MATEMATIK OCH OPTIONER (CTH[$TMA861$],GU[$MAN690$])

Skrivningsdag: 8 maj 1999, kl $8^{45}-13^{45}$ *Lokal*: mg *Hjälpmedel:* Beta
Telefonvakt: Christer Borell, tel. 330 19 59 *OBS:* Text på 2 sidor

---

Nedan betecknar $(W(t))_{t\geq 0}$ en normaliserad reellvärd Wienerprocess. I uppgifterna 3 och 6 förutsätts Black-Scholes modell. Aktiens pris $S(t)$ vid tiden $t\geq 0$ ges av ekvationen $S(t)=S(0)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t)}$, där $\mu\in\mathbf{R}$ och där σ och $S(0)$ är positiva konstaner. Obligationens pris $B(t)$ vid tiden $t\geq 0$ är lika med $B(0)e^{rt}$, där $B(0)$ och r är en positiva konstanter.

1. (3p) Betrakta den stokastiska differentialekvation
$$dX(t)=-\frac{1}{2}X(t)dt+tdW(t),\ t\geq 0$$
med begynnelsevärdet $X(0)=0$. Beräkna $E\left[X^2(t)\right]$.

2. (3p) Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u>r>0$, $d=-u$ och $t\in\{0,1,2\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet $\max(S(0),S(1),S(2))$. Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

3. (3p) Låt $t<T<T_1$ och $K>0$. Ett finansiellt derivat ger innehavaren rättigheten, men ej skyldigheten, att vid tiden T byta en europeisk säljoption i aktien med slutdagen T_1 och lösenpriset K mot en europeisk köpoption i aktien med slutdagen T_1 och lösenpriset K. Bestäm derivatets värde vid tiden t.

4. (4p) Antag $u(t,x)=x^4+7x^3-6tx^2-21tx+3t^2$, $t\geq 0$, $x\in\mathbf{R}$. Visa att processen $(u(t,W(t)))_{t\geq 0}$ är en Wienermartingal. (Ledning: Använd Itôs lemma.)

5. (3p) Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation då parametrarna uppfyller $u\geq r\geq d$, $r>0$ och $t\in\{0,1\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet $f(S(1))$ vid tiden 1, där f är en reellvärd funktion med definitionsmängden $\left\{S(0)e^u,S(0)e^d\right\}$. Definiera derivatets teoretiska pris vid tiden 0 . Motivera definitionen!

6. (3p) Ett enkelt europeiskt derivat i aktien med utbetalningsfunktionen $f \in \mathcal{P}$ och slutdagen $T > 0$ har värdet $v(t, S(t))$ vid tiden $t \in [0, T[$ där
$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[f(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right]$$
och $\tau = T - t$. Visa med hjälp härav att en europeisk köpoption i aktien med slutdagen T och lösenpriset K har värdet $c(t, S(t), K)$ vid tiden $t \in [0, T[$, där $c(t,s,K) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$,
$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$
och $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$.

7. a) (1p) Definiera begreppet reellvärd Gaussisk process. b) (2p) Antag $(X_t)_{t \in \{0,1\}}$ är en reellvärd Gaussisk process. Visa att X_0 och X_1 är stokastiskt oberoende om och endast om
$$\mathrm{Cov}(X_0, X_1) = 0.$$

8. a) (2p) Antag funktionen f är kvadratiskt integrerbar i intervallet $[0, T]$ dvs $f \in L^2(m_{[0,T]})$. Definiera Paley-Wiener-Zygmunds stokastiska integral
$$\int_0^T f(t)dW(t)$$
och visa att
$$\int_0^T f(t)dW(t) \in N(0, \int_0^T f^2(t)dt).$$
b) (1p) Visa att
$$E\left[\int_0^T f(t)dW(t) \int_0^T g(t)dW(t)\right] = \int_0^T f(t)g(t)dt$$
om $f, g \in L^2(m_{[0,T]})$.