3. Brownsk rörelse och värmeledningsekvationen

Det är idag en vanlig uppfattning att aktiepriser styrs av slump åtminstone på kort sikt. Prisfluktuationerna uppvisar likheter med molekylers och aggregat av molekylers fluktuationer, som behandlades teoretiskt av Einstein år 1905 $[E]$. Motsvarande fysikaliska fenomen observerades troligen först av den holländske fysikern Ingen-Housz c:a 120 år tidigare (se $[KSZ]$). Botanisten Brown konstaterade i en publikation år 1829 att fenomenet ej förorsakas av levande organismer och fenomenet ifråga har kommit att kallas Brownsk rörelse $[BR]$.

Försök att förstå aktieprisers fluktuationer och europeiska köpoptioner ledde år 1900 fransmannen Bachelier till det anmärkningsvärda arbetet "Théorie de la spéculation" i den franska tidskriften Annales scientifiques de l'École normale supérieure $[BA]$. Något överraskande behandlade Bachelier och Einstein samma matematiska grundekvationer. Den amerikanske matematikern Wiener gav år 1923 en stringent matematisk behandling av Brownsk rörelse $[W]$. Bachelier, som redan i början av seklet stöddes av Poincaré, hade inget stort vetenskapligt inflytande under sin livstid och fick ett tydligt erkännande för sin pionjärinsats inom matematisk finans först några år efter sin bortgång 1946. Genom Blacks och Scholes uppmärksammade bidrag till det europeiska köpoptionsproblemet 1973 $[BS]$, som bygger på japanen Itôs kalkyl med Brownska trajektorier, framstår Bacheliers uppsats från år 1900 som en milstolpe i finansmatematikens historia. För en intressant artikel om Bacheliers insatser inom matematisk finans hänvisas till Samuelsons artikel $[SAM2]$.

I detta avsnitt ger vi en introduktion till Brownsk rörelse och visar dess samband med värmeledning. Därutöver antyds hur Brownsk rörelse kan approximeras med en vanlig slumpvandring med binomialfördelade tillskott. Härigenom får binomialmodellen en djupare mening. Resultaten i detta kapitel förutsätter en del standardresultat från Fourieranalys, som vi tror är lätta att acceptera utan bevis. I senare avsnitt bevisas motsvarande resultat.

Två reellvärda stokastiska variabler X och Y sägs ha samma fördelning om

$$P\,[X \in I] = P\,[Y \in I]$$

för varje delintervall I av reella tallinjen.

Om X är en reellvärd stokastisk variabel så kallas funktionen

$$c_X(\xi) = E\left[e^{i\xi X}\right],\ \xi \in \mathbf{R}$$

för den karakteristiska funktionen till X. Observera att

$$c_X(0) = 1.$$

Ett resultat inom Fourieranalysen säger att två reellvärda stokastiska variabler X och Y har samma fördelning om och endast om deras karakteristiska funktioner sammanfaller.

Antag först att X är binomialfördelad och

$$P[X = 1] = P[X = -1] = \frac{1}{2}.$$

Då är

$$c_X(\xi) = \frac{1}{2}e^{i\xi} + \frac{1}{2}e^{-i\xi} = \cos\xi.$$

Om en reellvärd stokastisk variabel X har frekvensfunktionen f så gäller att

$$E\left[e^{i\xi X}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x)dx,\ \xi \in \mathbf{R}.$$

Råkar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

skriver vi $X \in N(0,1)$. I detta fall är

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0$$

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 1$$

och

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= E\left[(X - E[X])^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = 1.\end{aligned}$$

Om $X \in N(0,1)$ gäller också att

$$c_X(\xi) = e^{-\xi^2/2}$$

ty eftersom Gaussfunktionen

$$e^{-\frac{x^2}{2}}$$

är jämn följer att

$$c_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\xi x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

och derivering leder till att

$$\frac{d}{d\xi} c_X(\xi) = -\int_{-\infty}^{\infty} x \sin(\xi x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

En partiell integration ger nu

$$\frac{d}{d\xi} c_X(\xi) = -\xi c_X(\xi)$$

dvs

$$\frac{d}{d\xi}(e^{\frac{\xi^2}{2}} c_X(\xi)) = 0.$$

Eftersom $c_X(0) = 1$ så följer därför att

$$c_X(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

Antag $\alpha \in \mathbf{R}$ och $\sigma \geq 0$ är givna tal. En reellvärd stokastisk variabel X sägs tillhöra klassen $N(\alpha, \sigma^2)$ om den kan skrivas

$$X = \alpha + \sigma G$$

där $G \in N(0,1)$. I detta fall gäller att

$$E[X] = \alpha$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

och

$$c_X(\xi) = e^{i\alpha\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2} = e^{i\xi E[X] - \frac{1}{2}\xi^2 \mathrm{Var}(X)}.$$

En stokastisk variabel i klassen $N(\alpha, \sigma^2)$ sägs ha en Gaussisk fördelning med väntevärdet α och variansen σ^2. Om $X \in N(0,1)$ så betecknas fördelningsfunktionen till X med Φ dvs

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}},\ y \in \mathbf{R}.$$

Inom matematisk finans skrivs ofta N istället för Φ.

En stokastisk variabel X sägs ha en likformig fördelning i intervallet $[a, b]$ om $a < b$ och X har frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{om } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{om } x < a \text{ eller } x > b. \end{cases}$$

Om $X \in N(0, 1)$ så har den stokastiska variabeln $\Phi(X)$ en likformig fördelning i intervallet $[0, 1]$.

Kovariansen mellan två reellvärda stokastiska variabler X och Y sådana att

$$E\left[X^2\right] < \infty \text{ och } E\left[Y^2\right] < \infty$$

betecknas med $\mathrm{Cov}(X, Y)$ och definieras av att

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right]$$

dvs

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]\,E[Y].$$

Observera att

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Var}(Y).$$

Om dessutom X och Y ej är konstanta med sannolikheten ett, betecknas korrelationen mellan X och Y med $\mathrm{Cor}(X, Y)$ och definieras av ekvationen

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Två stokastiska variabler X och Y sägs vara okorrelerade om $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ och de sägs vara positivt korrelerade om $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$.

En familj reellvärda stokastiska variabler $(X(t))_{t \in T}$ kallas för en reellvärd stokastisk process. Vi skriver ofta $X(t) = X_t$. Indexmängden T kallas för tidsparametermängd och avbildningen

$$t \to X_t(\omega)$$

för en realisation, samplefunktion eller trajektoria för processen. Två stokastiska processer $X = (X(t))_{t \in T}$ och $Y = (Y(t))_{t \in T}$ med samma tidsparametermängd sägs vara ekvivalenta i fördelning om

$$P\left[X(t_1) \in I_1, ..., X(t_n) \in I_n\right] = P\left[Y(t_1) \in I_1, ..., Y(t_n) \in I_n\right]$$

för alla delintervall $I_1, ..., I_n$ av $\mathbf{R}$ och alla $t_1, ..., t_n \in T$ och $n \in \mathbf{N}_+$. Denna egenskap är enligt Fourieranalysen ekvivalent med att

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\xi_k X(t_k)}\right] = E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\xi_k Y(t_k)}\right]$$

för alla $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbf{R}$, $t_1, ..., t_n \in T$ och $n \in \mathbf{N}_+$. Två stokastiska processer som är ekvivalenta i fördelning sägs vara versioner av samma stokastiska process. Det är naturligt att i en matematisk modell för ett aktiepris försöka beskriva aktiepriset som en reellvärd stokastisk process som antar positiva värden i varje tidpunkt.

Om $(X(t))_{t\in T}$ är en reellvärd stokastisk process och

$$E\left[\mid X(t) \mid\right] < \infty, \; t \in T$$

definieras väntevärdesfunktionen $\alpha : T \to \mathbf{R}$ av processen genom att

$$\alpha_t = E\left[X(t)\right], \, t \in T.$$

Funktionen α kallas ofta helt enkelt för väntevärdet av processen $(X(t))_{t\in T}$. Om dessutom

$$E\left[X^2(t)\right] < \infty, \; t \in T$$

definieras kovariansfunktionen $C : T \times T \to R$ genom att

$$C(s,t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t)), \, s, t \in T,$$

dvs

$$C(s,t) = E\left[(X(s) - \alpha_s)(X(t) - \alpha_t)\right], \, s, t \in T.$$

En reellvärd stokastisk process sägs vara centrerad om den har väntevärdesfunktionen noll. En stokastisk process $(X_t)_{t\in\{1,...,n\}}$ skrivs ofta $(X_k)_{k=1}^n$ och kan identifieras med en $\mathbf{R}^n$-värd stokastisk variabel. Om

$$E\left[\mid X_k \mid\right] < \infty, \; k = 1, 2, ..., n$$

kan processens väntevärde uppfattas som en vektor i $\mathbf{R}^n$.

De reellvärda stokastiska variablerna X_k, $k = 1, ..., n$, sägs vara stokastiskt oberoende om

$$P\left[X_1 \in I_1, ..., X_n \in I_n\right] = \prod_{k=1}^{n} P\left[X_k \in I_k\right]$$

för alla delintervall $I_1, ..., I_n$ av $\mathbf{R}$. De reellvärda stokastiska variablerna $X_1, ..., X_n$ är stokastiskt oberoende om och endast om

$$E\left[\prod_{k=1}^{n} g_k(X_k)\right] = \prod_{k=1}^{n} E\left[g_k(X_k)\right]$$

för alla begränsade kontinuerliga funktioner $g_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $k = 1, ..., n$, eller ekvivalent att

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\xi_k X_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{i\xi_k X_k}\right]$$

om $\xi_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, ..., n$. Dessa påståenden visas inom Fourieranalysen. Om de reellvärda stokastiska variablerna $X_1, ..., X_{n-1}, X_n$ är stokastiskt oberoende och dessutom har frekvensfunktionerna $f_1, ..., f_{n-1}$ respektive f_n, så gäller att

$$P\left[(X_1, ..., X_n) \in A\right] = \int \cdots \int_{(x_1,...,x_n)\in A} \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k)dx_1...dx_n$$

för varje öppen eller sluten delmängd A av $\mathbf{R}^n$.

En familj $X(t)$, $t \in T$, av reellvärda stokastiska variabler är stokastiskt oberoende om de stokastiska variablerna $X(t)$, $t \in T_0$, är stokastiskt oberoende för varje ändlig delmängd T_0 av T.

Om två reellvärda stokastiska variabler X och Y är stokastiskt oberoende och uppfyller

$$E\left[X^2\right] < \infty \text{ och } E\left[Y^2\right] < \infty$$

så är

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[XY\right] - E\left[X\right] E\left[Y\right] = 0$$

dvs X och Y är okorrelerade. Speciellt följer att

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Om $X_0 \in N(\alpha_0, \sigma_0^2)$ och $X_1 \in N(\alpha_1, \sigma_1^2)$ är stokastiskt oberoende så gäller att $X_0 + X_1 \in N(\alpha_0 + \alpha_1, \sigma_0^2 + \sigma_1^2)$. Vi har nämligen att

$$E\left[e^{i\xi(X_0+X_1)}\right] = E\left[e^{i\xi X_0} e^{i\xi X_1}\right] = E\left[e^{i\xi X_0}\right] E\left[e^{i\xi X_1}\right]$$

$$= e^{\alpha_0\xi - \frac{1}{2}\sigma_0^2\xi^2} e^{\alpha_1\xi - \frac{1}{2}\sigma_1^2\xi^2} = e^{(\alpha_0+\alpha_1)\xi - \frac{1}{2}(\sigma_0^2+\sigma_1^2)\xi^2}.$$

Man kan naturligtvis härleda samma resultat mer direkt utan begreppet karakteristisk funktion. För att se detta begränsar vi oss till fallet $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\sigma_0 > 0$ och $\sigma_1 > 0$ och får

$$P\left[X_0 + X_1 \in A\right] = \iint\limits_{\sigma_0 y_o + \sigma_1 y_1 \in A} e^{-\frac{y_0^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}} \frac{dy_0 dy_1}{(\sqrt{2\pi})^2}.$$

Substitutionen

$$\begin{cases} z_0 = (\sigma_0 y_0 + \sigma_1 y_1)/\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \\ z_1 = \sigma_1 y_0 - \sigma_0 y_1/\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} \end{cases}$$

ger

$$P\left[X_0 + X_1 \in A\right] = \iint\limits_{z_0\sqrt{\sigma_0^2+\sigma_1^2} \in A} e^{-\frac{z_0^2}{2} - \frac{z_1^2}{2}} \frac{dz_0 dz_1}{(\sqrt{2\pi})^2}$$

$$= \int_{z_0\sqrt{\sigma_0^2+\sigma_1^2} \in A} e^{-\frac{z_0^2}{2}} \frac{dz_0}{\sqrt{2\pi}} = \int_A e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_0^2+\sigma_1^2)}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi(\sigma_0^2+\sigma_1^2)}}$$

vilket visar påståendet.

En reellvärd stokastisk process $(X(t))_{t \in T}$ sägs vara en reellvärd Gaussisk process om det för varje $\xi_k \in \mathbf{R}$, $t_k \in T$ och $n \in \mathbf{N}_+$ gäller att linjärkombinationen

$$Y = \sum_{k=1}^{n} \xi_k X(t_k),$$

har en Gaussisk fördelning. I förekommande fall följer att

$$Y \in N\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k E\left[X(t_k)\right], \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \xi_k \operatorname{Cov}(X(t_j), X(t_k))\right)$$

varför

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\xi_k X(t_k)}\right] = e^{i\sum_{k=1}^{n}\xi_k E[X(t_k)] - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\xi_j\xi_k \operatorname{Cov}(X(t_j),X(t_k))}.$$

Om en reellvärd Gaussisk process $(X_k)_{k=1}^{n}$ uppfyller

$$\operatorname{Cov}(X_j, X_k) = 0 \text{ för } j \neq k$$

så är

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}\xi_k X_k}\right] = e^{i\sum_{k=1}^{n}\xi_k E[X_k] - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\xi_j\xi_k \operatorname{Cov}(X_j,X_k)}$$

$$= e^{i\sum_{k=1}^{n}\xi_k E[X_k]-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 \mathrm{Var}(X_k)} = \prod_{k=1}^{n} e^{i\xi_k E[X_k]-\frac{1}{2}\xi_k^2\mathrm{Var}(X_k)}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{i\xi_k X_k}\right].$$

De stokastiska variablerna $X_1, ..., X_n$ är därför stokastiskt oberoende.

En sekvens $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ bestående av stokastiska variabler kallas en i.i.d. om de stokastiska variablerna X_k, $k \geq 1$, är stokastiskt oberoende och lika fördelade. Definitionen av en i.i.d. med en tidsparametermängd av typen $\{1, ..., n\}$ ges på liknande sätt. Om X är en stokastisk variabel och $(X_k)_{k=1}^{n}$ är en i.i.d. sådan att X_1 och X har samma fördelning så sägs $X_1, ..., X_n$ vara stokastiskt oberoende observationer på X.

Antag att $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ är en i.i.d. bestående av reellvärda stokastiska variabler. Motvarande stokastiska process av partialsummor $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$, där $Z_n = X_1 + ... + X_n$, $n \geq 1$, kallas en slumpvandring (engelska: random walk). Om $a \in \mathbf{R}$ kallas processen $(U_n)_{n=0}^{\infty}$, där $U_0 = a$ och $U_n = a + Z_n$, $n \geq 1$, också för en slumpvandring och denna sägs starta i punkten a vid tiden $n = 0$. Elementen X_n, $n \geq 1$, kallas ofta för slumpvandringens tillskott. En i.i.d. $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ sägs vara en Gaussisk i.i.d. om elementen i följden är Gaussiskt fördelade. Motsvarande slumpvandring kallas i detta fall för en Gaussisk slumpvandring.

Betrakta en aktie med priset $S(t)$ vid tiden $t \geq 0$ och låt h vara en fix positiv parameter. Vi uppfattar aktiepriset $S(0)$ vid tiden 0 som känt. Välj $h > 0$ och sätt

$$t_n = nh,\ n = 0, 1, ...$$

och

$$X(t_n) = X^h(t_n) = \ln \frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})},\ n = 1, 2, ...$$

Log-pristillskottet $X(t_n)$ kallas aktiens avkastning över intervallet $[t_{n-1}, t_n]$. De normaliserade avkastningarna över intervallen

$$[t_{n-1}, t_n],\ n = 1, 2, ...$$

definieras genom att sätta

$$Y_n = \frac{X(t_n)}{D_n},\ n = 1, 2, ...$$

där D_n betecknar en skattning av standardavvikelsen till $X(t_n)$. I den så kallade slumpvandringsmodellen för aktien föreskrivs att aktieavkastningarna $(X^h(t_n))_{n=1}^{\infty}$ bildar en i.i.d. för alla $h > 0$ dvs att log-priserna ln $S(nh)$, $n \geq 0$, är en slumpvandring för alla $h > 0$.

Empiriska undersökningar av historiska aktiepriser visar i regel att en akties avkastningar över disjunkta tidsintervall har mycket små korrelationer medan motsvarande absoluta avkastningar $\mid X(t_n) \mid$, $n = 1, 2, ...$, ofta är positivt korrelerade. Den senare egenskapen är inte konsistent med slumvandringsmodellen. Empiriska undersökningar ger också ofta stöd för att olikheterna

$$\hat{P}\left[\mid Y_n \mid \geq y\right] > P\left[\mid G \mid \geq y\right], \; y \text{ stort}$$

och

$$\hat{P}\left[\mid Y_n \mid \leq y\right] > P\left[\mid G \mid \leq y\right], \; y \text{ litet}$$

där $G \in N(0,1)$ (en skattad sannolikhet för händelsen A betecknas $\hat{P}[A]$).

Inom tidsserieanalys studeras prisändringar av spekulativa priser över år, månader, veckor, dagar, timmar och ändå finare tidsskalor. Famas artikel "The behavior of stock market prices" $[FA]$ och Granger och Morgensterns bok "Predictability of Stock Market Prices" $[GM]$ är två nästan klassiska arbeten inom detta område. Bland senare bidrag inom teorin för ekonomiska tidsserier kan vi rekommendera böckerna $[END]$, $[CLM]$ och $[T]$ och atrikeln $[P]$. Cox och Rubinsteins bok "Option Markets" $[CR]$ innehåller många referenser till undersökningar av såväl aktie- som optionspriser.

Om X_n, $n \in \mathbf{N}_+$, och X är reellvärda stokastiska variabler och

$$\lim_{n \to \infty} P\left[a < X_n < b\right] = P\left[a < X < b\right]$$

för alla reella a och b sådana att

$$P\left[X \in \{a, b\}\right] = 0$$

så sägs sekvensen $(X_n)_{n \in \mathbf{N}_+}$ konvergera mot X i fördelning. Denna typ av konvergens förkortas

$$X_n \to X.$$

Om nödvändigt anges här att $n \to \infty$. Denna typ av konvergens är ekvivalent med att

$$\lim_{n \to \infty} E\left[f(X_n)\right] = E\left[f(X)\right]$$

för varje begränsad kontinuerlig funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eller att

$$\lim_{n\to\infty} c_{X_n}(\xi) = c_X(\xi),\ \xi \in \mathbf{R}.$$

Dessa påståenden visas inom Fourieranalysen.

Sats 1. (Centrala gränsvärdessatsen) *Låt* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$*vara en* i.i.d. *där*

$$P\,[X_1 = 1] = P\,[X_1 = -1] = \frac{1}{2}$$

och sätt

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + ... + X_n),\ n \in \mathbf{N}_+.$$

Då gäller att

$$Z_n \to G$$

där $G \in N(0,1)$.

För starkare versioner av centrala gränsvärdessatsen hänvisas till böcker i sannolikhetsteori (såsom tex [BOR]). Sats 1 visades av de Moivre 1733 (se t ex Lifshits bok "Gaussian Random Functions" [LIF]). Normalfördelningen var alltså känd före Gauss tid.

Bevis. Vi har att

$$c_{Z_n}(\xi) = c_{X_1+...+X_n}(\frac{\xi}{\sqrt{n}}) = \prod_{k=1}^{n} c_{X_k}(\frac{\xi}{\sqrt{n}}) = \cos^n(\frac{\xi}{\sqrt{n}})$$

varför

$$c_{Z_n}(\xi) = (1 - \frac{\xi^2}{n} + \frac{\xi^4}{n^2}B(\frac{\xi}{\sqrt{n}}))^n$$

där funktionen B är begränsad i en omgivning av origo. Alltså är

$$\lim_{n\to\infty} c_{Z_n}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} = c_G(\xi)$$

vilket visar satsen.

Λ

En reellvärd centrerad Gaussprocess $(X(t))_{t\geq 0}$ med kovariansfunktionen

$$E\left[X(s)X(t)\right] = \min(s,t)$$

kallas för en normaliserad, reellvärd Wienerprocess eller en normaliserad, endimensionell Brownsk rörelse. Observera i detta fall att

$$E\left[(X(s)-X(t))^2\right] = E\left[X^2(s) - 2X(s)X(t) + X^2(t)\right]$$

$$= s - 2\min(s,t) + t = \mid s-t \mid$$

varför

$$X(s) - X(t) \in N(0, \mid s-t \mid).$$

Sats 2. *En reellvärd Gaussprocess $X = (X(t))_{t\geq 0}$ är en normaliserad, reellvärd Wienerprocess om och endast om följande gäller:*

(i) $X(0) = 0$

(ii) $X(t) \in N(0,t)$, $t \geq 0$

(iii) *om* $n \in \mathbf{N}_+$, *och* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ *så är tillskotten*

$$X(t_1) - X(t_0),\, X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

parvis okorrelerade (dvs stokastiskt oberoende eftersom processen $X = (X(t))_{t\geq 0}$ är Gaussisk).

Bevis. Antag att $X = (X(t))_{t\geq 0}$ är en reellvärd, normaliserad Wienerprocess. Processen X är därför en Gaussisk process och $X(t) \in N(0,t)$. Detta visar (i) och (ii). Vi visar nu (iii). Om $j < k$ så följer att

$$E\left[(X(t_{j+1}) - X(t_j))(X(t_{k+1}) - X(t_k))\right]$$

$$= E\left[X(t_{j+1})(X(t_{k+1})\right] - E\left[X(t_{j+1})(X(t_k)\right] - E\left[X(t_j)(X(t_{k+1})\right] + E\left[X(t_j)(X(t_k)\right]$$

$$= t_{j+1} - t_{j+1} - t_j + t_j = 0$$

Detta visar (iii).

Omvänt antag processen $X = (X(t))_{t\geq 0}$ är en reellvärd Gaussprocess och att $(i) - (iii)$ gäller. Om $0 \leq s \leq t$ så är

$$E[X(s)X(t)] = E\left[X(s)(X(t) - X(s)) + X(s)^2\right]$$

$$= E[X(s)(X(t) - X(s)] + E\left[X(s)^2\right] = 0 + E\left[X(s)^2\right] = s$$

vilket visar att X är en reellvärd, normaliserad Wienerprocess.

Λ

Antag $(W(t))_{t\geq 0}$ är en reellvärd, normaliserad Wienerprocess och låt $a > 0$. Den omskalade processen

$$X(t) = a^{-\frac{1}{2}} W(at),\ t \geq 0$$

är en normaliserad Wienerprocess. Processen är ju uppenbarligen centrerad och Gaussisk och

$$E[X(s)X(t)] = a^{-1}\min(as, at) = \min(s, t).$$

Processen

$$Y(t) = W(t + a) - W(a),\ t \geq 0$$

är också en normaliserad Wienerprocess, ty processen är centrerad och Gaussisk och

$$E[Y(s)Y(t)] = E[(W(s + a) - W(a))(W(t + a) - W(a))]$$

$$= \min(s + a, t + a) - a - a + a = \min(s, t).$$

Som minnesregel för denna egenskap kan vi säga att Wienerprocessen startar på nytt i varje ögonblick. Den speglade processen

$$Z(t) = -W(t),\ t \geq 0$$

är som vi lätt ser också en normaliserad Wienerprocess.

Det är inte lätt att visa att en normaliserad Wienersprocess existerar. Vi försöker emellertid övertyga läsaren om dess existens på följande sätt. Antag $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ är en reellvärd i.i.d. sådan att

$$P[X_1 = 1] = P[X_1 = -1] = \frac{1}{2}.$$

Det är faktiskt inte heller lätt att visa att denna process existerar men det verkar troligt (kasta en slant 1,2,3,.... gånger osv). Observera att

$$E\left[X_1\right] = 0$$

och

$$\mathrm{Var}(X_1) = 1.$$

Vi definierar

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\ n \in \mathbf{N}$$

med konventionen att en summa med mindre övre summationsindex än undre summationsindex är noll. Alltså är $Z_0 = 0$. Om t är ett reellt tal betecknar $[t]$ det största heltalet som är mindre än eller lika med t. Processen

$$Y(t) = Z_{[t]} + (t - [t])X_{[t]+1},\ t \geq 0$$

är lika med Z_k för $t = n$ och är affin i varje intervall $[n, n+1]$ där $n \in \mathbf{N}$. Sätt

$$W_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} Y(Nt),\ t \geq 0$$

där $N \in \mathbf{N}_+$, och notera att denna process är centrerad och har kontinuerliga trajektorier samt att

$$W_N(\frac{n}{N}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{n} X_k,\ \ n \in \mathbf{N}.$$

Om N är stort och $\frac{n}{N}$ fixt så är

$$W_N(\frac{n}{N}) = \sqrt{\frac{n}{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

approximativt normalfördelad enligt centrala gränsvärdessatsen. Vidare gäller att

$$E\left[W_N(\frac{m}{N}) W_N(\frac{n}{N})\right] = \frac{1}{N} E\left[\sum_{k=1}^{m} X_k \sum_{k=1}^{n} X_k\right] =$$

$$\frac{1}{N}\min(m,n) = \min(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}).$$

Processen $(W_N(t))_{t \geq 0}$ approximerar för stora N i fördelning den normaliserade Wienerprocessen. Vi gör inte denna approximation tydligare här. Man kommer ofta rätt om man uppfattar Brownsk rörelse som en "slumpvandring i kontinuerlig tid".

En stokastisk process $(X(t))_{t\geq 0}$ kallas för en reellvärd Wienerprocess om $X(t) = x + \sigma W(t)$, $t \geq 0$, för lämpliga $x \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$. En reellvärd Wienerprocess kallas också för en endimensionell Brownsk rörelse. En stokastisk process $(X(t))_{t\geq 0}$ sägs vara en reellvärd Wienerprocess med linjär drift eller en endimensionell Brownsk rörelse med linjär drift om $X(t) = x + \alpha t + \sigma W(t)$, $t \geq 0$, för lämpliga $\alpha, x \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$. Parametern x kallas för startpunkt, parametern σ kallas för diffusionskonstant och parametern α kallas för driftskoefficient. Ibland säger vi bara Wienerprocess istället för reellvärd Wienerprocess och Brownsk rörelse istället för endimensionell Brownsk rörelse om sammanhanget i alla fall är klart.

Studiet av regularitetsegenskaper för Gaussprocessers samplefunktioner har varit ett aktivt forskningsfält ända in i vår egen tid. Ett särskilt viktigt och tidigt resultat inom detta område är följande sats.

Sats 3. (Wieners sats) *Det finns en version av Brownsk rörelse som har kontinuerliga trajektorier.*

Wieners sats visas i många läroböcker om stokastiska processer. Det kanske enklaste beviset återfinns i Bass bok $[BASS]$. I fortsättningen låter vi alltid $W = (W(t))_{t\geq 0}$ beteckna en reellvärd normaliserad Wienerprocess med kontinuerliga trajektorier.

Ett aktiepris $S(t)$, $t \geq 0$, sägs beskriva en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift om det så kallade log-priset

$$\ln S(t),\ t \geq 0$$

beskriver en Brownsk rörelse med linjär drift dvs

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t + \sigma W(t)},\ t \geq 0$$

för lämpliga parametrar $\alpha \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$. Parametern σ kallas i detta fall för aktieprisets volatilitet. I Bachelier-Samuelsons aktiemodell föreskrivs att aktiepriset beskrivs av en geometrisk Brownsk rörelse $[SAM1]$ (Samuelson modifierar i artikeln $[SAM1]$ Bacheliers tidigare aritmetiska aktiemodell från år 1900 $[BA]$). I Bachelier–Samuelsons modell gäller att logpriserna

$$(\ln S(nh))_{n=0}^{\infty}$$

bildar en Gaussisk slumpvandring för varje $h > 0$.

Exempel 1. Betrakta en aktie i Bachelier-Samuelsons modell med priset

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t + \sigma W(t)},\ t \geq 0$$

och låt $0 < t_1 < ... < t_n$. Antag vidare vi befinner oss vid tiden $t = 0$ och att vi vill beräkna sannolikheten för händelsen

$$A = [a_1 < S(t_1) < b_1, ..., a_n < S(t_n) < b_n] .$$

Genom att sätta

$$A_k = \left] \frac{1}{\sigma}(\ln \frac{a_k}{S(0)} - \alpha t_k), \frac{1}{\sigma}(\ln \frac{b_k}{S(0)} - \alpha t_k) \right[,\ k = 1, ..., n$$

så följer att

$$P[A] = P[W(t_1) \in A_1, ..., W(t_n) \in A_n] .$$

Med beteckningarna

$$Y_1 = W(t_1),\ Y_2 = W(t_2) - W(t_1), ..., Y_n = W(t_n) - W(t_{n-1})$$

blir således

$$P[A] = P[Y_1 \in A_1, Y_1 + Y_2 \in A_2, ..., Y_1 + Y_2 + ... + Y_n \in A_n] .$$

Kom ihåg att de stokastiska variablerna $Y_1, ..., Y_n$ är stokastiskt oberoende och att

$$Y_k \in N(0, t_k - t_{k-1}),\ k = 1, ..., n$$

där $t_0 = 0$. Detta medför att

$$P[A] = \int_{y_1 \in A_1} ... \int_{y_1 + ... + y_n \in A_n} \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{y_k^2}{2(t_k - t_{k-1})}} \right\} dy_1 ... dy_n$$

$$= \int_{A_1} ... \int_{A_n} \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}} \right\} dx_1 ... dx_n.$$

Här är $x_0 = 0$. Denna integral är möjlig att beräkna approximativt med hjälp av den så kallade Monte Carlometoden (se övningarna i detta kapitel) om n inte är alltför stort. Metoder från teorin för partiella differentialekvationer kan också utnyttjas vid beräkningen beroende på sambandet mellan Brownsk rörelse och värmeledningsekvationen, som vi berör härnäst.

Λ

I fortsättningen betecknar $\mathcal{E}_c$ klassen av alla reellvärda kontinuerliga funktioner f definierade på reella tallinjen sådana att

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} (e^{-C|x|} \mid f(x) \mid) < \infty$$

för en lämplig konstant $C > 0$ som eventuellt beror av f. Antag att $f \in \mathcal{E}_c$ är given och betrakta värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \; x \in \mathbf{R}$$

med begynnelsevillkoret

$$u_{|\tau=0} = f.$$

För att lösa denna ekvation införs Gaussfunktionen

$$\gamma(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}}, \quad \tau > 0, \; x \in \mathbf{R}$$

och en direkt kalkyl ger att

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} + \frac{x^2}{2\tau^{\frac{5}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = -\frac{x}{\tau^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}}$$

och

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = -\frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} + \frac{x^2}{\tau^{\frac{5}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}}.$$

Alltså gäller

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}.$$

Vi definierar i nästa steg

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\gamma(\tau, x - y)dy, \;\; \tau > 0, \;\; x \in \mathbf{R}$$

och får om derivering under integraltecknet är tillåten

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(\frac{\partial}{\partial \tau}\gamma(\tau, x-y) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\gamma(\tau, x-y))dy \;\; = 0.$$

Funktionen u löser därför värmeledningsekvationen i området $\tau > 0$, $x \in \mathbf{R}$. För att kontrollera begynnelsevillkoret skriver vi

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)\gamma(\tau, y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{y^2}{2\tau}}dy$$

och får

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \sqrt{\tau}y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Om här $\tau \to 0$ och vi tillåter att gränsvärdet får tas under integraltecknet erhålls

$$\lim_{\tau \to 0} u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = f(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = f(x)$$

eftersom

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = 1.$$

Vi låter därför funktionen

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \sqrt{\tau}y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

definiera lösningen till värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u_{|\tau=0} = f, \;\; \tau > 0, \;\; x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

I själva verket låter vi samma integralformel definiera lösningen till värmeledningsproblemet under det svagare villkore att f endast är styckvis kontinuerlig (dvs det existerar för alla reella tal $a < b$ en ändlig mängd $M \subseteq \,]a, b[$

sådan att $f(x)$ är kontinuerlig i mängden $a < x < b$, $x \notin M$, samt har ändliga gränsvärden $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ och $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ för varje $x_0 \in M$) samt därutöver uppfyller villkoret

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}(e^{-C|x|} \mid f(x) \mid) < \infty$$

för en lämplig konstant $C > 0$. Under dessa villkor på f skriver vi $f \in \mathcal{E}$. Observera att vi också kan skriva

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \sqrt{\tau}y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Om $G \in N(0,1)$ kan vi representera lösningen på formen

$$u(\tau, x) = E\left[f(x + \sqrt{\tau}G)\right].$$

Vi kan naturligtvis också skriva

$$u(\tau, x) = E\left[f(x + W(\tau))\right]$$

eftersom de stokastiska variablerna $W(\tau)$ och $\sqrt{\tau}G$ har samma fördelning.

Exempel 2. Antag

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u_{|\tau=0} = f, \;\; \tau > 0, \;\; x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

där

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

och $\sigma > 0$. Lösningen ges av

$$u(\tau, x) = \int_{\mathbf{R}} f(x - y)\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{y^2}{2\tau}}dy =$$

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{y^2}{2\tau}}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+\tau)}}e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+\tau)}}.$$

Λ

I många tillämpningar är det naturligt att studera värmeledningsekvationen med ett slutvillkor istället för ett begynnelsevillkor. Vi leds därmed till ekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u_{|t=T} = f, \ 0 < \ t < T, x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Substitutionen

$$\tau = T - t$$

ger den ekvivalenta formen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u_{|\tau=0} = f, \ T > \tau > 0, \ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

och lösningen kan därför skrivas

$$u(t,x) = E\left[f(x + W(\tau))\right].$$

Sats 4. *Antag* $a, b \in \mathbf{R}$ och låt $\sigma > 0$. *Om funktionen* $f \in \mathcal{E}$ *så har ekvationen*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + bu = 0 \\ u_{|t=T} = f, \ 0 < \ t < T, x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

lösningen

$$u(t,x) = e^{b\tau}E\left[f(x + a\tau + \sigma W(\tau))\right].$$

Bevis. Sätts

$$u(t,x) = e^{b\tau}v(\tau, \frac{1}{\sigma}(x + a\tau))$$

så får vi efter en kalkyl att

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

och

$$v_{|\tau=0} = f(\sigma x).$$

Alltså är

$$v(\tau,x) = E\left[f(\sigma(x + W(\tau)))\right]$$

och satsen följer omedelbart.

Sats 5. *Antag* $a, b \in \mathbf{R}$ och låt $\sigma > 0$. *Om* $g(e^x) \in \mathcal{E}$ *så har ekvationen*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + as\frac{\partial u}{\partial s} + bu = 0 \\ u_{|t=T} = g, \; 0 < \; t < T, \; s > 0 \end{cases}$$

lösningen

$$u(t,s) = e^{b\tau} E\left[g\left(se^{(a-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)}\right)\right].$$

Bevis. Sätt

$$s = e^x.$$

Då är

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{s}$$

och

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{1}{s^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{s^2}.$$

Insättning i differentialekvationen ger

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial u}{\partial x} + bu = 0 \;\; .$$

Vi utnyttjar nu slutvillkoret

$$u(T, e^x) = g(e^x)$$

och får från föregående sats att

$$u(t,s) = e^{b\tau} E\left[g\left(e^{x+(a-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau))}\right)\right]$$

och satsen är bevisad.

Vi avslutar detta kapitel med några samband mellan slumpvandring och numeriska metoder för värmeledningsekvationen.

Om funktionen $f \in \mathcal{E}$ så har ekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u_{|t=T} = f, \; 0 < \; t < T, x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

enligt sats 4 lösningen

$$u(t,x) = E\left[f(x+\sigma W(\tau))\right]$$

där $\tau = T - t$. Antag nu att $(X_j)_{j=1}^N$ är en i.i.d. sådan att

$$P\left[X_1 = 1\right] = P\left[X_1 = -1\right] = \frac{1}{2}.$$

Sätt

$$h = \tau/N$$

och notera att den stokastiska variabeln

$$\sqrt{h}\sum_{j=1}^{N} X_j$$

approximativt är $N(0,\tau)$-fördelad enligt centrala gränsvärdessatsen. Eftersom $\sigma W(\tau) \in N(0,\sigma^2\tau)$ följer att funktionen

$$v(t,x) = E\left[f(x+\sigma\sqrt{h}\sum_{j=1}^{N} X_j\right]$$

approximerar funktionen $u(t,x)$ för stora N. Vi skall visa att en viss differensmetod för numerisk lösning av värmeledningsekvationen leder till samma formel.

Betrakta värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,.$$

Vi kommer att utnyttja approximationerna

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \approx \frac{u(t,x) - u(t-\Delta t, x)}{\Delta t}$$

och

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \approx \frac{u(t,x+\Delta x) - 2u(t,x) + u(t,x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

och ersätter därefter funktionen u med v. Vi får därför

$$\frac{v(t,x) - v(t-\Delta t, x)}{\Delta t}$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}\frac{v(t,x+\Delta x)-2v(t,x)+v(t,x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}=0$$

Genom att sätta

$$\kappa=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

så följer att

$$v(t,x)-v(t-\Delta t,x)+\kappa(v(t,x+\Delta x)-2v(t,x)+v(t,x-\Delta x))=0$$

dvs

$$v(t-\Delta t,x)=\kappa v(t,x+\Delta x)+(1-2\kappa)v(t,x)+\kappa v(t,x-\Delta x).$$

Här finns möjlighet till sannolikhetsteoretiska tolkningar för alla $\kappa\in\left]0,\frac{1}{2}\right]$. Vi koncentrerar oss på fallet $\kappa=\frac{1}{2}$. Med beteckningarna

$$\Delta t=h \text{ och } \Delta x=\sigma\sqrt{h}$$

erhålls

$$v(t-h,x)=\frac{1}{2}v(t,x+\sigma\sqrt{h})+\frac{1}{2}v(t,x-\sigma\sqrt{h})$$

eller

$$v(t,x)=\frac{1}{2}v(t+h,x+\sigma\sqrt{h})+\frac{1}{2}v(t+h,x-\sigma\sqrt{h})$$

dvs

$$v(t,x)=E\left[v(t+h,x+\sigma\sqrt{h}X_1)\right].$$

Upprepning ger

$$v(t,x)=E\left[v(t+2h,x+\sigma\sqrt{h}(X_1+X_2))\right]$$

och till slut

$$v(t,x)=E\left[v(T,x+\sigma\sqrt{h}\sum_{j=1}^{N}X_j)\right].$$

Med slutvillkoret

$$v(T,x)=f(x)$$

får vi nu

$$v(t,x)=E\left[f(x+\sigma\sqrt{h}\sum_{j=1}^{N}X_j)\right].$$

Övningar

1. Två reellvärda stokastiska variabler X och Y har ha samma fördelning dvs
$$P[X \in I] = P[Y \in I]$$
för varje delintervall I av reella tallinjen. Visa att
$$P[X \in A] = P[Y \in A]$$
då A är en ändlig union av intervall.

2. De reellvärda stokastiska variablerna $X_k,\ k = 1, ..., n$, är vara stokastiskt oberoende dvs
$$P[X_1 \in I_1, ..., X_n \in I_n] = \prod_{k=1}^{n} P[X_k \in I_k]$$
för alla delintervall $I_1, ..., I_n$ av $\mathbf{R}$. Visa att
$$P[X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n] = \prod_{k=1}^{n} P[X_k \in A_k]$$
då varje mängd $A_1, ..., A_n$ är en ändlig union av intervall.

3. Antag att $X_1, ..., X_n$ är stokastiskt oberoende och
$$E\left[X_k^2\right] < \infty,\ k = 1, ..., n.$$
Visa att
$$\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k).$$

4. Antag att de stokastiska variablerna $X_k \in N(\alpha_k, \sigma_k^2),\ k = 1, ..., n$, är stokastiskt oberoende. Visa att $\sum_{k=1}^{n} X_k \in N(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2)$.

5. Antag att de stokastiska variablerna X och Y är stokastiskt oberoende och likformigt fördelade i intervallet $[0, 1]$. Visa att de stokastiska variablerna $\sqrt{2 \ln \frac{1}{X}} \cos(2\pi Y)$ och $\sqrt{2 \ln \frac{1}{X}} \sin(2\pi Y)$ är stokastiskt oberoende och att båda tillhör klassen $N(0, 1)$.

6. Låt $X, Y \in N(0, 1)$ vara stokastiskt oberoende. Visa att
$$E\left[e^{\xi \max(X, X+Y)}\right] = e^{\xi^2} \Phi(\xi) + \frac{1}{2} e^{\frac{\xi^2}{2}},\ \xi \in \mathbf{R}.$$

7. Antag $X \in N(\alpha, \sigma^2)$ och $K > 0$.. Beräkna
$$E\left[\max(0, e^X - K)\right].$$

8. Antag att den stokastiska variabeln X har en Gaussisk fördelning med väntevärdet noll. Visa att
$$E\left[e^{\xi X}\right] = e^{\frac{\xi^2}{2}E[X^2]}$$
för alla reella tal ξ.

9. Visa att $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, $x \in \mathbf{R}$, och
$$(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3})\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{x}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}},\ x > 0.$$

10. Visa att
$$1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{2}e^{-x^2/2},\ x \geq 0.$$

11. En reellvärd stokastisk variabel X är Cauchyfördelad med parametrarna $\alpha \in \mathbf{R}$ och $\beta \geq 0$ om
$$d\mu_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\beta dx}{\beta^2 + (x-\alpha)^2}$$
för $\beta > 0$ och $P[X = \alpha] = 1$ för $\beta = 0$. (Detta förkortas $X \in C(\alpha, \beta)$.)

   a) Antag att den stokastiska variabeln X är likformigt fördelad i intervallet $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Visa att $\tan(\pi X) \in C(0, 1)$.

   b) Antag att de stokastiska variablerna $X, Y \in N(0, 1)$ är stokastiskt oberoende. Visa att $\frac{Y}{X} \in C(0, 1)$.

12. Sätt $X(0) = 0$ och $X(t) = tW(\frac{1}{t})$, $t > 0$. Visa att $(X(t))_{t \geq 0}$ är en normaliserad Wienerprocess.

13. Antag den stokastiska variabeln X uppfyller
$$E\left[X^2\right] < \infty.$$
Visa att
$$P[\mid X \mid \geq \varepsilon] \leq \frac{E[X^2]}{\varepsilon^2},\ \varepsilon > 0.$$

14. Antag den stokastiska variabeln X uppfyller

$$E\left[X^2\right] < \infty.$$

Visa Chebishevs olikhet

$$P\left[\mid X - E\left[X\right] \mid \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2},\ \varepsilon > 0.$$

15. Antag den stokastiska variabeln X uppfyller

$$E\left[X^2\right] < \infty.$$

och sätt $\alpha = E\left[X\right]$. Låt $X_1, ..., X_n$ vara stokastiskt oberoende observationer på X. Visa att om $\bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ så gäller att

$$P\left[\mid \bar{Z}_n - \alpha \mid \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{n\varepsilon^2},\ \varepsilon > 0.$$

(Monte Carlometoden beräknar en approximation av α med skattningen $\bar{Z}_n(\omega)$. Monte Carlometoden användes bl a av Ulam under 1940-talet för att göra beräkningar inom kärnreaktorfysik. Metoden utnyttjas fortfarande inom detta område. Namnet "Monte Carlometoden" brukar tillskrivas fysikern Nicholas Metropolis. Monte Carlometoden behandlas utförligt i den utmärkta boken "Monte Carlo Methods" av Hammersley och Handscomb $[HH]$.)

16. Beräkna $\int_0^1 f(x)dx$ approximativt med Monte Carlometoden då *a)* $f(x) = x$ *b)* $f(x) = \sin x$ *c)* $f(x) = \frac{1}{x^{1/4}}$. Välj först 10^3 och därefter 10^6 slumptal.

17. Antag $f(x) = \sin(x+1)$, $x \in \mathbf{R}$. a) Beräkna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

b) Låt $G_1, ..., G_n \in N(0,1)$ vara stokastiskt oberoende. Beräkna approximationer av I med Monte-Carloskattningarna

$$MC_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(G_k)$$

och

$$MC_2 = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(f(G_k)+f(-G_k))$$

då b1) $n = 10^3$. Gör tre försök. b2) $n = 10^6$. Gör tre försök.

18. Låt X vara en stokastisk variabel med värden i $\mathbf{R}^d$ och antag A är en öppen delmängd av $\mathbf{R}^d$. Sätt $p = P\left[X \in A\right]$. Visa att om $X_1, ..., X_n$ är stokastiskt oberoende observationer på X så gäller att

$$P\left[\mid \bar{Z}_n - p \mid \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2},\ \varepsilon > 0,$$

där

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{n}(1_{[X_1\in A]} + ... + 1_{[X_n \in A]}).$$

Monte Carlometoden beräknar en approximation av p med skattningen $\bar{Z}_n(\omega)$.

19. Betrakta ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + bu = 0$$

där $a, b \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$. Välj $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ så att transformationen

$$u(t,x) = e^{\alpha t + \beta x} v(t,x)$$

överför ekvationen på formen

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0\ .$$

20. Lös ekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(T,x) = \max(0,x),\ 0 < t < T,\ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

21. Antag $f(s) = 0$ för $0 < s \leq 1$ och $f(s) = 1$ för $s > 1$. Lös ekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + s\frac{\partial u}{\partial s} - u = 0 \\ u(T,s) = f(x),\ 0 < t < T,\ s > 0. \end{cases}$$

22. Lös ekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + s \frac{\partial u}{\partial s} - u = 0 \\ u(T, x) = \max(0, s),\ 0 < \ t < T,\ s > 0. \end{cases}$$

23. Lös ekvationen

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, x) = \sin x,\ \ t > 0,\ x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Beräkna också lösningen approximativt med en lämplig Monte Carlometod. Gör numeriska jämförelser i specialfallet $t = 4$ och $x = 1$.