2. Konvexitet

I detta kapitel uppmärksammas några grundläggande resultat inom konvexitetsteorin samtidigt som det funktionalanalytiska språket nöts in. I slutet av kapitlet används separationssatsen för slutna konvexa koner för att utreda frågan om arbitrage i samband med den så kallade binomialmodellen för en aktie och en obligation i ett tidssteg.

Alla vektorrum nedan är reella vektorrum. En delmängd A av ett vektorrum E sägs vara konvex, om sträckan som förbinder två godtyckliga punkter i mängden alltid ligger i mängden dvs om

$$x, y \in A \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A,\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

En funktion $f : A \to \mathbf{R}$ kallas konvex om A är konvex och

$$x, y \in A \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

En stokastisk variabel X med värden i ett vektorrum E sägs vara binomialfördelad om det existerar $a, b \in E$, $a \neq b$, och $p \in]0,1[$ så att

$$P[X = a] = p$$

och

$$P[X = b] = 1 - p.$$

Här definieras väntevärdet $E[X]$ av X genom att

$$E[X] = aP[X = a] + bP[X = b]$$

dvs

$$E[X] = pa + (1-p)b.$$

(Bokstaven E kommer här från engelskans ”expectation”.) Alltså gäller att

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

för varje konvex funktion definierad på E. Denna olikhet kallas Jensens olikhet.

En funktion f är konkav om $-f$ är konvex. En konvex funktion $f : E \to [0, \infty[$ sådan att $f(x) > 0$ om $x \neq 0$ sägs vara en norm på E om f är jämn dvs $f(-x) = f(x)$, $x \in E$, och positivt homogen av graden ett dvs $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $x \in E, \lambda \geq 0$. Om f är en norm skriver man ofta $f(x) = \| x \|$.

Ett vektorrum E och en norm $\| \, . \, \|$ på E bestämmer ett normerat rum som ibland skrivs $(E, \| \, . \, \|)$. Om $a \in E$ och $r > 0$ definieras

$$B(a; r) = \{x; \, x \in E \text{ och } \| x - a \| < r\} .$$

Mängden $B(a; r)$ kallas för en öppen boll med centrum a och radie r. En delmängd U av det normerade rummet E är öppen om det för varje $a \in U$ existerar $r > 0$ så att bollen $B(a; r)$ är en delmängd av U. En öppen boll är en öppen mängd. Unionen

$$A \cup B = \{x \in E; \, x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

av två öppna mängder A och B är öppen. Unionen av ett godtyckligt antal öppna mängder är också öppen. En delmängd F av det normerade rummet E kallas sluten om dess komplement

$$E \setminus F = \{x \in E; \, x \notin F\}$$

är en öppen mängd. Snittet

$$A \cap B = \{x \in E; \, x \in A \text{ och } x \in B\}$$

av två slutna mängder A och B är slutet. Detsamma gäller för snittet av ett godtyckligt antal slutna mängder. Snittet av alla slutna mängder som omfattar en given mängd A kallas för slutna höljet av A och betecknas med $\bar{A}$. Unionen av alla öppna delmängder av en given mängd A kallas för det inre av A och betecknas med A^o. En delmängd A av E sägs vara tät i E om

$$A \cap B(a; r) \neq \emptyset, \text{ alla } a \in E \text{ och } r > 0.$$

Här betecknar $\emptyset$ den tomma mängden. Det normerade rummet $(E , \| \, . \, \|)$ sägs vara separabelt om det finns en sekvens $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ av element i E sådan att $\{x_n; \, n \in \mathbf{N}\}$ är tät i E. En sekvens $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ i det normerade rummet E sägs vara konvergent om det finns ett $x \in E$ så att

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0.$$

Det kan finnas högst en sådan vektor x och vi skriver

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

En delmängd K av E är kompakt om varje sekvens $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ av element i K innehåller en delföljd $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ som konvergerar mot ett element i K. En sekvens $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i E sägs vara en Cauchyföljd om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $p \in \mathbf{N}$ sådant att

$$m, n > p \Rightarrow \| x_m - x_n \| < \varepsilon$$

En konvergent följd är en Cauchyföljd. Det normerade rummet (E , $\| \, . \, \|$) är ett Banachrum om varje Cauchyföljd i E är konvergent. Rummet $C([0,T])$ av alla reellvärda kontinuerliga funktioner definierade i det kompakta intervallet $[0,T]$ med normen

$$\| x \|_\infty = \max_{0\le t\le T} | x(t) |$$

är ett separabelt Banachrum. Konvergens i detta rum kallas med klassisk terminologi för likformig konvergens.

Om E är ett vektorrum definieras

$$E \times E = \{(x,y);\ x,y \in E\}.$$

En avbildning $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ kallas för en skalärprodukt i E om

(i) avbildningen $x \to \varphi(x,y)$ är linjär för alla $y \in E$

(ii) $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ för alla $x,y \in E$

(iii) $\varphi(x,x) \ge 0$ för alla $x \in E$ med likhet om och endast om $x = 0$.

Vi skriver i fortsättningen $\varphi(x,y) = (x,y)$ och

$$\| x \| = \sqrt{(x,x)}.$$

Här uppfattas $\| x - y \|$ som avståndet mellan x och y. Med denna beteckning får vi kvadratregeln

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2(x,y) + \| y \|^2$$

och parallellogramlagen

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 .$$

Om x och y råkar vara ortogonala dvs om $(x, y) = 0$ så ger kvadratregeln likheten

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 .$$

Denna relation brukar kallas Pythagoras sats. Vi påminner också om Cauchy-Schwarz olikhet

$$| (x, y) | \leq \| x \| \| y \|$$

som tillsammans med kvadratregeln ger triangelolikheten

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| .$$

Funktionen $\| . \|$ blir således en norm på E. Ett vektorrum E och en skalärprodukt på E kallas ett Hilbertrum om motsvarande normerade rum är ett Banachrum. Rummet $\mathbf{R}^n$ med skalärprodukten

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

är ett Hilbertrum. Bolzano-Weierstrass sats innebär att de slutna begränsade delmängderna av detta rum är kompakta. Rummet $l^2(\mathbf{N})$ bestående av alla sekvenser $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ i $\mathbf{R}$ sådana att

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty$$

är ett Hilbertrum med skalärprodukten

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n .$$

Den slutna enhetsbollen $\{x; \| x \| \leq 1\}$ i detta rum är inte kompakt.

I resten av detta kapitel betecknar H ett Hilbertrum.

Sats 1. (Närmaste punktegenskapen) *Antag att A är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av H och antag $x \in H$. Då finns en unik punkt $y \in A$ sådan att*

$$\inf_{z \in A} \| x - z \| = \| x - y \| .$$

Bevis. Antag
$$d = \inf_{z \in A} \| x - z \|$$
och låt $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vara en sekvens i A sådan att
$$\lim_{n \to \infty} \| x - z_n \| = d.$$
Parallellogramlagen ger nu likheten
$$2(\| x - z_m \|^2 + \| x - z_n \|^2) = 4 \| x - \frac{z_m + z_n}{2} \|^2 + \| z_n - z_m \|^2$$
och eftersom A är konvex följer att
$$\frac{z_m + z_n}{2} \in A.$$
Härav drar vi slutsatsen att
$$2(\| x - z_m \|^2 + \| x - z_n \|^2) \geq 4d^2 + \| z_n - z_m \|^2 .$$
Här är vänstra ledet godtyckligt nära $4d^2$ om m och n väljs tillräckligt stora varför sekvensen $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ är en Cauchyföljd. Denna är således konvergent eftersom H är ett Hilbertrum. Antag
$$\lim_{n \to \infty} z_n = y.$$
Då A är sluten gäller att $y \in A$ och vi får att
$$\inf_{z \in A} \| x - z \| = \| x - y \| .$$
För att utreda entydighetsfrågan antages att vektorn $y' \in A$ är sådan att
$$\inf_{z \in A} \| x - z \| = \| x - y' \| .$$
Relationen
$$4d^2 = 2(\| x - y \|^2 + \| x - y' \|^2)$$
och parallellogramlagen ger nu
$$4d^2 = 4 \| x - \frac{y + y'}{2} \|^2 + \| y' - y \|^2 .$$

Eftersom
$$\frac{y+y'}{2} \in A$$
följer att
$$4d^2 \geq 4d^2 + \parallel y' - y \parallel^2$$
dvs $y' = y$. Detta avslutar beviset för sats 1.

Vektorn y i sats 1 kallas för projektionen av x på A och betecknas med $P_A(x)$.

Sats 2. *Om A är en sluten, icke-tom och konvex delmängd av H och $z \in A$ gäller att*
$$(x - P_A(x), z - P_A(x)) \leq 0$$
för alla $x \in H$.

Bevis. Sätt $y = P_A(x)$. Om $0 < \lambda < 1$ gäller att
$$\parallel x - y \parallel^2 \leq \parallel x - ((1-\lambda)y + \lambda z) \parallel^2$$
dvs
$$\parallel x - y \parallel^2 \leq \parallel (x-y) - \lambda(z-y) \parallel^2$$
dvs
$$0 \leq -2\lambda(x-y, z-y) + \lambda^2 \parallel z - y \parallel^2 .$$
Genom att dividera denna olikhet med λ och sedan låta $\lambda \to 0$ erhålls
$$0 \leq -2(x-y, z-y).$$
Härav följer sats 2 omedelbart.

Om B är en delmängd av H så definieras
$$B^\perp = \{x \in H; y \in B \Rightarrow (x,y) = 0\}.$$
Mängden $B^\perp$ är ett slutet delrum av H. Notera också att
$$B \cap B^\perp \subseteq \{0\}$$

eftersom

$$(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Vidare gäller att

$$B \subseteq (B^{\perp})^{\perp}.$$

Sats 3. (Topologiskt komplement) *Antag F är ett slutet delrum av H. Varje $x \in H$ har en entydig representation*

$$x = y + z$$

där $y \in F$ och $z \in F^{\perp}$. Vidare gäller att

$$y = P_F(x)$$

och

$$z = P_{F^{\perp}}(x).$$

Bevis. Antag $x \in H$ har två framställningar

$$x = y_k + z_k,\ k = 0, 1,$$

där $y_{0,}\ y_1 \in F$ och $z_0,\ z_1 \in F^{\perp}$. Härav erhålls att

$$y_0 - y_1 = z_1 - z_0$$

där vänstra ledet tillhör F och högra ledet tillhör $F^{\perp}$. Eftersom $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ följer att $y_0 = y_1$ och $z_0 = z_1$.

För att utreda existensfrågan noterar vi att

$$(x - P_F(x), u - P_F(x)) \leq 0$$

för varje $u \in F$ enligt sats 2. Genom att ersätta u med $\pm u + P_F(x)$ erhålls att $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. Alltså gäller att

$$x = P_F(x) + v$$

där $v \in F^{\perp}$. Eftersom

$$x = v + P_F(x)$$

och

$$F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$$

så följer också (genom att ersätta F med $F^{\perp}$ i ovanstående resonemang) att

$$v = P_{F^{\perp}}(x).$$

Detta avslutar beviset för sats 3.

Följande så kallade separationssats för slutna konvexa mängder har flera tillämpningar inom denna kurs.

Sats 4. (Separationssatsen för slutna konvexa mängder) *Antag A är en sluten, icke-tom och konvex mängd av H och antag $x_0 \notin A$. Då finns en vektor $a \in H$ och $\alpha \in \mathbf{R}$ så att*

$$(a, x_0) < \alpha \leq (a, x)$$

för alla $x \in A$.

Bevis. Sätt

$$x_1 = P_A(x_0)$$

så att

$$(x_0 - x_1, x - x_1) \leq 0,\ x \in A.$$

Vi definierar nu $a = x_1 - x_0$ och får

$$(a, x_1) \leq (a, x),\ x \in A.$$

Vidare gäller att

$$(a, x_0) < (a, x_1)$$

eftersom $a \neq 0$. Vi kan därför definiera $\alpha = (a, x_1)$ och sats 4 följer direkt.

En icke-tom delmängd C av H sägs vara en konvex kon om C är konvex och

$$x \in C \Rightarrow \lambda x \in C$$

för alla $\lambda \geq 0$. Separationssatsen för slutna konvexa koner får följande form.

Sats 5. (Separationssatsen för slutna konvexa koner) *Antag C är en sluten konvex kon och antag $x_0 \notin C$. Då finns $a \in H$ så att*

$$(a, x_0) < 0$$

och

$$(a, x) \geq 0$$

för alla $x \in C$.

Bevis. Vi använder sats 4 med $A = C$ och får $a \in H$ och $\alpha \in \mathbf{R}$ så att

$$(a, x_0) < \alpha \leq (a, x)$$

för alla $x \in C$. Eftersom $0 \in C$ måste α vara icke-positivt. Om $x \in C$ gäller att $\lambda x \in C$ för alla $\lambda > 0$ och vi drar slutsatsen att $(a, x) = \lambda^{-1}(a, \lambda x) \geq \lambda^{-1}\alpha$ där högra ledet konvergerar mot 0 då $\lambda \to \infty$. Härav följer omedelbart sats 5.

Antag $a_1, ..., a_n$ är en uppsättning vektorer i H. Dessa sägs vara positivt linjärt oberoende om

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

för alla $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$. Om vektorerna $e, f \in H$ är ortogonala och nollskilda så är exempelvis uppsättningen $e, f, e + f$ positivt linjärt oberoende.

Om $a_1, ..., a_n \in H$ så betecknar $C(a_1, ..., a_n)$ den minsta konvexa kon som innehåller $a_1, ..., a_n$ dvs

$$C(a_1, ..., a_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k ; \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0 \right\}.$$

Sats 6. *Den konvexa konen $C(a_1, ..., a_n)$ är sluten.*

Bevis. Antag först att vektorerna $a_1, ..., a_n$ är positivt linjärt oberoende. Låt x tillhöra slutna höljet av $C(a_1, ..., a_n)$ och antag $x_j \in C(a_1, ..., a_n)$, $j \in \mathbf{N}$ och

$$\lim_{j \to \infty} x_j = x.$$

Skriv

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} a_k.$$

Vi påstår att

$$\sup_{j,k} \lambda_{jk} < \infty.$$

I motsatt fall finns $k_0 \in \{1, ..., n\}$ och en växande följd $(j_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ av naturliga tal så att

$$\max_{k=1,...,n} \lambda_{j_v k} = \lambda_{j_v k_0} > 0$$

och $\lambda_{j_\nu k_0} \to \infty$, då $\nu \to \infty$. Härav följer att

$$\frac{x_{j_\nu}}{\lambda_{j_\nu k_0}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{j_\nu k}}{\lambda_{j_\nu k_0}} a_k.$$

Genom att utnyttja Bolzano-Weierstrass sats kan vi efter eventuell omnumrering antaga att varje sekvens

$$\frac{\lambda_{j_\nu k}}{\lambda_{j_\nu k_0}},\ \nu \in \mathbf{N}$$

konvergerar mot ett visst icke-negativt tal μ_k för $k = 1, ..., n$. Härav erhålls att

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k = 0.$$

Eftersom $\mu_{k_0} = 1$ och vektorerna $a_1, ..., a_n$ är positivt linjärt oberoende har vi fått en motsägelse. Alltså gäller att

$$\sup_{j,k} \lambda_{jk} < \infty$$

och genom att utnyttja Bolzano-Weierstrass sats och relationen

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} a_k$$

så följer att x tillhör $C(a_1,...,a_n)$.

Det är nu lätt att avsluta beviset för sats 6. Antag nämligen att $x \in C(a_1,...,a_n)$ och låt

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{k_i}$$

där $\lambda_1,...,\lambda_m > 0$. Vi säger att denna representation är minimal om m ej kan göras mindre i denna typ av representation av vektorn x. Antag representationen är minimal. Vi påstår att vektorerna a_{k_i}, $i = 1,...,m$, är positivt linjärt oberoende. I annat fall finns icke-negativa tal μ_i, $i = 1,...,m$, ej alla lika med noll sådana att

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i a_{k_i} = 0.$$

Härav erhålls att

$$x = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - t\mu_i) a_{k_i}$$

där $t > 0$ väljes så att $(\lambda_i - t\mu_i) \geq 0$, $i = 1,...,m$, och så att likhet inträffar för något index i. Detta visar emellertid att vår tidigare representation av x ej är minimal och av denna motsägelse drar vi slutsatsen att vektorerna a_{k_i}, $i = 1,...,m$, är positivt linjärt oberoende. Således gäller att

$$C(a_1,...,a_n) = \bigcup \left[C(a_{k_1},...,a_{k_m});\ a_{k_1},...,a_{k_m}\ \text{positivt linjärt oberoende} \right].$$

Den första delen av beviset visar nu resultatet eftersom en ändlig union av slutna mängder är sluten.

Om $x = (x_1,...,x_n)$ är en vektor i $\mathbf{R}^n$ och $x_1 \geq 0,...,x_n \geq 0$ skriver vi i fortsättningen ofta $x \geq 0$. Vektorn x uppfattas här ofta som en kolonnmatris. Transponatet av en matris A becknas med A^*. Den vanliga skalärprodukten av två vektorer x och y i $\mathbf{R}^n$ kan därför skrivas x^*y.

Sats 7. (Farkas lemma) *Antag $A=(a_{jk})_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n}$ är en matris med reella element och antag $b \in \mathbf{R}^m$. Låt vidare a_k, k=1,...,n, beteckna matrisens kolonner. Då gäller exakt ett av följande alternativ:*

(i) ekvationen

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

är lösbar

(ii) det finns ett $h \in \mathbf{R}^m$ *så att*

$$\begin{cases} h^* b < 0 \\ h^* a_k \geq 0, \ k = 1, ..., n. \end{cases}$$

Bevis. Alternativet (i) gäller om och endast om $b \in C(a_1, ..., a_n)$ och beroende på separationssatsen för slutna konvexa koner så gäller alternativet (ii) om och endast om $b \notin C(a_1, ..., a_n)$. Detta bevisar sats 7.

Exempel 1. Betrakta en matematisk modell för en kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $S(t)$ vid tiden t och en obligation med priset $B(t)$ vid tiden t. Vi antager att tidsvariabeln t endast kan anta två värden, nämligen 0 eller 1. Låt

$$B(1) = B(0)e^r$$

där $r > 0$ och låt

$$S(1) = S(0)e^X.$$

Vi antager här att X är en reellvärd binomialfördelad stokastisk variabel och att det går att välja $u, d \in \mathbf{R}$, som uppfyller $u > d$, så att händelsen

$$[X \neq u \text{ och } X \neq d] = \{X \notin \{u, d\}\}$$

aldrig inträffar (dvs är en tom mängd). Speciellt följer att

$$P[X = u] + P[X = d] = 1$$

där varje term i vänster led är positiv. Denna enkla modell kallas binomialmodellen för en aktie och en obligation i ett tidssteg. Vi skall avgöra under vilka villkor på parametrarna som denna modell är arbitragefri.

Betrakta en portfölj bestående av h_S aktier och h_B obligationer. Dess värde vid tiden t ges av

$$v(t) = h_S S(t) + h_B B(t).$$

Arbitrage uppstår om och endast om portföljen kan väljas så att

$$v(0) = 0 \text{ och } v(1) > 0.$$

Genom att variera antalet obligationer i portföljen inses att arbitrage uppstår om och endast om portföljen kan väljas så att

$$v(0) < 0 \text{ och } v(1) \geq 0.$$

Utskrivet mer explicit innebär detta att

$$h_S S(0) + h_B B(0) < 0$$

och

$$\begin{cases} h_S S(0)e^u + h_B B(0)e^r \geq 0 \\ h_S S(0)e^d + h_B B(0)e^r \geq 0 \end{cases}$$

vilket med tanke på Farkas lemma innebär att modellen är arbitragefri om och endast om det existerar reella tal $x, y \geq 0$ sådana att

$$\begin{cases} S(0)e^u x + S(0)e^d y = S(0) \\ B(0)e^r x + B(0)e^r y = B(0). \end{cases}$$

Detta ekvationssystem har lösningen

$$\begin{cases} x = e^{-r}\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} \\ y = e^{-r}\frac{e^u - e^r}{e^u - e^d} \end{cases}$$

och vi ser att $x, y \geq 0$ precis då

$$d \leq r \leq u.$$

Binomialmodellen dominerar flera nya böcker inom teorin för finansiella derivat (se t ex [$J1$] och [JT]). Vi har även här valt att låta denna modell spela en mycket central roll.

Övningar

I nedanstående övningar i detta kapitel antags att dominansprincipen gäller.

1. Visa att funktionen
$$K \to c(t, S(t), K)$$
är konvex.

2. Visa att funktionen
$$K \to p(t, S(t), K)$$
är konvex.

3. Visa att funktionen $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ är konvex om $f'' \geq 0$.

4. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$. Visa att en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $f : U \to \mathbf{R}$ är konvex om Hessematrisen
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)\right)_{1 \leq j,k \leq n}$$
är positivt semidefinit i varje punkt $x \in U$.

5. Visa att maximum två konvexa funktioner med samma definitionsmängd är konvex.

6. Visa att öppna bollar är konvexa.

7. Låt A vara en konvex delmängd av ett vektorrum. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in A$$
för alla $x_1, ..., x_n \in A$ och alla $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0, 1]$ som uppfyller
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

8. Funktionen $f : A \to \mathbf{R}$ är konvex. Visa att
$$f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$
för alla $x_1, ..., x_n \in A$ och alla $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0, 1]$ som uppfyller
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

9. Låt $x_1, ...x_n > 0$ och antag $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ uppfyller
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$
Visa att
$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$
Notera specialfallet
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

10. Antag $t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ och låt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ uppfylla
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$
Betrakta två aktiederivat av europeisk typ som utbetalar
$$X = \max(0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S(t_i) - K)$$
resp
$$Y = \max(0, \prod_{i=1}^{n} S(t_i)^{\lambda_i} - K)$$
vid tiden T där $K > 0$. Låt $t < T$. Visa att det första derivatets värde vid tiden t ej kan understiga det andra derivatets värde vid tiden t.

11. Låt A vara en delmängd av ett normerat rum. Visa att $x \in \bar{A}$ om och endast om det existerar en följd $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ av element i A som konvergerar mot x.

12. Låt $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vara en följd i ett Banachrum sådan att
$$\sum_{n=0}^{\infty} \| x_n \| < \infty.$$
Visa att serien
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$
är konvergent.

13. Antag $(E, \| \ . \ \|_E)$ och $(F, \| \ . \ \|_F)$ är normerade rum. En funktion $f : E \to F$ sägs vara kontinuerlig om det för varje $a \in E$ och $\varepsilon > 0$ existerar $\delta > 0$ så att

$$\| x - a \|_E < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(a) \|_F < \varepsilon.$$

a) Visa att avbildningen $x \to \| x \|_E$ är kontinuerlig.

b) Antag $\lambda \in \mathbf{R}$. Visa att mängden

$$\{x \in E; \ f(x) > \lambda\}$$

är öppen om $f : E \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig.

14. Antag F är ett Banachrum med normen $\| \ . \ \|_F$. Låt vidare E_1 vara ett tätt delrum av ett normerat rum E med normen $\| \ . \ \|_E$ och antag att funktionen $f : E_1 \to F$ är likformigt kontinuerlig (dvs till varje $\varepsilon > 0$ existerar $\delta > 0$ så att $\| x - y \|_E < \varepsilon \Rightarrow \| f(x) - f(y) \|_F < \delta$ så snart $x, y \in E_1$). Visa att det finns en likformigt kontinuerlig funktion $g : E \to F$ sådan att $g(x) = f(x)$, $x \in E_1$.

15. Visa att

$$F = (F^{\perp})^{\perp}$$

om F är ett slutet delrum av H.

16. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och $f : U \to \mathbf{R}$ en konvex funktion. Visa att f är uppåt begränsad på varje sluten begränsad delmängd K av U.

17. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och $f : U \to \mathbf{R}$ en konvex funktion. Visa att f är kontinuerlig.

18. Låt U vara en öppen konvex delmängd av $\mathbf{R}^n$ och $f : U \to \mathbf{R}$ en konvex funktion. Visa att det till varje $a \in U$ finns en vektor $c \in \mathbf{R}^n$ så att

$$f(x) \geq f(a) + c^*(x - a), \ x \in U.$$

19. Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig och funktionen $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är konvex. Visa att

$$\varphi(\int_0^1 f(x)dx) \leq \int_0^1 \varphi(f(x))dx.$$

20. Antag $f : \mathbf{R} \to]0,\infty[$. Visa att funktionen $\ln f$ är konvex om och endast om funktionen

$$e^{ax} f(x),\ x \in \mathbf{R}$$

är konvex för alla $a \in \mathbf{R}$.

21. Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är konvex. Visa att funktionen

$$g(x,y) = yf(\frac{x}{y}),\ x \in \mathbf{R}, y > 0$$

är konvex.