8. Utdelningsprocesser

Antag att en aktie med priset $S(t)$ vid tiden t utdelar beloppet $D > 0$ vid tiden t_*+ dvs omedelbart efter tidpunkten t_*. Det är då naturligt att antaga att

$$S(t_*) - S(t_*+) = D$$

vilket i så fall innebär att trajektorian $S(t), t \geq 0$, är diskontinuerlig i punkten t_*. Aktiepriset kan därför inte längre beskrivas av en geometrisk Brownsk rörelse och den modell för optionsvärdering som vi behandlat i föregående kapitel måste förkastas. Det är för övrigt inte självklart att ett aktiepris gör ett språng av exakt samma storlek som utdelningen då utdelningen frånskiljs aktien (se Heath och Jarrow $[HJ]$) men vi kommer nedan genomgående att förutsätta detta.

Det finns många typer av utdelning. En aktie kan t ex utdela ett fixt belopp eller andra värdepapper. I samband med en aktieoption behöver utdelningarna i den underliggande aktien under optionens resterande livstid inte heller vara kända och kan då uppfattas som stokastiska storheter. I samband med främmande marknader uppstår också naturligt så kallad kontinuerlig utdelning. Syftet med detta avsnitt är endast att uppmärksamma fenomenet utdelning och vi går inte särskilt grundligt fram.

Den enklaste typen av utdelning är procentuell utdelning och vi startar med detta fall. Vi antar alltså först att aktien utdelar beloppet

$$D = \delta S(t_*)$$

vid tiden t_*+ där δ är ett i förväg känt tal i intervallet $]0, 1[$. Under perioden fram t o m tiden t_* förutsätter vi att aktiepriset beskriver en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift och volatiliteten σ och efter utdelningen vid tiden t_*+ förutsättes analogt att aktiepriset beskriver en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift och volatiliten σ. Dessutom förutsätts, som vi redan sagt, att $S(t_*) - S(t_*+) = \delta S(t_*)$.

Betrakta nu ett enkelt europeiskt derivat i aktien med utbetalningsfunktionen $f \in \mathcal{P}$ och slutdagen $T > t_*$. Vi vill bestämma dess teoretiska värde $v(t, S(t))$ vid tiden $t \leq T$. Som vanligt antager vi konstant ränta r. Om $s = S(t)$ får vi naturligtvis att $v(t, s) = e^{-r\tau} E\left[f(se^{r\tau} M_\sigma(\tau))\right]$ i tidsintervallet $t_* < t \leq T$, enligt tidigare teorier. Antag nu $t < t_*$ och betrakta följande tabell.

tid	t	t_*	t_*+	T
handling	köp $(1-\delta)$ aktier	sälj $(1-\delta)$ aktier	köp 1 aktie	sälj 1 aktie
kassa- flöde	$-\ (1-\delta)s$	$(1-\delta)S(t_*)$	$-S(t_*+)$	$S(T)$

Tabellen definierar en strategi där portföljen har begynnelsevärdet $(1-\delta)s$ och slutvärdet $S(T)$. I tidsintervallet $]t, T]$ finansieras nya köp med försäljningar från portföljen. Dessutom beskrivs portföljvärdet av en geometrisk Brownsk rörelse med volatiliteten σ. Det är därför naturligt att definiera

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[f((1-\delta)se^{r\tau} M_\sigma(\tau))\right],\ t \le t_*.$$

Speciellt följer att

$$v(t_*, s) = v(t_*+, (1-\delta)s)$$

och optionspriset $v(t, S(t))$ blir en kontinuerlig funktion av tiden t.

Man kan göra ovanstående definition ännu tydligare genom att gå tillbaka till binomialmodellen. Betrakta därför inledningsvis en matematisk modell för en kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $S(t)$ vid tiden t och en obligation med priset $B(t)$ vid tiden t där tidsvariabeln $t = 0$ eller 1. Låt

$$B(1) = B(0)e^r.$$

Vi förutsätter nu att aktieägaren vid tiden 0+ (dvs omedelbart efter klockslaget 0) erhåller utdelningen D, där

$$D = \delta S(0)$$

och δ är ett i förväg givet tal i intervallet $]0, 1[$. Vi antager också att

$$S(1) = (S(0) - D)e^X$$

där X är en binomialfördelad stokastisk variabel sådan att $X^{-1}(\{u, d\}) = \Omega$ och $u > d$. Vi visar först att denna modell är arbitragefri om och endast om $u \ge r \ge d$ (vilket också är villkoret för arbitragefrihet när aktien inte ger utdelning).

Betrakta därför en portfölj bestående av h_S aktier och h_B obligationer. Dess värde vid tiden t ges av $v(t) = h_S S(t) + h_B B(t)$. Arbitrage uppstår om och endast om $v(0) < 0$ och $v(1) \geq 0$. Utskrivet mer explicit innebär detta att

$$h_S S(0) + h_B B(0) < 0$$

och

$$\begin{cases} h_S \left\{(S(0) - D)e^u + De^r\right\} + h_B B(0)e^r \geq 0 \\ h_S \left\{(S(0) - D)e^d + De^r\right\} + h_B B(0)e^r \geq 0 \end{cases}$$

vilket med tanke på Farkas lemma innebär att modellen är arbitragefri precis då det existerar $x, y \geq 0$ sådana att

$$\begin{cases} ((S(0) - D)e^u + De^r)x + ((S(0) - D)e^d + De^r)y = S(0) \\ B(0)e^r x + B(0)e^r y = B(0). \end{cases}$$

dvs

$$\begin{cases} \left\{(1 - \delta)e^u + \delta e^r\right\} x + \left\{(1 - \delta)e^d + \delta e^r\right\} y = 1 \\ e^r x + e^r y = 1. \end{cases}$$

Vi löser detta ekvationssystem med Gausselimination och får

$$\begin{cases} x = e^{-r} \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}, \\ y = e^{-r} \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}. \end{cases}$$

Som synes är $x, y \geq 0$ om och endast om $u \geq r \geq d$, vilket är villkoret för arbitragefrihet.

Kapitalmarknaden utvidgas nu genom att vi tillför ett aktiederivat som utbetalar beloppet $f(S(1))$ vid tiden $t = 1$. Vi skall bestämma derivatets värde vid tiden $t = 0$. Betrakta därför en portfölj bestående av h_S aktier och h_B obligationer. Dess värde vid tiden t ges av $v(t) = h_S S(t) + h_B B(t)$. Om vi kan bestämma h_S och h_B så att $v(1) = f(S(1))$ så definieras därefter derivatets teoretiska värde lika med $v(0)$. Ekvationen $v(1) = f(S(1))$ ger om aktien går upp vid tiden $t = 1$ att

$$h_S((S(0) - D)e^u + De^r) + h_B B(0)e^r = f((S(0) - D)e^u)$$

och om aktien går ned vid tiden $t = 1$ att

$$h_S((S(0) - D)e^d + De^r) + h_B B(0)e^r = f((S(0) - D)e^d).$$

En kalkyl medför nu att

$$h_S S(0) = \frac{1}{1 - \delta} \frac{f((1 - \delta)S(0)e^u) - f((1 - \delta)S(0)e^d)}{e^u - e^d}$$

och

$$h_B B(0) = \frac{e^{-r}}{1-\delta}\times$$

$$\frac{((1-\delta)e^u + \delta e^r)f((1-\delta)S(0)e^d) - ((1-\delta)e^d + \delta e^r)f((1-\delta)S(0)e^u)}{e^u - e^d}.$$

Härav följer att

$$v(0) = e^{-r}\left[pf((1-\delta)S(0)e^u) + qf((1-\delta)S(0)e^d)\right]$$

där

$$p = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} \text{ och } q = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}.$$

Detta resultat kan nu utnyttjas för en kapitalmarknad i kontinuerlig tid.

Betrakta nu återigen en aktie i kontinuerlig tid med priset $S(t)$ vid tiden t och antag en obligation har priset $B(t) = e^{-r\tau}$vid tiden t där $\tau = T - t$. Vi antar som ovan att aktien utdelar beloppet $D = \delta S(t_*)$ vid tiden t_*+ där δ är ett i förväg känt tal i intervallet $]0,1[$. Under perioden fram t o m tiden t_* förutsätter vi att aktiepriset beskriver en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift och volatiliteten σ och efter utdelningen vid tiden t_*+ förutsättes analogt att aktiepriset beskriver en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift och volatiliten σ. Dessutom antar vi att $S(t_*) - S(t_*+) = \delta S(t_*)$.

Antag nu att ett enkelt europeiskt derivat i aktien med utbetalningsfunktionen $f \in \mathcal{P}$ och slutdagen $T > t_*$ har det teoretiska värdet $v(t,s)$ vid tiden t, där $s = S(t)$. Binomialapproximation som i föregående avsnitt leder enligt ovan till ekvationen

$$v(t_*, s) =$$

$$e^{-rh}(pv(t_* + h, (1-\delta)se^{\alpha h + \sigma\sqrt{h}}) + qv(t_* + h, (1-\delta)se^{\alpha h - \sigma\sqrt{h}})$$

där $v = v_N$,

$$p = \frac{e^{rh} - e^{\alpha h - \sigma\sqrt{h}}}{e^{\alpha h + \sigma\sqrt{h}} - e^{\alpha h - \sigma\sqrt{h}}}$$

och $q = 1 - p$. Här är α lika med driftskoefficienten för aktiens log-pris efter utdelningen. När $N \to \infty$ erhålls under lämpliga förutsättningar ekvationen

$$v(t_*, s) = v(t_*+, (1-\delta)s).$$

Denna ekvation motiverar ännu en gång att

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[f((1-\delta)se^{r\tau}M_\sigma(\tau))\right],\ t \leq t_*.$$

För en aktieindexoption kan det underliggande indexet definieras av ett 25-tal aktier och följande resultat kan då i princip användas. Situationen förenklas dock om det finns en aktieindextermin på marknaden (se övning 1 i detta kapitel).

Sats 1. *Antag $\delta_n \in \left]0,1\right[$, $n = 0,1,...,N$, är givna tal. En aktie utdelar $\delta_n S(t_n)$ vid tiden t_n+, där $n = 0,1,...,N$, och $t_0 < t_1 < ... < t_N < T$. Före första utdelningen, mellan påföljande utdelningar och efter sista utdelningen antages aktiepriset beskriva en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift där volatiliteten i varje period är lika med σ.*

Ett enkelt europeiskt derivat i aktien med utbetalningsfunktionen $f \in \mathcal{P}$ och slutdagen T har värdet $v(t,S(t))$ vid tiden $t \leq t_0$ där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[f(\left\{\prod_{n=0}^{N}(1-\delta_n)\right\} se^{r\tau}M_\sigma(\tau))\right].$$

I nästa steg behandlar vi kontinuerlig utdelning. Antag $\delta > 0$ är ett givet tal och att en aktie utdelar beloppet $\delta S(t)dt$ i intervallet $]t, t+dt]$ för varje t. Aktiepriset antages beskriva en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift där volativiteten är lika med σ. Betrakta nu ett enkelt europeiskt derivat med utbetalningsfunktionen $f \in \mathcal{P}$ och slutdagen T. Beroende på sats 1 definieras det teoretiska värdet $v(t,S(t))$ vid tiden $t \leq T$, av ekvationen

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[f(se^{(r-\delta)\tau}M_\sigma(\tau))\right]$$

där $s = S(t)$.

Resultaten ovan går (i kontinuerlig tid) tillbaka till Mertons arbete $[MER2]$.

Det antages ofta att valutakurser beskrivs av geometriska Brownska rörelser med exponentiell drift (se referenser i tex $[CR]$ och $[GEM]$). Ovanstående formel kan under detta antagande också användas på valutaoptioner där δ är den utländska räntan och r den inhemska räntan samt $S(t)$ är priset för en enhet av den utländska valutan i inhemsk valuta. För en köpoption av europeisk typ med lösenpriset K vid tiden T får vi därför för $t < T$ prisformeln

$$c_{valuta}(t,s,K) = se^{-\delta\tau}\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och

$$d_2 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

(se Garman och Kohlhagen [GK]).

Ett aktiebolag utdelar ofta ett i förväg bestämt belopp D per aktie vid en given tidpunkt. Samtidigt är sannolikheten positiv för att en geometrisk Brownsk rörelse vid en föreskriven tidpunkt är strikt mindre än D. Denna svårighet kan praktiskt elimineras på följande sätt.

Antag utdelningen frånskiljs aktien vid tiden t_*+. Det är då vanligt att antaga att

$$S(t) = De^{r(t-t_*)}1_{[0,t_*]}(t) + \tilde{S}(t), \ t \geq 0$$

där $\tilde{S}(t)$, $t \geq 0$, betecknar en geometrisk Brownsk rörelse med volatiliteten σ. Här kallas $\tilde{S}(t)$ för den volatila delen av aktiepriset och $De^{r(t-t_*)}1_{[0,t_*]}(t)$ kallas (något oegentligt) för nuvärdet av framtida utdelningar. Observera att detta värde är noll för $t > t_*$ (man kan lätt generalisera modellen till fler än maximalt en framtida utdelning). Betrakta nu enkelt europeiskt derivat i aktien med utbetalningsfunktionen $f \in \mathcal{P}$ och slutdagen $T > t_*$. Vi vill bestämma dess teoretiska värde $v(t, S(t))$ vid tiden $t \leq T$. Som vanligt sätter vi $s = S(t)$ och antager för enkelhetens skull att obligationen har värdet 1 vid tiden t_*. Om optionen utfärdas vid tiden 0 kräver denna modellering naturligtvis att

$$S(0) < De^{-rt_*}$$

vilket torde vara uppfyllt i förekommande fall. Betrakta nu följande tabell.

tid	t	t_*	t_*+	T
handling	köp 1 aktie sälj D obligationer	sälj 1 aktie köp D obligationer	köp 1 aktie	sälj 1 aktie
kassa- flöde	$-\,(s - De^{r(t-t_*)})$	$S(t_*) - D$	$-S(t_*+)$	$S(T)$

Vi leds nu på samma sätt som vid procentuell utdelning till följande definition av det teoretiska optionspriset vid tiden t, nämligen

$$v(t, s) = e^{-r\tau}E\left[f(\tilde{s}e^{r\tau}M_\sigma(\tau))\right], \ t \leq t_*$$

där

$$\tilde{s} = s - De^{r(t-t_*)}.$$

Om vi vill utnyttja binomialmetoden för att finna en god prisapproximation vid tiden t definieras $h = \tau/N$,

$$t_n = t + nh,\ n = 0, 1, ..., N.$$

och

$$v_j^N = f(\tilde{s}e^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}),\ j = 0, 1, ..., N\,.$$

Därefter beräknas successivt för tidpunkterna $t_n, n = N-1, N-2, ..., 2, 1, 0,$ motsvarande optionspriser

$$v_j^n = e^{-rh}(pv_j^{n+1} + qv_{j+1}^{n+1})$$

där

$$p = 1 - q = \frac{e^{rh} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\alpha h+\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}.$$

Storheten v_0^0 approximerar det sökta optionsvärdet.

Vid motsvarande amerikanska kontrakt är det lämpligt att sätta upp ett träd för den volatila delen av aktiepriset och därefter till detta addera nuvärdet av framtida utdelningar (se t ex $[H]$). Vi antager därför att

$$t_{n_*} \leq t_* < t_{n_*+1}$$

och definierar

$$f_j^n = \begin{cases} f(\tilde{s}e^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}} + De^{r(t_n-t_*)}) \text{ om } t_n \leq t_* \\ f(\tilde{s}e^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}}) \text{ om } t_n > t_*\,. \end{cases}.$$

Låt vidare $v_j^N = f(s_0e^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}),\ j = 0, 1, ..., N\,.$ Därefter beräknas successivt för tidpunkterna $t_n, n = N-1, N-2, ..., 2, 1, 0,$ motsvarande optionspriser

$$v_j^n = \max(f_j^n, e^{-rh}(pv_j^{n+1} + qv_{j+1}^{n+1})).$$

Storheten v_0^0 approximerar det sökta optionsvärdet.

Övningar

1. Antag $\delta_n \in \,]0,1[\,, n = 0,1,...,N$. En aktie utdelar $\delta_n S(t_n)$ vid tiden t_n+, där $n = 0,1,...,N$, och $t_0 < t_1 < ... < t_N < T$. Före första utdelningen, mellan påföljande utdelningar och efter sista utdelningen antages aktiepriset beskriva en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift där volatiliteten i varje period är lika med σ. Visa att ett enkelt europeiskt derivat i aktien med utbetalningsfunktionen $f \in \mathcal{P}$ och slutdagen T har värdet $v(t, S^T_{term}(t))$ vid tiden $t \leq t_0$ där

$$v(t, s_{term}) = e^{-r\tau} E\left[f(s_{term} M_\sigma(\tau))\right].$$

2. Betrakta binomialmodellen i ett tidssteg och ett amerikanskt kontrakt som kan lösas in vid en godtycklig tidpunkt $t \in \{0,1\}$ och då utbetalar värdet $f(S(t))$ till innehavaren. Antag aktien utdelar beloppet $D = \delta S(0)$ vid tiden $t = 0+$. Vad är villkoret för att kontraktet löses vid tiden 0? Diskutera speciellt fallet $f(s) = \max(0, s-K)$ där K är ett givet positivt tal. Försök diskutera motsvarande situation i kontinuerlig tid.

3. En konvertibel kan bytas mot en aktie vid varje tidpunkt $t \in [0,T[$. Om byte till aktie ej skett vid tidpunkten T inlöses konvertibeln mot att innehavaren erhåller beloppet K. Bestäm konvertibelns värde tiden $t < T$ då aktien ger utdelningen D vid tiden $t_* \in \,]t,T[$.