## 2. Binomialmodellen

I förra kapitlet studerades aktiepriser i kontinuerlig tid. Vi skall i detta avsnitt behandla den så kallade binomialmodellen som ger en modell för en kapitalmarknad i diskret tid. Modellen presenterades av Cox, Ross och Rubinstein [$CRR$] och Rendleman och Bartter [$RB$] år 1979 och har vid lämpliga val av de ingående parametrarna stor praktisk tillämpning. Tyvärr finns inget omedelbart sätt att illustrera detta utan modellens tillämpbarhet kommer att växa fram efterhand.

Betrakta en matematisk modell för en kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $S(t)$ vid tiden $t$ och en obligation med priset $B(t)$ vid tiden $t$. Här är $B(0)$ och $S(0)$ positiva konstanter. Vi antager att tidsvariabeln $t$ endast kan antaga två värden, nämligen 0 eller 1 och låter

$$B(1) = B(0)e^r$$

där konstanten $r > 0$ och

$$S(1) = S(0)e^X$$

där $X$ är en reellvärd binomialfördelad stokastisk variabel. Det finns alltså $u, d \in \mathbf{R}$, som uppfyller $u > d$, så att sannolikheterna

$$p_u = P[X = u]$$

och

$$p_d = P[X = d]$$

uppfyller

$$p_u + p_d = 1,$$

och

$$p_u > 0,\ p_d > 0.$$

För enkelhets skull antas också att händelsen

$$[X \notin \{u, d\}]$$

aldrig inträffar. Händelsen $[X = u]$ kan uppfattas som att den bakomliggande ekonomin går upp och händelsen $[X = d]$ att motsvarande ekonomi går ned.

Den ovan beskrivna modellen kallas binomialmodellen för en aktie och en obligation med ett tidssteg (eller en period). I ställer för att arbeta med variablerna $r$ och $X$ kan man arbeta med variablerna $r_1$ och $X_1$ eller variablerna $r_2$ och $X_2$ där

$$e^r = 1 + r_1 = r_2$$

och

$$e^X = 1 + X_1 = X_2.$$

Vi har valt variabler som mest liknar standardvariabler i kontinuerlig tid.

Om $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ betyder olikheten $x > 0$ att $x_1 > 0, ..., x_n > 0$ och olikheten $x \geq 0$ att $x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0$. Begreppet arbitrage för binomialmodellen med ett tidssteg kan definieras på följande sätt. Välj en godtycklig portfölj $h = (h_S, h_B)$ bestående av $h_S$ aktier och $h_B$ obligationer. Dess värde vid tiden $t$ ges av

$$V_h(t) = h_S S(t) + h_B B(t).$$

Ett arbitrage sägs uppstå om portföljen kan väljas så att

$$V_h(0) = 0,\ P\,[V_h(1) \geq 0\ ] = 1 \text{ och } E\,[V_h(1)] > 0$$

eller ekvivalent

$$V_h(0) = 0,\ V_h(1) \geq 0 \text{ och } V_h(1) \neq 0.$$

Utskrivet mer explicit innebär detta att

$$h_S S(0) + h_B B(0) = 0$$

och

$$\begin{cases} h_S S(0) e^u + h_B B(0) e^r \geq 0 \\ h_S S(0) e^d + h_B B(0) e^r \geq 0 \end{cases}$$

där strikt olikhet inträffar i någon av de två olikheterna.

**Sats 1.** *Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ett arbitrage skall kunna uppstå i binomialmodellen med ett tidssteg är att*

$$r \notin\ ]d, u[\,.$$

**Bevis.** Antag vi har ett arbitrage så att

$$h_S S(0) + h_B B(0) = 0$$

och

$$\begin{cases} h_S S(0)e^u + h_B B(0)e^r \geq 0 \\ h_S S(0)e^d + h_B B(0)e^r \geq 0 \end{cases}$$

där strikt olikhet inträffar i någon av de två olikheterna. Eftersom

$$h_B B(0) = -h_S S(0)$$

följer att

$$\begin{cases} h_S S(0)(e^u - e^r) \geq 0 \\ h_S S(0)(e^d - e^r) \geq 0 \end{cases}$$

där strikt olikhet inträffar i någon av de två olikheterna. Speciellt måste $h_S \neq 0$. Om $h_S > 0$ följer att

$$\begin{cases} e^u - e^r \geq 0 \\ e^d - e^r \geq 0. \end{cases}$$

Alltså gäller att $r \leq d$ och därmed $r \notin \,]d, u[\,$. Fallet $h_S < 0$ behandlas på liknande sätt.

Antag nu omvänt att $r \notin \,]d, u[\,$. Vi betraktar först fallet $r \leq d$. Välj $h_S = 1$ och $h_B < 0$ så att

$$S(0) = (-h_B)B(0).$$

Härav följer att

$$h_S S(0) + h_B B(0) = 0$$

och

$$\begin{cases} h_S S(0)e^u + h_B B(0)e^r > 0 \\ h_S S(0)e^d + h_B B(0)e^r \geq 0 \end{cases}$$

varför vi har fått ett arbitrage. Fallet $r \geq u$ behandlas analogt.

$\Lambda$

I den följande diskussionen förutsätts att $u > r > d$ så att modellen saknar arbitrage.

Antag att vår enkla kapitalmarknad utvidgas på så sätt att vi tillför ett derivat i aktien av europeisk typ som utbetalar beloppet $Y$ vid tiden $t = 1$. Vi antar att $Y$ är en stokastisk variabel som är känd då $X$ är känd dvs att $Y$ är en deterministisk funktion av $X$. Vi ansätter därför $Y = f(X)$ där $f : \{u, d\} \to \mathbf{R}$. Vilket teoretiskt värde skall detta derivat tilldelas vid tiden $t = 0$? För att besvara denna fråga betraktar vi en portfölj $h = (h_S, h_B)$ bestående av $h_S$ aktier och $h_B$ obligationer. Om vi kan bestämma $h_S$ och $h_B$ så att $V_h(1) = f(X)$ så definieras derivatets teoretiska värde vid tiden $t = 0$ som $V_h(0)$. Observera att $V_h(0)$ i så fall blir entydigt bestämt eftersom vår modell saknar arbitrage.

Vi undersöker nu närmare ekvationen $V_h(1) = f(X)$. Om aktien går upp vid tiden $t = 1$ blir

$$h_S S(0)e^u + h_B B(0)e^r = f(u)$$

och om aktien går ned vid tiden $t = 1$ så blir

$$h_S S(0)e^d + h_B B(0)e^r = f(d).$$

En kalkyl medför nu att

$$h_S S(0) = \frac{f(u) - f(d)}{e^u - e^d}$$

och

$$h_B B(0) = e^{-r}\frac{e^u f(d) - e^d f(u)}{e^u - e^d}.$$

Storheterna $h_S$ och $h_B$ blir som synes entydigt bestämda och

$$V_h(0) = h_S S(0) + h_B B(0)$$

$$= e^{-r}\left[q_u f(u) + q_d f(d)\right]$$

där

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$

och

$$q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}.$$

Notera att $q_u > 0$, $q_d > 0$ och $q_u + q_d = 1$. Vi kallar alltså $V_h(0)$ för derivatets teoretiska pris eller teoretiska värde vid tiden 0 och detta pris betecknas med

$\Pi_Y(0)$. Ibland talar man också om derivatets arbitragefria pris. I fortsättningen säger vi ofta pris (värde) istället för teoretiskt pris (teoretiskt värde) då missförstånd inte kan inträffa.

Observera att relationen

$$q_u e^u + q_d e^d = e^r$$

medför att $\Pi_Y(0) = S(0)$ om $Y = S(1) = S(0)e^X$.

**Problem 1.** Betrakta binomialmodellen med ett tidssteg för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > r > d$ och $u > 0 > d$. Aktiens pris vid tiden $t \in \{0,1\}$ betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar beloppet

$$\max(0, \frac{S(0)+S(1)}{2} - S(0))$$

vid tiden $t = 1$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t = 0$.

**Lösning.** Sätt

$$Y = \max(0, \frac{S(0)+S(1)}{2} - S(0)),$$

$S(0) = s$ och

$$S(1) = se^X.$$

Det gäller att

$$Y = \max(0, \frac{1}{2}(S(1) - S(0)) = s\max(0, \frac{1}{2}(e^X - 1)) = f(X)$$

varför

$$f(u) = \frac{s}{2}(e^u - 1)$$

och

$$f(d) = 0.$$

Alltså är

$$\Pi_Y(0) = e^{-r} q_u \frac{s}{2}(e^u - 1)$$

$$= \frac{se^{-r}}{2}(e^u - 1)\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = \frac{s}{2}(e^u - 1)\frac{1 - e^{d-r}}{e^u - e^d}.$$

$$\Lambda$$

Vi är nu beredda att definiera den så kallade binomialmodellen för en aktie och en obligation med $T$ tidssteg (eller $T$ perioder). Betrakta därför en kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $S(t)$ vid tiden $t$ och en obligation med priset $B(t)$ vid tiden $t$, där $S(0)$ och $B(0)$ är positiva konstanter. Tidsvariabeln $t$ antar värdena $0, 1, 2, ..., T$. Vidare gäller att

$$B(t+1) = B(t)e^r$$

där konstanten $r > 0$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X(t+1)}$$

där $X(t+1) = X_{t+1}$ är en binomialfördelad stokastisk variabel för $t = 0, ..., T-1$. Dessutom förutsätts att det går att välja $u, d \in \mathbf{R}$, som uppfyller $u > d$, så att sannolikheterna

$$p_u = P[X_t = u]$$

och

$$p_d = P[X_t = d]$$

är oberoende av $t$ och uppfyller

$$p_u + p_d = 1,$$

och

$$p_u > 0, \ p_d > 0.$$

För enkelhets skull antages också att händelsen

$$[X_t \notin \{u, d\}]$$

aldrig inträffar för godtyckligt $t = 1, ..., T$. Utöver alla dessa förutsättningar antages slutligen att sekvensen $(X_k)_{k=1}^T$ består av stokastiskt oberoende stokastiska variabler. Denna modell kallas för binomialmodellen för en aktie och en obligation i $T$ tidssteg. Händelsen $[X_t = u]$ kan uppfattas som att den bakomliggande ekonomin går upp och händelsen $[X_t = d]$ att ekonomin går ned i tidssteget från $t-1$ till $t$.

Sätt $X = (X_1, ..., X_T)$. För varje enskilt slumpvis utfall $\omega \in \Omega$ är således $X(\omega)$ ett element i mängden

$$\{u, d\}^T = \{i;\ i = (i_1, ..., i_T) \text{ och } i_t = u \text{ eller } d \text{ för } t = 1, ..., T\}.$$

Denna mängd har $2^T$ element. Värdemängden för $X$ kan representeras med en matris av typ $2^T \times T$ som vi betecknar med $R_T^{ud}$. Vi räknar upp elementen i denna matris på följande sätt

$$R_1^{ud} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$R_2^{ud} = \begin{pmatrix} u & u \\ u & d \\ d & u \\ d & d \end{pmatrix}$$

$$R_3^{ud} = \begin{pmatrix} u & u & u \\ u & u & d \\ u & d & u \\ u & d & d \\ d & u & u \\ d & u & d \\ d & d & u \\ d & d & d \end{pmatrix}$$

osv.

Eftersom de stokastiska variablerna $X_1, ..., X_T$ är stokastiskt oberoende gäller att

$$P[X_1 = i_1, ..., X_T = i_T] = p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_T}$$

om $i_1, ..., i_T = u$ eller $d$. För en godtycklig funktion $f : \{u, d\}^T \to \mathbf{R}$ så följer nu att

$$E[f(X_1, ..., X_T)] = \sum_{i_1, ..., i_T = u \text{ eller } d} f(i_1, ..., i_T) P[X_1 = i_1, ..., X_T = i_T]$$

dvs

$$E[f(X_1, ..., X_T)] = \sum_{i_1, ..., i_T = u \text{ eller } d} f(i_1, ..., i_T) p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_T}.$$

Nedan möter vi ofta en summa av typen

$$\sum_{i_1,...,i_T=u \text{ eller } d} f(i_1,...,i_T) q_{i_1} \cdot ... \cdot q_{i_T}$$

där $q_u$ och $q_d$ är som ovan och vi finner det praktiskt att beteckna denna summa med $E^Q[f(X_1,...,X_T)]$. Alltså gäller att

$$E^Q[f(X_1,...,X_T)] = \sum_{i_1,...,i_T=u \text{ eller } d} f(i_1,...,i_T) q_{i_1} \cdot ... \cdot q_{i_T}.$$

Efter denna formalism återvänder vi till aktien ovan. Eftersom

$$S(t) = S(0)e^{X_1+...+X_t}$$

är $S(t)$ en deterministisk funktion av $X_1,...,X_t$ och vi skriver ibland

$$S(t) = S(t; X_1,...,X_t).$$

En sekvens $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ kallas en strategi om $h(0) = h(1)$ och det för var varje $t = 1,...,T$ gäller att $h(t)$ är en deterministisk funktion av $X_1,...,X_{t-1}$. Ibland skriver vi därför

$$h_S(t) = h_S(t; X_1,...,X_{t-1})$$

och

$$h_B(t) = h_B(t; X_1,...,X_{t-1}).$$

Motsvarande värdeprocess $V_h = (V_h(t))_{t=0}^T$ definieras av att

$$V_h(t) = h_B(t)S(t) + h_B(t)B(t),\ t = 0, 1, .., T.$$

Med våra konventioner görs valet av $h_S(t)$ aktier och $h_B(t)$ obligationer vid tiden $t-1$ för $t = 1, .., T$. Portföljvärdet $V_h(t)$ är en deterministisk funktion av $X_1,...,X_t$ varför vi ibland skriver

$$V_h(t) = V_h(t; X_1,...,X_t)$$

för $t = 0,...,T$.

Om en strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ uppfyller

$$V_h(t) = h_B(t+1)S(t) + h_B(t+1)B(t),\ t = 1,...,T-1$$

sägs strategin vara vara självfinansierande.

**Sats 2.** *Antag $u > r > d$. Om $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ är en självfinansierande strategi så gäller att*

$$V_h(0) = e^{-rT} \sum_{i_1,...,i_T = u \text{ eller } d} q_{i_1}...q_{i_T} V_h(T; i_1, ..., i_T)$$

dvs

$$V_h(0) = e^{-rT} E^Q \left[ V_h(T; X_1, ..., X_T) \right]$$

eller

$$V_h(0) = e^{-rT} E^Q \left[ V_h(T) \right].$$

**Bevis.** Vi vet att

$$V_h(T) = h_S(T)S(T) + h_B(T)B(T)$$

dvs $V_h(T; X_1, ..., X_T)$ är lika med

$$h_S(T; X_1, ..., X_{T-1})S(T-1; X_1, ..., X_{T-1}))e^{X_T} + h_B(T; X_1, ..., X_{T-1})B(T-1)e^r.$$

Eftersom strategin är självfinansierande gäller att $V_h(T-1; X_1, ..., X_{T-1})$ är lika med

$$h_S(T; X_1, ..., X_{T-1})S(T-1; X_1, ..., X_{T-1}) + h_B(T; X_1, ..., X_{T-1})B(T-1).$$

Från binomialmodellen med ett tidssteg vet vi att storheterna

$$h_S(T; X_1, ..., X_{T-1})$$

och

$$h_B(T; X_1, ..., X_{T-1})$$

är entydigt bestämda och att

$$V_h(T-1; X_1, ..., X_{T-1}) = e^{-r} \sum_{i_T = u \text{ eller } d} q_{i_T} V_h(T; X_1, ..., X_{T-1}, i_T).$$

Resultatet följer nu genom induktion.

$\Lambda$

En självfinansierande strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ sägs ge ett arbitrage om

$$V_h(0) = 0,\ P\left[V_h(T) \geq 0\right] \text{ och } E\left[V_h(T)\right] > 0$$

eller ekvivalent

$$V_h(0) = 0,\ V_h(T) \geq 0 \text{ och } V_h(T) \neq 0.$$

**Sats 3.** *Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ett arbitrage skall kunna uppstå i binomialmodellen med $T$ tidssteg är att*

$$r \notin \left]u, d\right[.$$

**Bevis.** Antag först att $r \notin \left]u, d\right[$. Enligt sats 1 finns ett arbitrage i tidssteget från 0 till 1. Vid tiden 1 placeras motsvarande portföljvärde i obligationer. Vi får härmed ett arbitrage för binomialmodellen med $T$ tidssteg.

Antag nu att $r \in \left]u, d\right[$ och betrakta en självfinansierande strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ sådan att $V_h(0) = 0$. Sats 2 ger därför att

$$0 = e^{-rT} \sum_{i_1,...,i_T = u \text{ eller } d} q_{i_1}...q_{i_T} V_h(T; i_1, ..., i_T)$$

Kom ihåg att $q_u > 0$ och $q_d > 0$. Alltså kan det inte gälla att $V_h(T) \geq 0$ och $V_h(T) \neq 0$. Detta bevisar sats 3.

$\Lambda$

Ett finansiellt derivat av europeisk typ som som utbetalar beloppet $g(S(T))$ vid tiden $T$ sägs vara ett enkelt derivat av europeisk typ. Det finns dock mer komplicerade aktiederivat där utbetalningen beror av aktiepriserna

$$S(0), S(1), ..., S(T).$$

Exempelvis är ett kontrakt som ger innehavaren rätten att vid tiden $T$ köpa aktien till den lägsta aktiekursen under tidsperioden $\{0, 1, ..., T\}$ likvärdigt med ett finansiellt derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet

$$S(T) - \min_{t \in \{0,1,...,T\}} S(t)$$

vid tiden $T$ ("lookback option"). Ett finansiellt derivat i aktien som utbetalar beloppet $Y$ vid tiden $T$, där $Y$ är en deterministisk funktion av $X_1, ..., X_T$, kallas för ett betingat kontrakt av europeisk typ med slutdagen $T$. Här gäller alltså att $Y = f(X_1, ..., X_T)$ för en lämplig funktion $f : \{u, d\}^T \to \mathbf{R}$. Vi förutsätter att modellen saknar arbitrage dvs att $u > r > d$ och skall definiera ett sådant derivats teoretiska värde $V(t)$ vid tiden $t \leq T$ . Här skall naturligtvis $V(t)$ bestämmas som en funktion av $X_1, ..., X_t$.

Vi börjar med att definiera $V(T) = f(X_1, ..., X_T)$. Antag att vi befinner oss vid tiden $t < T$ och att $V(j)$ redan definierats som en deterministisk funktion av $X_1, ..., X_j$ för $j = T, ..., t+1$. För att bestämma $V(t)$ bildas vid tiden $t$ en portfölj bestående av $h_S(t+1)$ aktier och $h_B(t+1)$ obligationer. Dessa kvantiteter skall endast bero på $X_1, ..., X_t$ och ej på framtida utfall för $X_{t+1}, ..., X_T$. Våra konventioner är återigen sådana att vi går in i tiden $t+1$ med $h_S(t+1)$ aktier och $h_B(t+1)$ obligationer. Portföljvärdet vid tiden $t$ ges av $h_S(t+1)S(t) + h_B(t+1)B(t)$ och från föregående vet vi att det finns entydigt $(h_S(t+1),\ h_B(t+1))$ så att

$$h_S(t+1)S(t+1) + h_B(t+1)B(t+1) = V(t+1).$$

Vi definierar därför $V(t) = h_S(t+1)S(t) + h_B(t+1)B(t)$ och skriver

$$V^u(t+1) = V(t+1)_{|X_{t+1}=u}$$

och

$$V^d(t+1) = V(t+1)_{|X_{t+1}=d}.$$

Från vårt inledande studium av binomialmodellen i ett tidssteg följer att

$$h_S(t+1)S(t) = \frac{V^u(t+1) - V^d(t+1)}{e^u - e^d}$$

och

$$h_B(t+1)B(t) = e^{-r}\frac{e^u V^d(t+1) - e^d V^u(t+1)}{e^u - e^d}.$$

Med standardbeteckningarna

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$

och

$$q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}$$

så erhålls därför formeln

$$V(t) = e^{-r}\left[q_u V^u(t+1) + q_d V^d(t+1)\right].$$

Det är uppenbart att $V(t), h_S(t+1)$ och $h_B(t+1)$ genom ovanstående definitioner endast beror av $X_1, ..., X_t$. Med hjälp av induktion kan vi till sist definiera $V(0)$. I fortsättningen skrivs ofta $V(t) = \Pi_Y(t)$. Om vi definierar $h(0) = (h_S(0), h_B(0)) = h(1)$ så ger konstruktionen en självfinansierande strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ sådan att

$$V_h(T) = Y.$$

Vår modell sägs därför vara komplett.

**Uppgift 2.** Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > r > 0$, $d = -u$ och $t \in \{0, 1, 2\}$. Aktiens pris vid tiden $t$ betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet $\max(S(0), S(1), S(2))$. Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

**Lösning.** Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ \ t = 0, 1.$$

Låt $V(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden $t$. Vi har att

$$\begin{pmatrix} V(2)_{|X_1=u,X_2=u} = \max(s, se^u, se^{u+u}) = se^{2u} \\ V(2)_{|X_1=u,X_2=d} = \max(s, se^u, se^{u+d}) = se^u \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=u} = \max(s, se^d, se^{d+u}) = s \\ V(2)_{|X_1=d,X_2=d} = \max(s, se^d, se^{d+d}) = s \end{pmatrix}$$

och det följer att

$$\begin{pmatrix} V(1)_{|X_1=u} = e^{-r}(q_u se^{2u} + q_d se^u) \\ V(1)_{|X_1=d} = e^{-r}(q_u s + q_d s) = e^{-r}s \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$V(0) = e^{-r}\left\{q_u e^{-r}(q_u se^{2u} + q_d se^u) + q_d e^{-r}s\right\}$$

$$= se^{-2r}\left\{q_u^2 e^{2u} + q_u q_d e^u + q_d\right\}$$

där

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q_d.$$

$\Lambda$

Betrakta återigen ett derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $Y = f(X_1, ..., X_T)$ vid tiden $T$ och välj en självfinansierande strategi sådan att $V_h(T) = Y$. Sats 3 visar att derivatets värde vid tiden 0 ges av ekvationen

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} \sum_{i_1,...,i_T = u \text{ eller } d} q_{i_1} ... q_{i_T} f(i_1, ..., i_T).$$

Vid beräkning av denna summa kan följande metod användas. Sätt

$$R_T^{10} = (a_{jk})_{1 \le j \le 2^T, 1 \le k \le T} \ .$$

Låt $r_j$ vara rad $j$ för matrisen $R_T^{10}$, låt

$$b_j = (u - d) r_j + [d \ldots d]$$

och låt $n_j$ vara antalet $u$ i vektorn $b_j$ dvs

$$n_j = \sum_{k=1}^{T} a_{jk}$$

för $j = 1, ..., 2^T$. Då är

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} \sum_{j=1}^{2^T} q_u^{n_j} q_d^{T-n_j} f(b_j).$$

Serien i höger led innehåller $2^T$ termer och är därför mycket tidskrävande i samband med beräkning om $T$ är stort. I det viktiga specialfallet då $Y$ är en deterministisk funktion av $S(T)$ kan beräkningen göras mycket snabbare. Antag därför att

$$Y = g(S(T)) = g(S(0) \exp(X_1 + ... + X_T)).$$

Vi kan välja ut $k$ element ur $T$ element på

$$\binom{T}{k}$$

olika sätt om vi inte bryr oss om ordningen. Alltså blir

$$\Pi_Y(0) = e^{-rT} \sum_{k=0}^{T} \begin{pmatrix} T \\ k \end{pmatrix} q_u^k q_d^{T-k} g(S(0)e^{ku+(T-k)d}).$$

Det är i detta fall lätt att se att $\Pi_Y(t)$ är en deterministisk funktion av $S(t)$.

Vid praktisk kalkyl är det ofta fördelaktigt att gå fram rekursivt. Vi skriver därför $\Pi_Y(t) = v(t, S(t))$ och har

$$v(T, S(0)e^{ku+(T-k)d}) = g(S(0)e^{ku+(T-k)d}),\ k = 0, ..., T.$$

Vidare gäller för $t = T-1, ..., 1, 0$ att

$$v(t, S(0)e^{ku+(t-k)d})$$

$$= e^{-r}(q_u v(t+1, S(0)e^{(k+1)u+(t-k)d}) + q_d v(t+1, S(0)e^{ku+(t+1-k)d}))$$

för $k = 0, ..., t$. Det gäller att $\Pi_Y(0) = v(0, S(0))$.

Vi betraktar avslutningsvis derivat av amerikansk typ och förutsätter även här att $u > r > d$.

Antag att $Y_t$ är en deterministisk funktion av $X_1, ..., X_t$ för $t = 0, 1, ..., T$. Vi antager alltså att

$$Y_t = f_t(X_1, ..., X_t)$$

där

$$f_t : \{u, d\}^t \to \mathbf{R}$$

för $t = 0, 1, ..., T$. Ett derivat av amerikansk typ ger kontraktsinnehavaren rättigheten att inlösa kontraktet vid en godtycklig tidpunkt $t \in \{0, 1, ..., T\}$ och det utbetalar i samma ögonblick beloppet $Y_t$ varefter kontraktet upphör att gälla. Vi skall definiera kontraktets teoretiska värde $V(t)$ vid en godtycklig tidpunkt $t \in \{0, 1, ..., T\}$ förutsatt att kontraktet inte lösts in tidigare. Först definieras $V(T) = Y_T$. Om kontraktsinnehavaren bestämmer att ej lösa in kontraktet vid tiden $T-1$ har det samma värde som motsvarande europeiska kontrakt dvs det har värdet

$$e^{-r}(q_u V^u(T) + q_d V^d(T))$$

vid tiden $T-1$. Om kontraktsinnehavaren beslutar lösa in kontraktet vid tiden $T-1$ har det värdet $Y_{T-1}$vid tiden $T-1$. Vi definierar därför

$$V(T-1) = \max(Y_{T-1}, e^{-r}(q_u V^u(T) + q_d V^d(T)))$$

och allmänt

$$V(t) = \max(Y_t, e^{-r}(q_u V^u(t+1) + q_d V^d(t+1))).$$

I fortsättningen skrivs ofta $\Pi_Y(t) = V(t)$.

Det är naturligtvis återigen tidskrävande att beräkna $V(0)$ om $T$ är stort. Om vi antager att varje $Y_t$ är en deterministisk funktion av $S(t)$ dvs

$$Y_t = g_t(S(t))$$

så blir beräkningen avsevärt enklare. Vi kan lätt se att $V(t)$ för fixt $t$ är en funktion av $S(t)$. Vi skriver därför $V(t) = v(t, S(t))$ och har

$$v(T, S(0)e^{ku+(T-k)d}) = g_T(S(0)e^{ku+(T-k)d}), \ k = 0, ..., T.$$

Vidare gäller för $t = T-1, ..., 1, 0$ att storheten

$$v(t, S(0)e^{ku+(t-k)d})$$

är lika med

$$\max(g_t(S(0)e^{ku+(t-k)d}), e^{-r}(q_u v(t+1, S(0)e^{(k+1)u+(t-k)d}) + q_d v(t+1, S(0)e^{ku+(t+1-k)d}))$$

för $k = 0, ..., t$. Det sökta optionsvärdet ges alltså av $v(0, S(0))$.

## Övningar

1. Betrakta binomialmodellen med ett tidssteg där $u > r > d$. Ett derivat av europeisk typ har utbetalningsfunktionen

   $$g(s) = \max(0, s - K)$$

   där

   $$S(0)e^d < K < S(0)e^u.$$

   Antag

   $$h_S S(1) + h_B B(1) = f(S(1)).$$

   Visa att

   $$h_S > 0 \text{ och } h_B < 0.$$

2. Antag att $X$ är en binomialfördelad stokastisk variabel sådan att
$$P[X=-1]=P[X=1]=\frac{1}{2}.$$
Bestäm de $\lambda \in \mathbf{R}$ för vilka olikheten
$$E\left[(a+\lambda bX)^4\right] \leq (E\left[(a+bX)^2\right])^2$$
gäller för alla $a$, $b \in \mathbf{R}$.

3. Låt $x \in [0,1]$ och antag $P[X=0]=x$ och $P[X=1]=1-x$. Antag $X_1,...,X_n$ är stokastiskt oberoende observationer på $X$. Visa att
$$E\left[f(\frac{1}{n}(X_1+...+X_n))\right]=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
för varje funktion $f$ definierad på intervallet $[0,1]$.

4. Betrakta binomialmodellen med $t=0,1,2$ och $u>r>d$ och $r>0$. Ett derivat av europeisk typ utbetalar beloppet
$$Y=\max(0,(S(0)S(1)S(2))^{\frac{1}{3}}-K)$$
vid tiden $t=2$. Antag
$$S(0)e^d < K \leq S(0)e^{\frac{1}{3}u+\frac{2}{3}d}.$$
Visa att derivatets värde vid tiden $t=0$ är lika med
$$e^{-2r}\left[S(0)q_u^2e^u+S(0)q_uq_d(e^{\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}d}+e^{\frac{1}{3}u+\frac{2}{3}d})-q_u(1+q_d)K\right]$$
där
$$q_u=1-q_d=\frac{e^r-e^d}{e^u-e^d}.$$

5. Betrakta binomialmodellen och antag $u>r>d$, $r>0$ och $T=2$. En europeisk medelvärdesoption av europeisk typ utbetalar beloppet
$$\max\left(0,\frac{1}{3}(S(0)+S(1)+S(2))-K\right)$$
vid tiden 2, där $K$ är ett givet positivt tal som uppfyller
$$\frac{S(0)}{3}(1+e^d+e^{2d})<K<\frac{S(0)}{3}(1+e^d+e^{u+d}).$$
Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

6. Skriv ett program i MATLAB som genererar matrisen $R_T^{10}$.

7. Ett betingat kontrakt av europeisk typ utbetalar

$$Y = S(T) - \min_{t \in \{0,1,\ldots,T\}} S(t)$$

vid tiden $T$. Beräkna optionens värde vid tiden 0 då

a) $u = -d = 0.1$, $r = 0.05$ och $T = 2$

b) $u = -d = 0.1$, $r = 0.05$ och $T = 8$.

8. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > r > 0 \geq d$ och $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Aktiens pris vid tiden $t$ betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen $n$ utbetalar denna dag beloppet $Y$, där $Y = S(n)$ om $S(0) < S(1) < \ldots < S(n)$ och $Y = S(0)$ i annat fall. Bestäm derivatets värde vid tiden 0. (**Svar:** $e^{-rn}\left\{1 + \left(\frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}\right)^n (e^{nu} - 1)\right\} S(0)$)

9. Betrakta binomialmodellen med ett tidssteg och en portfölj $h = (h_S, h_B)$ bestående av $h_S$ aktier och $h_B$ obligationer. Dess värde vid tiden $t$ ges av

$$V_h(t) = h_S S(t) + h_B B(t).$$

Vi säger att ett säkert arbitrage uppstår om portföljen kan väljas så att

$$V_h(0) = 0 \text{ och } V_h(1) > 0.$$

Visa att ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ett säkert arbitrage skall kunna uppstå är att

$$r \notin [d, u].$$

(Om $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ betyder olikheten $x > 0$ att $x_k > 0$ för $k = 1, \ldots, n$.)

10. Betrakta binomialmodellen med $T$ tidssteg. En självfinansierande strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ sägs ge ett säkert arbitrage om

$$V_h(0) = 0 \text{ och } V_h(T) > 0.$$

Visa att ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att ett säkert arbitrage skall kunna uppstå är att

$$r \notin [d, u].$$