LÖSNINGAR
MATEMATIK OCH OPTIONER (CTH[$TMA861$],GU[$MAN690$])

Skrivningsdag: 22 maj 1999, kl $8^{45} - 13^{45}$

– –

1. a) Lös den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = -\frac{X(t)}{1-t}dt + dW(t),\ \ 0 \leq t < 1$$

med begynnelsevärdet $X(0) = 0$. Visa att den stokastiska processen $(X(t))_{0\leq t<1}$ är en centrerad Gaussisk process och bestäm dess kovariansfunktion.

b) Sätt $Y(t) = W(t) - tW(1)$, $0 \leq t < 1$. Visa att den stokastiska processen $(Y(t))_{0\leq t<1}$ är en centrerad Gaussisk process och bestäm dess kovariansfunktion.

Lösning. a) Vi har att

$$dX(t) + \frac{X(t)}{1-t}dt = dW(t)$$

dvs

$$d\left\{\frac{X(t)}{1-t}\right\} = \frac{1}{1-t}dW(t)$$

och integration ger

$$\frac{X(t)}{1-t} = \int_0^t \frac{1}{1-\lambda}dW(\lambda)$$

ty $X(0) = 0$. Härav följer att

$$X(t) = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-\lambda}dW(\lambda).$$

Eftersom Wienerprocessen är en centrerad Gaussisk process så följer att den stokastiska processen $(X(t))_{0\leq t<1}$ är en centrerad Gaussisk process. Vi skall bestämma processens kovariansfunktion. Antag först $0 \leq s \leq t < 1$. Då är

$$E\left[X(s)X(t)\right] = (1-s)(1-t)E\left[\int_0^s \frac{1}{1-\lambda}dW(\lambda)\int_0^t \frac{1}{1-\lambda}dW(\lambda)\right] =$$

$$(1-s)(1-t)E\left[\int_0^t 1_{[0,s]}(\lambda)\frac{1}{1-\lambda}dW(\lambda)\int_0^t \frac{1}{1-\lambda}dW(\lambda)\right]=$$
$$(1-s)(1-t)\int_0^t 1_{[0,s]}(\lambda)\frac{1}{1-\lambda}\frac{1}{1-\lambda}d\lambda=$$
$$(1-s)(1-t)\int_0^s \frac{1}{(1-\lambda)^2}d\lambda=s-st.$$

För godtyckliga $0\leq s,t<1$ gäller därför att

$$E\left[X(s)X(t)\right]=\min(s,t)-st.$$

b) Antag först $0\leq s\leq t<1$. Då är

$$E\left[Y(s)Y(t)\right]=E\left[(W(s)-sW(1))(W(t)-tW(1))\right]=$$
$$E\left[W(s)W(t)\right]-E\left[W(s)tW(1)\right]-E\left[sW(1))W(t)\right]+E\left[sW(1)tW(1)\right]=$$
$$s-st-st+st=s-st.$$

För godtyckliga $0\leq s,t<1$ gäller därför att

$$E\left[Y(s)Y(t)\right]=\min(s,t)-st.$$

2. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u>0$, $d=-u$, $r=\frac{u}{2}$ och $t\in\{0,1,2\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet

$$(S(0)-S(1))^{+}+(S(1)-S(2))^{+}.$$

Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

Lösning. Sätt $S(0)=s$ och

$$S(t+1)=S(t)e^{X_{t+1}},\ t=0,1.$$

Låt $V(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Vi har att

$$\begin{pmatrix} V(2)_{|X_1=u,X_2=u}=(s-se^u)^{+}+(se^u-se^{u+u})^{+}=0\\ V(2)_{|X_1=u,X_2=d}=(s-se^u)^{+}+(se^u-se^{u+d})^{+}=s(e^u-1)\\ V(2)_{|X_1=d,X_2=u}=(s-se^d)^{+}+(se^d-se^{d+u})^{+}=s(1-e^d)\\ V(2)_{|X_1=d,X_2=d}=(s-se^d)^{+}+(se^d-se^{d+d})^{+}=s(1-e^{2d})\end{pmatrix}$$

och definieras

$$p = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q$$

så följer att

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = e^{-r}(0 + qs(e^u - 1)) \\ V(1)_{|X_1=d} = e^{-r}(ps(1 - e^d) + qs(1 - e^{2d})) \end{pmatrix}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = sqe^{-r}(e^u - 1) \\ V(1)_{|X_1=d} = se^{-r}(1 - e^d)(1 + qe^d) \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$V(0) = e^{-r}(psqe^{-r}(e^u - 1) + qse^{-r}(1 - e^d)(1 + qe^d)) =$$

$$sqe^{-2r}(p(e^u - 1) + (1 - e^d)(1 + qe^d)) =$$

$$se^{-\frac{u}{2}}\frac{e^u - 1}{e^u + 1} \leftarrow SVAR$$

Uppgiften är löst.

3. Visa att processen

$$(e^{-\frac{t}{2}} \cosh W(t))_{t \geq 0}$$

är en Wienermartingal.

Lösning. Sätt $\mathcal{F}_t = \sigma(W(\lambda);\ 0 \leq \lambda \leq t)$. Antag först att $a \in \mathbf{R}$ och låt $t_0 \leq t$. Då är

$$E\left[e^{aW(t)} \mid \mathcal{F}_{t_0}\right] = E\left[e^{a(W(t)-W(t_0))}e^{aW(t_0)} \mid \mathcal{F}_{t_0}\right] =$$

$$e^{aW(t_0)}E\left[e^{a(W(t)-W(t_0))} \mid \mathcal{F}_{t_0}\right] = e^{aW(t_0)}E\left[e^{a(W(t)-W(t_0))}\right] = e^{aW(t_0)}e^{\frac{a^2}{2}(t-t_0)}.$$

Alltså är

$$E\left[e^{-\frac{t}{2}} \cosh W(t) \mid \mathcal{F}_{t_0}\right] = \frac{1}{2}E\left[e^{-\frac{t}{2}}(e^{W(t)} + e^{-W(t)}) \mid \mathcal{F}_{t_0}\right] =$$

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}(E\left[e^{W(t)} \mid \mathcal{F}_{t_0}\right] + E\left[e^{-W(t)} \mid \mathcal{F}_{t_0}\right]) =$$

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}(e^{W(t_0)}e^{\frac{1}{2}(t-t_0)}+e^{-W(t_0)}e^{\frac{1}{2}(t-t_0)})=e^{-\frac{t_0}{2}}\cosh W(t_0).$$

4. En europeisk köpoption i aktien med slutdagen T och lösenpriset K har det teoretiska priset $c(t,S(t),K)$ vid tiden $t\in[0,T[$, där $c(t,s,K)=s\Phi(d_1)-Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$, $\tau=T-t$,

$$d_1=\frac{\ln\frac{s}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och $d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau}$. Visa att

a)

$$\frac{\partial c}{\partial s}=\Phi(d_1)$$

b)

$$\frac{c(t,s,K)}{c(t,s_0,K)}>\frac{s}{s_0}\text{ om } s>s_0.$$

Lösning. a) Vi har att

$$\frac{\partial c}{\partial s}=\Phi(d_1)+s\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{\partial d_1}{\partial s}-Ke^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\frac{\partial d_2}{\partial s}=$$

$$\Phi(d_1)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial d_1}{\partial s}\left\{se^{-\frac{d_1^2}{2}}-Ke^{-r\tau}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\right\}=$$

$$\Phi(d_1)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial d_1}{\partial s}\left\{se^{-\frac{d_1^2}{2}}-Ke^{-r\tau}e^{-\frac{d_1^2}{2}+d_1\sigma\sqrt{\tau}-\frac{\sigma^2\tau}{2}}\right\}=$$

$$\Phi(d_1)+\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial d_1}{\partial s}\left\{s-Ke^{-r\tau}e^{d_1\sigma\sqrt{\tau}-\frac{\sigma^2\tau}{2}}\right\}=\Phi(d_1).$$

b) Det räcker att visa att funktionen

$$f(s)=\frac{c(t,s,K)}{s},\ s>0$$

är strängt växande. Men

$$f'(s)=\frac{s\frac{\partial c}{\partial s}-c\cdot 1}{s^2}=\frac{s\Phi(d_1)-(s\Phi(d_1)-Ke^{-r\tau}\Phi(d_2))}{s^2}=$$

$$\frac{Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)}{s^2} > 0$$

och det följer omedelbart att f är strängt växande.

Alternativ lösning till b): Optionsprisets elasticitet med avseende på aktiepriset är lika med

$$\frac{s}{c}\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{s\Phi(d_1)}{s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)} > 1.$$

Om $s_1 > s_0$ följer därför att

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial s} ds > \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{s} ds$$

dvs

$$\ln c(t, s_1, K) - \ln c(t, s_0, K) > \ln s_1 - \ln s_0$$

eller

$$\frac{c(t, s_1, K)}{c(t, s_0, K)} > \frac{s_1}{s_0}.$$