LÖSNINGAR
MATEMATIK OCH OPTIONER (CTH[$TMA861$],GU[$MAN690$])

Skrivningsdag: 8 maj 1999, kl $8^{45} - 13^{45}$

– –

1. Betrakta den stokastiska differentialekvation

$$dX(t) = -\frac{1}{2}X(t)dt + tdW(t),\ t \geq 0$$

med begynnelsevärdet $X(0) = 0$. Beräkna $E\left[X^2(t)\right]$.

Lösning. Ekvationen

$$dX(t) + \frac{1}{2}X(t)dt = tdW(t)$$

ger

$$d(e^{\frac{t}{2}}X(t)) = te^{\frac{t}{2}}dW(t)$$

och därmed

$$e^{\frac{t}{2}}X(t) = \int_0^t \lambda e^{\frac{\lambda}{2}}dW(\lambda)$$

eftersom $X(0) = 0$. Härav följer att

$$X(t) = \int_0^t \lambda e^{\frac{\lambda - t}{2}}dW(\lambda)$$

och

$$E\left[X^2(t)\right] = \int_0^t (\lambda e^{\frac{\lambda-t}{2}})^2 d\lambda =$$

$$e^{-t}\int_0^t \lambda^2 e^{\lambda}d\lambda = e^{-t}\left[e^{\lambda}(\lambda^2 - 2\lambda + 2)\right]_0^t =$$

$$t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t} \leftarrow SVAR$$

2. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > r > 0$, $d = -u$ och $t \in \{0, 1, 2\}$. Aktiens pris vid tiden

t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet $\max(S(0), S(1), S(2))$. Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

Lösning. Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ t = 0, 1.$$

Låt $V(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Vi har att

$$\begin{pmatrix} V(2)_{|X_1=u,X_2=u} = \max(s, se^u, se^{u+u}) = se^{2u} \\ V(2)_{|X_1=u,X_2=d} = \max(s, se^u, se^{u+d}) = se^u \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=u} = \max(s, se^d, se^{d+u}) = s \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=d} = \max(s, se^d, se^{d+d}) = s \end{pmatrix}$$

och definieras

$$p = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q$$

så följer att

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = e^{-r}(pse^{2u} + qse^u) \\ V(1)_{|X_1=d} = e^{-r}(ps + qs) = e^{-r}s \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$V(0) = e^{-r}\left\{pe^{-r}(pse^{2u} + qse^u) + qe^{-r}s\right\} =$$

$$se^{-2r}\left\{p^2e^{2u} + pqe^u + q\right\} \leftarrow SVAR$$

3. Låt $t < T < T_1$ och $K > 0$. Ett finansiellt derivat ger innehavaren rättigheten, men ej skyldigheten, att vid tiden T byta en europeisk säljoption i aktien med slutdagen T_1 och lösenpriset K mot en europeisk köpoption i aktien med slutdagen T_1 och lösenpriset K. Bestäm derivatets värde vid tiden t.

Lösning. Låt $V(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden $t \le T$. Förutsättningen ger att

$$V(T) = \max(0, c(T, S(T), K; T_1) - p(T, S(T), K; T_1)).$$

Men

$$S(T)-c(T,S(T),K;T_1)=Ke^{-r(T_1-T)}-p(T,S(T),K;T_1).$$

("put-call parity relation") och det följer att

$$V(T)=\max(0,S(T)-Ke^{-r(T_1-T)})=c(T,S(T),Ke^{-r(T_1-T)};T).$$

Dominansprincipen ger nu att

$$V(t)=c(t,S(t),Ke^{-r(T_1-T)};T).$$

Om $t<T$ följer slutligen att

$$V(t)=S(t)\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{K}+r(T_1-T)+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})-$$

$$Ke^{-r(T_1-T)}e^{-r(T-t)}\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{K}+r(T_1-T)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}).$$

$SVAR$: Derivatets värde vid tiden $t<T$ är lika med

$$S(t)\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{K}+r(T_1-T)+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})-$$

$$Ke^{-r(T_1-t)}\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{K}+r(T_1-T)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}).$$

4. Antag $u(t,x)=x^4+7x^3-6tx^2-21tx+3t^2$, $t\geq 0$, $x\in\mathbf{R}$. Visa att processen $(u(t,W(t)))_{t\geq 0}$ är en Wienermartingal. (Ledning: Använd Itôs lemma.)

Lösning: Itôs lemma ger

$$du(t,W(t))=u'_t(t,W(t))dt+u'_x(t,W(t))dW(t)+\frac{1}{2}u''_{xx}(t,W(t))(dW(t))^2=$$

$$(u'_t(t,W(t))+\frac{1}{2}u''_{xx}(t,W(t)))dt+u'_x(t,W(t))dW(t).$$

Här är

$$u'_t=-6x^2-21x+6t,$$

$$u'_x = 4x^3 + 21x^2 - 12tx - 21t$$

och

$$u''_{xx} = 12x^2 + 42x - 12t$$

varför

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Alltså gäller att

$$du(t, W(t)) = u'_x(t, W(t))dW(t)$$

dvs

$$u(t, W(t)) = \int_0^t u'_x(\lambda, W(\lambda))dW(\lambda)$$

eftersom $u(0,0) = 0$.

För att visa att processen

$$\int_0^t u'_x(\lambda, W(\lambda))dW(\lambda),\ t \geq 0$$

är en Wienermartingal fixerar vi ett $0 < T < \infty$ och sätter

$$h(t) = u'_x(t, W(t)),\ 0 \leq t \leq T.$$

Det räcker nu att visa att $h \in M_W^2\left[0, T\right]$. Det är självklart att h är progressivt mätbar. Det återstår att visa att

$$E\left[\int_0^T h^2(t)dt\right] < \infty.$$

Observera först att

$$\mid x^k \mid \leq 1 + \mid x \mid^3,\ k \in \{0, 1, 2, 3\},\ x \in \mathbf{R}.$$

Därför gäller att

$$\mid u'_x(t, x) \mid \leq A(1 + \mid x \mid^3),\ 0 \leq t \leq T,\ x \in \mathbf{R}$$

där $A = 4 + 21 + 12T + 21T$. Eftersom

$$(1 + \mid x \mid^3)^2 \leq 2(1 + x^6)$$

följer att

$$E\left[\int_0^T h^2(t)dt\right] \leq E\left[\int_0^T 2A^2(1+W^6(t))dt\right] =$$

$$2A^2\int_0^T (1+E\left[W^6(t))\right])dt = 2A^2\int_0^T (1+t^3E\left[W^6(1))\right])dt =$$

$$2A^2(T+\frac{T^4}{4}E\left[W^6(1))\right]) < \infty$$

ty $W(0,1) \in N(0,1)$. Vi har därför visat att $h \in M_W^2\left[0,T\right]$.