MATEMATIK OCH OPTIONER (CTH[$TMA861$],GU[$MAN690$])

Skrivningsdag: 22 maj 1999, kl $8^{45}-13^{45}$ *Lokal*: mg *Hjälpmedel:* Beta
Telefonvakt: Christer Borell, tel. 330 19 59 *OBS:* Text på 2 sidor

– –

Nedan betecknar $(W(t))_{t\geq 0}$ en reellvärd normaliserad Wienerprocess. I uppgift 4 förutsätts Black-Scholes modell. Aktiens pris $S(t)$ vid tiden $t \geq 0$ ges av ekvationen $S(t) = S(0)e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t)}$, där $\mu \in \mathbf{R}$ och där σ och $S(0)$ är positiva konstanter. Obligationens pris $B(t)$ vid tiden $t \geq 0$ är lika med $B(0)e^{rt}$, där $B(0)$ och r är positiva konstanter.

Om $x \in \mathbf{R}$ definieras $x^+ = \max(0,x)$ och $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

1. a) (3p) Lös den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = -\frac{X(t)}{1-t}dt + dW(t),\ 0 \leq t < 1$$

med begynnelsevärdet $X(0) = 0$. Visa att den stokastiska processen $(X(t))_{0\leq t<1}$ är en centrerad Gaussisk process och bestäm dess kovariansfunktion.

b) (1p) Sätt $Y(t) = W(t) - tW(1)$, $0 \leq t < 1$. Visa att den stokastiska processen $(Y(t))_{0\leq t<1}$ är en centrerad Gaussisk process och bestäm dess kovariansfunktion.

2. (3p) Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > 0$, $d = -u$, $r = \frac{u}{2}$ och $t \in \{0, 1, 2\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet

$$(S(0) - S(1))^+ + (S(1) - S(2))^+.$$

Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

3. (3p) Visa att processen

$$(e^{-\frac{t}{2}} \cosh W(t))_{t\geq 0}$$

är en Wienermartingal.

4. En europeisk köpoption i aktien med slutdagen T och lösenpriset K har det teoretiska priset $c(t, S(t), K)$ vid tiden $t \in [0, T[$, där $c(t, s, K) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$, $\tau = T - t$,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. Visa att

a) (1p)

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \Phi(d_1)$$

b) (2p)

$$\frac{c(t, s, K)}{c(t, s_0, K)} > \frac{s}{s_0} \text{ om } s > s_0.$$

5. (3p) Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation i ett tidssteg med parametrarna u, d och r. Definiera begreppet arbitrage och avgör under vilka villkor på parametrarna som modellen saknar arbitrage.

6. (3p) Låt m beteckna Lebesguemåttet i $\mathbf{R}$ och antag att funktionen $f \in L^1(m)$ är jämn och icke-negativ. Visa att funktionen $C(s, t) = \hat{f}(s - t)$, $s, t \in \mathbf{R}$, är en kovarians.

7. (3p) Betrakta indelningen $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$ av intervallet $[0, T]$ och definiera

$$L_\Delta^{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1} (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2.$$

Visa att $L_\Delta^{(2)} \to T$ i $L^2(P)$ då indelningens finhet

$$\delta = \max_{0 \le k \le n-1} (t_{k+1} - t_k)$$

går mot noll.

8. (3p) Antag funktionen $f : [0, T] \to \mathbf{R}$ är kontinuerligt deriverbar. Visa att

$$\int_0^T f(t)dW(t) = f(T)W(T) - \int_0^T f'(t)W(t)dt.$$