska köpoptioner i aktien och obligationen. Notera här att en godtycklig kontinuerlig funktion f på intervallet $[0, S]$ kan approximeras likformigt med polygonfunktioner. Beviset bygger på Bolzano-Weierstrass sats som garanterar att en oändlig punktföljd i det slutna begränsade intervallet $[0, S]$ har minst en hopningspunkt.

Av ovanstående drar vi slutsatsen att enkla europeiska kontrakt är ganska lätta att värdera så snart motsvarande punkt avgjorts för europeiska köpoptioner. Vi diskuterar nedan utöver vanliga köp- och säljoptioner av europeisk och amerikansk typ även mer invecklade så kallade betingade kontrakt. Bl a värderas medelvärdesoptioner och i allra sista kapitlet studeras ingående optionen att under en given period få köpa en aktie till den allra lägsta aktiekursen under perioden. Vi studerar också optionen att få byta en aktie mot en annan aktie t o m ett givet datum om kontraktsinnehavaren så önskar. Denna option illustrerar ett derivat som beror på flera underliggande aktier.

Det är idag en vanlig uppfattning att aktiepriser styrs av slump åtminstone på kort sikt. Prisfluktuationerna uppvisar likheter med molekylers och aggregat av molekylers fluktuationer, som först observerades av botanisten Brown år 1827 och som behandlades teoretiskt av Einstein 1905 $[E]$. Försök att förstå aktieprisers fluktuationer och europeiska köpoptioner ledde år 1900 fransmannen Bachelier till det anmärkningsvärda arbetet "Théorie de la spéculation" i Annales scientifiques de l'École normale supérieure $[BA]$. Något överraskande behandlade Bachelier och Einstein samma matematiska grundekvationer. Den amerikanske matematikern Wiener gav år 1923 en stringent matematisk behandling av Brownsk rörelse $[W]$. Bachelier, som redan i början av seklet stöddes av Poincaré, hade inget stort vetenskapligt inflytande under sin livstid och fick ett tydligt erkännande för sin pionjärinsats inom matematisk finans först några år efter sin bortgång 1946. Genom Blacks och Scholes lösning av det europeiska köpoptionsproblemet 1973 $[BS]$, som bygger på japanen Itôs kalkyl med Brownska trajektorier, framstår Bacheliers uppsats från år 1900 som en milstolpe i finansmatematikens historia. För en intressant artikel om Bacheliers insatser inom matematisk finans hänvisas till Samuelsons artikel $[SAM2]$.

I de första sex kapitlen av denna framställning gör vi läsaren förtrogen med många fundamentala begrepp inom matematik såsom konvexitet, stokastiska processer och martingaler. I kapitel 7 härleder vi Black-Scholes berömda differentialekvation med hjälp av den så kallade binomialmodellen som presenterades av Cox, Ross och Rubinstein $[CRR]$ år 1979. Black-Scholes differentialekvation ger teoretiska priser för enkla derivat av europeisk typ. De enkla amerikanska kontraktens teoretiska värden beräknas med hjälp av binomialapproximation. För att klargöra begreppet martingalmått, som spelar en nyckelroll i modern optionsteori, diskuterar vi i kapitel 10 translation av det så kallade Wienermåttet. Här spelar stokastiska integraler med deterministisk integrand en viktig roll. Detta integralbegrepp, som går tillbaka till ett arbete av Paley, Wiener och Zygmund $[PWZ]$ från år 1933, behandlas i kapitel 9. I kapitel 11 går vi in på Itôintegraler, som initierades av Itô i arbetena $\left[IT\hat{O}1\right]$ och $\left[IT\hat{O}2\right]$ från 1942 respektive 1944. Det visar sig att Itôintegraler är ett suveränt hjälpmedel för att värdera finansiella derivat och vi hoppas de kommer att ge läsaren stor glädje. Slutligen i det allra sista kapitlet behandlas Heaths, Jarrows och Mortons uppmärksammade modell för räntederivat i fallet av deterministisk volitilitetsstruktur $[HJM]$.

Övningar

I nedanstående övningar i detta kapitel förutsätts att marknaden erbjuder en aktie, en obligation och olika typer av aktiederivat. Vi antager dessutom att dominansprincipen gäller. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$ och obligationens pris vid tiden t är lika med $B(t) = B(0)e^{rt}$. Om $t \leq T$ så är $\tau = T - t$.

1. Visa att
$$C(t, S(t), K) \geq \max(0, S(t) - K)$$
och
$$C(t, S(t), K) \geq c(t, S(t), K).$$

2. Visa att
$$c(t, S(t), K) \geq \max(0, S(t) - Ke^{-r\tau}).$$

3. Visa att
$$C(t, S(t), K) = c(t, S(t), K)$$
(då aktien ej ger utdelning).

4. Visa att
$$T_0 \leq T_1 \Rightarrow c(t, S(t), K; T_0) \leq c(t, S(t), K; T_1).$$

5. Visa att
$$K_0 \geq K_1 \Rightarrow c(t, S(t), K_0) \leq c(t, S(t), K_1)$$
och dra slutsatsen att
$$0 \geq \frac{\partial}{\partial K} c(t, S(t), K)$$
om derivatan i höger led existerar.

6. Visa att
$$c(t, S(t), K) \leq S(t).$$

7. Visa att
$$K_0 \geq K_1 \Rightarrow c(t, S(t), K_0) \geq c(t, S(t), K_1) - e^{-r\tau}(K_0 - K_1).$$
Visa därefter att
$$\frac{\partial}{\partial K} c(t, S(t), K) \geq -e^{-r\tau}$$
om derivatan i vänster led existerar.

8. Visa att
$$\lim_{S(t)\to 0} c(t, S(t), K) = 0.$$

9. Visa att
$$\lim_{T\to\infty} c(t, S(t), K; T) = S(t).$$

10. Visa att
$$2c(t, S(t), \frac{K_0 + K_1}{2}) \leq c(t, S(t), K_0) + c(t, S(t), K_1).$$

11. Visa att
$$K \geq P(t, S(t), K) \geq \max(0, K - S(t)).$$

12. Visa att det kan vara optimalt att inlösa en amerikansk säljoption före slutdagen

13. En aktie har priset $S(t)$ vid tiden t. Antag $t_0 < T$ och betrakta ett derivat av europeisk typ med slutdagen T som utbetalar beloppet $S(t_0)$ vid tiden T. Visa med hjälp av dominansprincipen att derivatets värde vid tiden $t < t_0$ är lika med $S(t)e^{-r(T-t_0)}$, där r betecknar räntan. Vilket värde har derivatet vid tiden $t \in [t_0, T]$?

14. Låt $t_0 < T$ och $n \in \mathbf{N}_+$. Sätt $h = \frac{1}{n}(T - t_0)$ och $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, ..., n$. Antag vidare att $K > 0$ och betrakta två europeiska derivat av medelvärdestyp med utbetalningarna
$$X_c = \max(0, \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S(t_i) - K)$$
och
$$X_p = \max(0, K - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S(t_i))$$
vid tidpunkten T. Antag dessa derivat har värdena $v_c(t)$ resp $v_p(t)$ vid tiden t. Visa att om $t \in [t_{m-1}, t_m[$ så gäller
$$\frac{e^{-r\tau}}{n+1}\sum_{i=0}^{m-1} S(t_i) + \frac{1 - e^{-r(n-m+1)h}}{1 - e^{-rh}}\frac{S(t)}{n+1} - v_c(t) =$$
$$Ke^{-r\tau} - v_p(t).$$
Försök finna ett liknande samband för $t < t_0$.

15. Låt $t < t_* < T$ och antag att aktien utdelar $\delta S(t_*)$ vid tiden t_* där $\delta \in\,]0, 1[$. Bestäm värdet vid tiden t för ett derivat i aktien som utbetalar $S(T)$ vid tiden T.

16. Låt $t < t_* < T$ och antag att aktien utdelar $\delta S(t_*)$ vid tiden t_* där $\delta \in\,]0, 1[$. Visa att
$$S^T_{term}(t) = (1 - \delta)e^{r\tau}S(t).$$

17. Bestäm terminspriset för en utländsk valuta.