15. HJM-modellen vid deterministisk volatilitetsstruktur

Betrakta en så kallad nollkupongsobligation med mognadstiden T dvs ett kontrakt som betalar innehavaren beloppet 1 vid tiden T. Detta värdepapper kallas här en T-obligation. Vi betecknar obligationspriset vid tiden t med $p(t,T)$ och skriver

$$p(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}.$$

Storheten $R(t,T)$ kallas för $(T-t)$-räntan vid tiden t (jmfr begrepp såsom korta räntan, halvårsräntan, 5-årsräntan osv). Kurvan

$$y = R(t, t+\tau),\ \ \tau > 0$$

kallas för avkastningskurvan vid tiden t.

Nedan behandlas en arbitragefri modell för obligationer som brukar kallas HJM-modellen efter upptäckarna Heath, Jarrow och Morton [HJM]. Vi begränsar oss till så kallad deterministisk volatilitetsstruktur, vilket ger oss Gaussiska fördelningar för räntor. Detta betyder speciellt att räntor kan vara negativa med positiv sannolikhet, vilket kan verka onaturligt då kostnaden att förvara pengar normalt är mycket begränsad. Sannolikheten för negativ ränta i modellen är dock mycket liten och modellen används med stor framgång på olika marknader. För mer fullständiga framställningar av teorin för räntederivat räntederivat hänvisas till Bingham och Kiesel [BK] , Björk [BS], Hull [H], Jarrow [$J1$] och Musiela och Rutkowski [MR].

Antag $t \leq S < T$ och låt $R(t,S,T)$ beteckna räntan för perioden $[S,T]$ kontrakterad vid tiden t. Kravet på arbitagefrihet medför att

$$p(t,T) = p(t,S)e^{-R(t,S,T)(T-S)}$$

vilket inses av följande tabell.

tid	t	S	T
handling	sälj en S-obligation köp $\frac{p(t,S)}{p(t,T)}$ st T-obligationer		
kassaflöde	0	-1	$\frac{p(t,S)}{p(t,T)}$

Notera att

$$R(t,T) = R(t,t,T).$$

Den momentana forwardräntan $f(t,T)$ vid tiden T sedd från tidpunkten t definieras av gränsvärdet

$$f(t,T) = \lim_{S \to T} R(t,S,T)$$

dvs

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln p(t,T)}{\partial T}$$

och det följer att

$$p(t,T) = p(t,s)e^{-\int_s^T f(t,u)du}, \ t \leq s \leq T.$$

Den korta räntan $r(t)$ vid tiden t definieras av ekvationen

$$r(t) = f(t,t).$$

Antag beloppet 1 placeras i en obligation med närmast omedelbar inlösen och att det vid lösen utbetalade beloppet omedelbart placeras i en obligation med närmast omedelbar inlösen osv. Kapitalet $B(t)$ vid tiden t blir då

$$B(t) = e^{\int_0^t r(u)du}.$$

Observera att

$$dB(t) = r(t)B(t)dt.$$

Vi kan alternativt tänka oss att $B(t)$ representerar banksaldot vid tiden t om beloppet 1 satts in i banken vid tiden 0.

I fortsättningen betecknar T_* en fix framtida datum och vi betraktar endast obligationer med mognad före eller vid tidpunkten T_*. Låt nu

$$C^n = \{x;\, x : [0,T_*] \to \mathbf{R}^n \text{ är kontinuerlig}\}$$

och låt $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (C^n, \mathcal{B}_\theta^n, \theta^n)$ beteckna Wienerrummet svarande mot n-dimensionell Brownsk rörelse i tidsintervallet $[0,T_*]$. Om $x = (x_1, ..., x_n) \in C^n$ och $0 \leq t \leq T_*$ så definieras

$$[W(x)](t) = [(W_1(x), ..., W_n(x))](t) = x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$$

och vi låter för fixt $t \in [0,T_*]$ σ-algebran $\mathcal{F}_t$ vara den minsta σ-algebran av delmängder av Ω som innehåller σ-algebran $\sigma(W(\lambda);\ 0 \leq \lambda \leq t)$ och alla P-nollmängder.

Utgångspunkten för HJM-modellen är att de momentana forwardräntorna uppfyller ekvationer av typen

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t), \ 0 \le t \le T \le T_*$$

för lämpliga progressivt mätbara processer $\alpha^T = (\alpha(t,T))_{0\le t\le T}$ och $\sigma^T = (\sigma(t,T))_{0\le t\le T}$ där $0 < T \le T_*$. Här är $\sigma(t,T)$ en $1\times n$ matris för varje $t \le T$. Måttet P kallas det fysikaliska måttet och processerna σ^T, $0 < T \le T_*$, kallas för modellens volatilitetsstruktur. I denna framställning antager vi att processerna α^T och σ^T, där $0 < T \le T_*$, är deterministiska dvs vanliga funktioner.

I fortsättningen antar vi alltid att $T \le T_*$. Om $g = g(t,T)$ är en funktion av t och T betecknar g'_T derivering med avseende på T dvs

$$g'_T(t,T) = \frac{\partial g(t,T)}{\partial T}$$

Sats 1. *Det gäller att*

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s).$$

Det gäller också att

$$dr(t) = \mu(t)dt + \sigma(t,t)dW(t)$$

där

$$\mu(t) = f'_T(0,t) + \alpha(t,t) + \int_0^t \alpha'_T(s,t)ds + \int_0^t \sigma'_T(s,t)dW(s).$$

Bevis. Eftersom

$$f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s).$$

och $f(t,t) = r(t)$ följer första delen av satsen. Om vi också utnyttjar att

$$\alpha(s,t) = \alpha(s,s) + \int_s^t \alpha'_T(s,u)du$$

och

$$\sigma(s,t) = \sigma(s,s) + \int_s^t \sigma'_T(s,u)du$$

följer att

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,s)ds + \int_0^t \left\{ \int_s^t \alpha_T'(s,u)du \right\} ds$$

$$\int_0^t \sigma(s,s)dW(s) + \int_0^t \left\{ \int_s^t \sigma_T'(s,u)du \right\} dW(s)$$

Av relationen

$$f(0,t) = r(0) + \int_0^t f_T'(0,s)ds$$

erhåller vi nu att

$$r(t) = r(0) + \int_0^t f_T'(0,s)ds + \int_0^t \alpha(s,s)ds + \int_0^t \left\{ \int_0^u \alpha_T'(s,u)ds \right\} du$$

$$\int_0^t \sigma(s,s)dW(s) + \int_0^t \left\{ \int_0^u \sigma_T'(s,u)W(s) \right\} du$$

och satsen är visad.

Sats 2. *Det gäller att*

$$\frac{dp(t,T)}{p(t,T)} =$$

$$(r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2} \mid S(t,T) \mid^2)dt + S(t,T)dW(t)$$

där

$$A(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,s)ds$$

och

$$S(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,s)ds.$$

Bevis. Sätt

$$Z(t) = -\int_t^T f(t,s)ds$$

och kom ihåg att

$$p(t,T) = e^{Z(t)}.$$

Relationen

$$f(t,s) = f(0,s) + \int_0^t \alpha(u,s)du + \int_0^t \sigma(u,s)dW(u)$$

ger nu att

$$Z(t) = -\int_t^T f(0,s)ds - \int_t^T \left\{\int_0^t \alpha(u,s)du\right\} ds - \int_t^T \left\{\int_0^t \sigma(u,s)dW(u)\right\} ds =$$

$$-\int_t^T f(0,s)ds - \int_0^t \left\{\int_t^T \alpha(u,s)ds\right\} du - \int_0^t \left\{\int_t^T \sigma(u,s)ds\right\} dW(u) =$$

$$Z(0) - \int_0^t \left\{\int_u^T \alpha(u,s)ds\right\} du - \int_0^t \left\{\int_u^T \sigma(u,s)ds\right\} dW(u) +$$

$$+\int_0^t f(0,s)ds + \int_0^t \left\{\int_u^t \alpha(u,s)ds\right\} du + \int_0^t \left\{\int_u^t \sigma(u,s)ds\right\} dW(u).$$

Den första delen av sats 1 ger nu att

$$Z(t) = Z(0) - \int_0^t \left\{\int_u^T \alpha(u,s)ds\right\} du - \int_0^t \left\{\int_u^T \sigma(u,s)ds\right\} dW(u) + \int_0^t r(s)ds.$$

Alltså är

$$dZ(t) = \left\{r(t) - \int_t^T \alpha(t,s)ds\right\} dt - \left\{\int_t^T \sigma(t,s)ds\right\} dW(t)$$

eller

$$dZ(t) = (r(t) + A(t,T))dt + S(t,T)dW(t).$$

Eftersom $p(t,T) = e^{Z(t)}$ följer nu sats 2 från Itôs lemma.

Vi går nu fram analogt med Black-Scholes teori och söker ett sannolikhetsmått Q ekvivalent med P så att de diskonterade obligationspriserna

$$\frac{p(t,T)}{B(t)},\ 0 \le t \le T$$

är Q-martingaler för alla $T \le T_*$. Notera att i detta fall är

$$\frac{p(t,T)}{B(t)} = E^Q\left[\frac{p(T,T)}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

dvs

$$p(t,T) = E^Q\left[e^{-\int_t^T r(\lambda)d\lambda} \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Som i tidigare kapitel är därför naturligt att starta med en deterministisk funktion $h = (h_1, ..., h_n)$, där $h_j \in L^2([0, T_*])$, $j = 1, ..., n$, och sätta

$$W_t^0 = W_t - a(t),\ 0 \leq t \leq T_*$$

där

$$a(t) = \int_0^t h(u)du,\ 0 \leq t \leq T_*.$$

Om vi definierar

$$Q(A) = P(A - a),\ A \in \mathcal{F}_{T_*}$$

så visar Cameron-Martins sats för vektorvärd Brownsk rörelse att P och Q är ekvivalenta samt

$$dQ = e^{\int_0^T h(u)du - \frac{1}{2}\int_0^T |h(u)|^2 du} dP$$

(formuleringarna och bevisen för Cameron-Martins sats är nästan exakt lika i fallen $n = 1$ och $n > 1$).

Eftersom

$$\frac{dp(t,T)}{p(t,T)} =$$

$$(r(t) + A(t) + \frac{1}{2} \mid S(t,T) \mid^2)dt + S(t,T)dW(t)$$

blir nu

$$\frac{dp(t,T)}{p(t,T)} =$$

$$(r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2} \mid S(t,T) \mid^2 + S(t,T)h(t))dt + S(t,T)dW^0(t).$$

De diskonterade obligationspriserna

$$\frac{p(t,T)}{B(t)},\ 0 \leq t \leq T$$

är därför en Q-martingal om

$$A(t,T) + \frac{1}{2} \mid S(t,T) \mid^2 + S(t,T)h(t) = 0,\ 0 \leq t \leq T$$

dvs

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T) \int_t^T \sigma(t,s)^* ds - \sigma(t,T)h(t),\ 0 \leq t \leq T$$

eller mer explicit

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)^* ds - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(t,T)h_j(t),\ \ 0 \le t \le T$$

(vi betecknar transponering av en matris C med C^*). Det finns alltså ett martingalmått om denna ekvation har en lösning för varje $T \le T_*$, vilket vi fr o m med nu antager. I detta fall är alltså

$$df(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)^* ds dt + \sigma(t,T) dW^0(t)$$

där driftvektorn alltså är helt bestämd av volatilitetsstrukturen. Fr o m nu antager vi också följande determinantvillkor nämligen att det till varje $T \in]0, T_*[$ existerar $T_1, ..., T_n \in [T, T_*]$, där $T_1 < ... < T_n$, så att

$$\det\{\sigma_j(t,T_k)\} \ne 0 \text{ för alla } 0 \le t \le T.$$

Antag nu att $0 < T < T_*$ och välj $T_1, ..., T_n \in [T, T_*]$, där $T_1 < ... < T_n$, så att $\det\{\sigma_j(t,T_k)\} \ne 0$ för alla $0 \le t \le T$. Man kan lätt definiera begreppet självfinansierande strategi för gruppen av obligationer med mognad vid tidpunkterna $T_1, ..., T_n$ och placering i bank. Vi uppfattar här placering i bank som en placering vars tillväxt bestäms av den korta räntan. Om vi har ett europeiskt derivat med utbetalning X vid tiden T så kan vi, under lämpliga integrabilitetsvillkor på X, finna en självfinansierande strategi för dessa obligationer och placering i bank som har värdet X vid tiden T. Marknaden är i denna mening komplett.

Exempel 1. Determinantvillkoret ovan är uppfyllt om $n = 1$ och $\sigma(t,T) = \sigma$ är en positiv konstant oberoende av t och T. I detta fall gäller att

$$df(t,T) = \sigma \int_t^T \sigma ds dt + \sigma dW^0(t)$$

och

$$df(t,T) = \sigma^2(T-t)dt + \sigma dW^0(t)$$

varför

$$f(t,T) = f(0,T) + \sigma^2 t(T - \frac{t}{2}) + \sigma W^0(t).$$

Notera att

$$r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma W^0(t).$$

Vi får också att

$$\int_t^T f(t,s)ds = \int_t^T f(0,s)ds + \frac{\sigma^2}{2}tT(T-t) + \sigma(T-t)dW^0(t)$$

och

$$p(t,T) = \frac{p(0,T)}{p(0,t)}e^{-\frac{\sigma^2}{2}tT(T-t)-\sigma(T-t)dW^0(t)}.$$

Denna formel framkom redan i en föregångare till HJM , nämligen Ho-Lees korträntemodell (se $[BS]$).

Exempel 2. Determinantvillkoret ovan är uppfyllt om $n = 2$ och

$$\begin{cases} \sigma_1(t,T) = \sigma_1 \\ \sigma_2(t,T) = \sigma_2 e^{-\lambda(T-t)} \end{cases}$$

där σ_1, σ_2 och λ är positiva konstanter (se $[HJM]$).

Antag nu att $0 < T < T_*$. Ett derivat som utbetalar beloppet X vid tiden T får det arbitragefria priset

$$X(t) = B(t)E^Q\left[\frac{X}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

vid tiden $t \in [0,T]$. Vi utesluter återigen preciserade integrabilitetsvillkor på X för att inte tynga framställningen.

Exempel 3. Ett lån på beloppet K, som kontrakteras vid tiden 0, löper med marknadsräntan L över perioden från T_0 till T_1. Här bestäms L av ekvationen

$$p(T_0,T_1) = \frac{1}{1+\delta L}$$

där $\delta = T_1 - T_0$. Låntagaren betalar tillbaka beloppet $(1+\delta L)K$ vid tiden T_1.

En swap med swap-räntan R utbetalar beloppet

$$X = K\delta(L - R)$$

vid tiden T_1. Dess värde $v(0)$ vid tiden 0 kan beräknas utan att känna volatilitetsstrukturen. För att se detta utgår vi från att

$$v(0) = E^Q\left[e^{-\int_0^{T_1} r(t)dt} X\right]$$

där

$$X = K(\frac{1}{p(T_0, T_1)} - 1 - \delta R).$$

Om vi sätter $R^* = 1 + \delta R$ blir

$$v(0) = KE^Q\left[e^{-\int_0^{T_1} r(t)dt}(\frac{1}{p(T_0, T_1)} - R^*)\right] =$$

$$KE^Q\left[E^Q\left[e^{-\int_0^{T_1} r(t)dt}(\frac{1}{p(T_0, T_1)} - R^*) \mid \mathcal{F}_{T_0}\right]\right] =$$

$$KE^Q\left[e^{-\int_0^{T_0} r(t)dt}(\frac{1}{p(T_0, T_1)} - R^*)E^Q\left[e^{-\int_{T_0}^{T_1} r(t)dt} \mid \mathcal{F}_{T_0}\right]\right]$$

$$KE^Q\left[e^{-\int_0^{T_0} r(t)dt}(\frac{1}{p(T_0, T_1)} - R^*)p(T_0, T_1)\right] =$$

$$KE^Q\left[e^{-\int_0^{T_0} r(t)dt}(1 - R^* p(T_0, T_1))\right] = K(p(0, T_0) - R^* p(0, T_1)).$$

Antag nu återigen att $0 < T < T_*$. Ett derivat som utbetalar beloppet $X \geq 0$ vid tiden T får det arbitragefria priset

$$X(t) = B(t)E^Q\left[\frac{X}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

vid tiden $t \in [0, T]$. Antag nu dessutom att $P[X(T) > 0] = 1$, så att $P[X(t) > 0] = 1$, $0 \leq t \leq T$, och definiera

$$dQ^X = \frac{X(T)}{X(0)B(T)} dQ \text{ på } \mathcal{F}_T.$$

Sats 4. *Om*

$$\left(\frac{Z(t)}{B(t)}\right)_{0\le t\le T}$$

är en Q-martingal så är

$$\left(\frac{Z(t)}{X(t)}\right)_{0\le t\le T}$$

en Q^X-martingal.

Speciellt följer för $0 \le t \le \min(T, \tilde{T})$ att

$$X(t)E^{Q^X}\left[\frac{Z(T)}{X(T)} \mid \mathcal{F}_t\right] = \tilde{X}(t)E^{Q^{\tilde{X}}}\left[\frac{Z(\tilde{T})}{\tilde{X}(\tilde{T})} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

om $\tilde{X}, \tilde{T}$ uppfyller samma förutsättningar som X, T.

Bevis. Sätt

$$U = \frac{X(T)}{X(0)B(T)}$$

och

$$U(t) = E^Q\left[U \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{X(t)}{X(0)B(t)}.$$

Låt

$$Y = \frac{Z(T)}{X(T)}.$$

Vi visar först att

$$E^{Q^X}\left[Y \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{U(t)}E^Q\left[YU \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Om $A \in \mathcal{F}_t$ gäller nämligen att

$$E^{Q^X}\left[Y1_A\right] = E^Q\left[YU1_A\right] = E^Q\left[E^Q\left[YU \mid \mathcal{F}_t\right]1_A\right] =$$

$$E^{Q^X}\left[\frac{1}{U(t)}E^Q\left[YU \mid \mathcal{F}_t\right]1_A\right].$$

Nu får vi att

$$E^{Q^X}\left[Y \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{U(t)}E^Q\left[YU \mid \mathcal{F}_t\right] =$$

$$\frac{X(0)B(t)}{X(t)}E^Q\left[\frac{Z(T)}{X(T)}\frac{X(T)}{X(0)B(T)} \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{B(t)}{X(t)}E^Q\left[\frac{Z(T)}{B(T)} \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{Z(t)}{X(t)}$$

vilket visar satsen.

Låt nu X vara en T-obligation och sätt $Q^X = Q^T$. Om

$$dQ^T = UdQ \text{ på } \mathcal{F}_T$$

där

$$U = \frac{1}{p(0,T)B(T)}$$

och

$$U(t) = E^Q[U \mid \mathcal{F}_t]$$

så är

$$U(t) = \frac{p(t,T)}{p(0,T)B(t)}.$$

Vidare gäller att

$$d\frac{p(t,T)}{B(t)} = \frac{dp(t,T)}{B(t)} - \frac{p(t,T)}{B^2(t)}dB(t) =$$

$$\frac{1}{B(t)}p(t,T)(r(t) + S(t,T)dW^0(t)) - r(t)\frac{p(t,T)}{B(t)}dt = \frac{p(t,T)}{B(t)}S(t,T)dW^0(t).$$

Således är

$$U(t) = e^{\int_0^t S(u,T)dW^0(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |S(u,T)|^2 du}.$$

Vi har därmed visat att

$$dQ^T = e^{\int_0^T S(u,T)dW^0(u) - \frac{1}{2}\int_0^T |S(u,T)|^2 du} dQ \text{ på } \mathcal{F}_T$$

Om vi definierar

$$W^T(t) = W^0(t) - \int_0^t S(u,T)^* du, \ 0 \le t \le T$$

så är processen $W^T = (W^T(t))_{0 \le t \le T}$ en normaliserad Wiener process relativt sannolikhetsmåttet Q^T.

Problem 1. Låt $0 < T < \tilde{T}$, $K > 0$ och sätt $A = \left[p(T, \tilde{T}) > K\right]$. Visa att

$$Q^T(A) = \Phi(d_2)$$

där

$$d_2 = \frac{\ln \frac{p(0,\tilde{T})}{Kp(0,T)} - \frac{1}{2}\Sigma^2(T)}{\Sigma(T)}$$

och

$$\Sigma(T) = \sqrt{\int_0^T \mid S(u, \tilde{T}) - S(u, T) \mid^2 du}.$$

Lösning. Sätt

$$Z(t, T) = \frac{p(t, \tilde{T})}{p(t, T)}.$$

Eftersom

$$\frac{p(t, T)}{p(0, T)B(t)} = U(t) = e^{\int_0^t S(u,T)dW^0(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |S(u,T)|^2 du}$$

så följer att

$$Z(t, T) = \frac{p(0, \tilde{T})}{p(0, T)} e^{\int_0^t (S(u,\tilde{T}) - S(u,T))dW^0(u) - \frac{1}{2}\int_0^t (|S(u,\tilde{T})|^2 - |S(u,T)|^2)du}.$$

Vi utnyttjar nu att

$$W^0(t) = W^T(t) + \int_0^t S(u, T)^* du, \ 0 \le t \le T$$

och får

$$Z(t, T) = \frac{p(0, \tilde{T})}{p(0, T)} e^{\int_0^t (S(u,\tilde{T}) - S(u,T))dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |S(u,\tilde{T}) - S(u,T)|^2 du}.$$

Om $G \in N(0, 1)$ så följer nu att

$$Q^T(A) = Q^T\left[Z(T, T) > K\right] =$$

$$P\left[\frac{p(0, \tilde{T})}{p(0, T)} e^{\Sigma(T)G - \frac{1}{2}\Sigma^2(T)} > K\right]$$

och resultatet följer lätt.

Problem 2. Låt $K > 0$, $0 \le T \le \tilde{T}$ och sätt $A = \left[p(T, \tilde{T}) > K\right]$. Visa att

$$Q^{\tilde{T}}(A) = \Phi(d_1)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln \frac{p(0,\tilde{T})}{Kp(0,T)} + \frac{1}{2}\Sigma^2(T)}{\Sigma(T)} = d_2 + \Sigma(T).$$

Lösning. Sätt

$$Y(t,T) = \frac{1}{Z(t,T)} = \frac{p(t,T)}{p(t,\tilde{T})}.$$

Från lösningen av problem 1 ser vi att

$$Y(t,T) = \frac{p(0,T)}{p(0,\tilde{T})} e^{\int_0^t (S(u,T) - S(u,\tilde{T}))dW^0(u) - \frac{1}{2}\int_0^t (|S(u,T)|^2 - |S(u,\tilde{T})|^2)du}$$

och genom att utnyttja relationen

$$W^0(t) = W^{\tilde{T}}(t) + \int_0^t S(u,\tilde{T})^* du$$

får vi

$$Y(t,T) = \frac{p(0,T)}{p(0,\tilde{T})} e^{\int_0^t (S(u,T) - S(u,\tilde{T}))dW^{\tilde{T}}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t |S(u,T) - S(u,\tilde{T})|^2 du}.$$

Om $G \in N(0,1)$ så följer nu att

$$Q^{\tilde{T}}(A) = Q^T \left[Y(T,T) < \frac{1}{K}\right] =$$

$$P\left[\frac{p(0,T)}{p(0,\tilde{T})} e^{\Sigma(T)G - \frac{1}{2}\Sigma^2(T)} < \frac{1}{K}\right]$$

och resultatet följer lätt.

Sats 5. *Antag $T < \tilde{T} < T_*$. En europeisk köpoption på $\tilde{T}$-obligationen med mognadstiden T och lösenpriset K har priset*

$$C(0) = p(0,\tilde{T})\Phi(d_1) - Kp(0,T)\Phi(d_2)$$

vid tiden 0.

Om en europeisk säljoption på $\tilde{T}$-obligationen med mognadstiden T och lösenpriset K har priset $P(0)$ vid tiden 0 så gäller

$$p(0,\tilde{T}) - C(0) = Kp(0,T) - P(0).$$

Bevis. Låt $C(t)$ beteckna köpoptionens pris vid tiden t. Då är $(\frac{C(t)}{B(t)})_{0\le t\le T}$ en Q-martingal varför$(\frac{C(t)}{p(t,T)})_{0\le t\le T}$ en Q^T-martingal. Alltså är

$$\frac{C(0)}{p(0,T)} = E^{Q^T}\left[(p(T,\tilde{T}) - K)^+\right].$$

Om $A = \left[p(T,\tilde{T}) > K\right]$ så följer att

$$\frac{C(0)}{p(0,T)} = E^{Q^T}\left[p(T,\tilde{T})1_A\right] - KQ^T(A).$$

Vidare är

$$p(0,T)E^{Q^T}\left[p(T,\tilde{T})1_A\right] = E^Q\left[\frac{p(T,\tilde{T})}{B(T)}1_A\right] =$$

$$E^Q\left[1_A E^Q\left[\frac{1}{B(\tilde{T})} \mid \mathcal{F}_T\right]\right] = E^Q\left[1_A\frac{1}{B(\tilde{T})}\right] = p(0,\tilde{T})Q^{\tilde{T}}(A)$$

och den första delen av sats 5 följer nu direkt från problem 1 och 2.

Den senare delen av sats 5 följer lätt från definitionerna.

Exempel 4. Ett lån på beloppet K, som kontrakteras vid tiden 0, löper med marknadsräntan L över perioden från T_0 till T_1. Här bestäms L av ekvationen

$$p(T_0,T_1) = \frac{1}{1+\delta L}$$

där $\delta = T_1 - T_0$. Låntagaren betalar tillbaka beloppet $(1+\delta L)K$ vid tiden T_1.

En caplet med cap-räntan R utbetalar beloppet

$$X = K\delta \max(L - R, 0)$$

vid tiden T_1. Dess värde $v(0)$ vid tiden 0 kan lätt bestämmas med hjälp av sats 5. Vi har nämligen att

$$v(0) = E^Q \left[e^{-\int_0^{T_1} r(t)dt} X \right]$$

och

$$X = K \max(\frac{1}{p(T_0, T_1)} - 1 - \delta R).$$

Om vi sätter $R^* = 1 + \delta R$ blir

$$\frac{v(0)}{K} = E^Q \left[e^{-\int_0^{T_1} r(t)dt} \max(\frac{1}{p(T_0, T_1)} - R^*) \right] =$$

$$E^Q \left[E^Q \left[e^{-\int_0^{T_1} r(t)dt} \max(\frac{1}{p(T_0, T_1)} - R^*) \mid \mathcal{F}_{T_0} \right] \right] =$$

$$E^Q \left[e^{-\int_0^{T_0} r(t)dt} \max(\frac{1}{p(T_0, T_1)} - R^*) E^Q \left[e^{-\int_{T_0}^{T_1} r(t)dt} \mid \mathcal{F}_{T_0} \right] \right]$$

$$E^Q \left[e^{-\int_0^{T_0} r(t)dt} \max(\frac{1}{p(T_0, T_1)} - R^*) p(T_0, T_1) \right] =$$

$$R^* E^Q \left[e^{-\int_0^{T_0} r(t)dt} \max(\frac{1}{R^*} - p(T_0, T_1)) \right]$$

dvs $v(0)$ blir lika med KR^* multiplicerat med värdet vid tiden 0 för en europeisk säljoption på T_1-obligationen med inlösen vid T_0 och lösenpriset $\frac{1}{R^*}$. Ett analytiskt värde på $v(0)$ erhålls nu med hjälp av sats 5.

En cap, som är en summa av caplets, kan nu också ges en enkel prisformel.