## 4. Black-Scholes differentialekvation

I Black-Scholes kapitalmarknadsmodell finns en aktie och en obligation. Aktiepriset $S(t)$, $t \geq 0$, beskrivs på samma sätt som i Bachelier-Samuelsons modell dvs av en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift. Vidare förutsätts att obligationen har priset $B(t) = B(0)e^{rt}$ vid tiden $t$, där $B(0)$ och $r$ är positiva konstanter.

I detta kapitel skall vi arbeta i Black-Scholes modell och försöka prissätta ett enkelt derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $g(S(T))$ vid tiden $T \in ]0, \infty[$. Här gäller att funktionen $g(e^x) \in \mathcal{E}$ dvs $g$ är styckvis kontinuerlig och det existerar ett $C > 0$ så att

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} (e^{-C|x|} \mid g(e^x) \mid) < \infty$$

vilket i kompakt form uttrycks $g \in \mathcal{P}$ (jmfr engelskans "payoff function"). Det är här praktiskt att tillåta utbetalningsfunktioner som eventuellt kan antaga negativa värden (jmfr kapitel 1 och värdering av terminskontrakt).

Vi antar alltså att aktiepriset ges av ekvationen

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t + \sigma W(t)}, \ t \geq 0$$

där $\alpha \in \mathbf{R}$ och $\sigma > 0$ är konstanter och $(W(t))_{t \geq 0}$ som vanligt betecknar en normaliserad Wienerprocess med kontinuerliga trajektorier. Fr o m nu betecknar $t$ dagens datum och i den följande diskussionen förutsätts att $t < T$. Vi kan skriva

$$S(\lambda) = S(t)e^{\alpha(\lambda - t) + \sigma(W(\lambda) - W(t))}, \ t \leq \lambda \leq T.$$

Sätt $\tau = T - t$. Eftersom processerna

$$(W(\lambda) - W(t))_{t \leq \lambda \leq T}$$

och

$$(\sqrt{\tau} W(\frac{\lambda - t}{\tau}))_{t \leq \lambda \leq T}$$

är ekvivalenta i fördelning kan det antas att

$$S(\lambda) = S(t)e^{\alpha(\lambda - t) + \sigma\sqrt{\tau} W(\frac{\lambda - t}{\tau})}, \ t \leq \lambda \leq T.$$

Vi väljer nu först ett $N \in \mathbf{N}_+$ och definierar $h = \tau/N$ och

$$t_n = t + nh,\ n = 0, 1, ..., N.$$

I nästa steg approximeras processen

$$(\sqrt{\tau} W(\frac{\lambda - t}{\tau}))_{t \leq \lambda \leq T}$$

med processen

$$(\sqrt{\tau} W_N(\frac{\lambda - t}{\tau}))_{t \leq \lambda \leq T}$$

där $W_N$ definieras i kapitel 3. Det gäller att processen $(W_N(\lambda))_{\lambda \geq 0}$ har kontinuerliga samplefunktioner, som är affina i varje intervall $\left[\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N}\right]$, $n = 0, 1, 2, ...$, samt

$$W_N(\frac{n}{N}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

där följden $(X_k)_{k=1}^{N}$ är en i.i.d. och

$$P\left[X_1 = 1\right] = P\left[X_1 = -1\right] = \frac{1}{2}.$$

Härigenom får vi ett approximativt aktiepris

$$S_N(\lambda) = S(t) e^{\alpha(\lambda - t) + \sigma \sqrt{\tau} W_N(\frac{\lambda - t}{\tau})},\ t \leq \lambda \leq T.$$

Observera att processen

$$(\alpha(\lambda - t) + \sqrt{\tau} W_N(\frac{\lambda - t}{\tau}))_{t \leq \lambda \leq T}$$

är affin i varje intervall av typen

$$\left[t_n, t_{n+1}\right], k = 0, ..., N - 1$$

och att

$$S(t_n) = S(t) e^{\alpha n h + \sigma \sqrt{h} \sum_{k=1}^{n} X_k},\ n = 0, 1, ..., N$$

(vi följer här konventionen att en summa med mindre övre summationsindex än undre är lika med noll).

Vi skall i nästa steg försöka motivera ett rimligt teoretiskt värde för derivatet ovan. Resonemanget bygger bl a på följande förutsättningar:

$(a)$ derivathandel förekommer endast vid tidpunkterna $t, t_1, ..., t_{N-1}, T$

$(b)$ lämplig regularitet för approximerande optionspriser.

Sätt
$$\tilde{S}(n) = S(t_n)$$
så att
$$\tilde{S}(n+1) = \tilde{S}(n)e^{\alpha h + \sigma\sqrt{h}X_{n+1}}.$$
Vi definierar också
$$\tilde{B}(n) = B(t_n)$$
så att
$$\tilde{B}(n+1) = \tilde{B}(n)e^{rh}.$$

Med dessa beteckningar som bakgrund betraktas en fiktiv tidsdiskret kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $\tilde{S}(n)$ vid tiden $n$, en obligation med priset $\tilde{B}(n)$ vid tiden $n$ och ett derivat i aktien som utbetalar $g(\tilde{S}(N))$ vid tiden $N$. Vi är alltså tillbaka i binomialmodellen. Här gäller alltså att tidsvariabeln $n \in \{0, 1, ..., N\}$,
$$u = \alpha h + \sigma\sqrt{h}$$
och
$$d = \alpha h - \sigma\sqrt{h}.$$
Antag vidare fr o m nu att $N$ är så stort att
$$\alpha h + \sigma\sqrt{h} > rh > \alpha h - \sigma\sqrt{h}$$
så att modellen saknar arbitrage. Låt $V(n)$ beteckna derivatets teoretiska värde vid tiden $n$ och definiera
$$V^u(n+1) = V(n+1)_{|X_{n+1}=+1}$$
och
$$V^d(n+1) = V(n+1)_{|X_{n+1}=-1}.$$
Binomialmodellen ger rekurrensekvationen
$$V(n) = e^{-rh}(q_u V^u(n+1) + q_d V^d(n+1))$$

där

$$q_u = \frac{e^{rh} - e^{\alpha h - \sigma\sqrt{h}}}{e^{\alpha h + \sigma\sqrt{h}} - e^{\alpha h - \sigma\sqrt{h}}}$$

och $q_d = 1 - q_u$. Eftersom vårt finansiella derivat är av enkel typ visar resultaten i kapitel 2 att $V(n)$ är en deterministisk funktion av $\tilde{S}(n)$ så vi kan skriva

$$V(n) = v(t + nh, \tilde{S}(n)).$$

Observera här att $V = V_N$ och $v = v_N$. Subindexet $N$ utesluts ofta i det följande.

Vi går nu vidare och inför beteckningen $s = \tilde{S}(0) = S(0)$. Sätts $n = 0$ i rekurrensekvationen ovan får vi likheten

$$v(t,s)e^{rh} = q_u v(t+h, se^{\alpha h + \sigma\sqrt{h}}) + q_d v(t+h, se^{\alpha h - \sigma\sqrt{h}}).$$

Vidare gäller att

$$q_u = \frac{e^{(r-\alpha)h} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1 + (r-\alpha)h - 1 + \sigma\sqrt{h} - \frac{1}{2}\sigma^2 h + o(h)}{\sigma\sqrt{h} + o(h)},\ h \to 0$$

och efter förenkling erhålls

$$q_u = \frac{1}{2}\frac{1 + (r - \alpha - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{h}}{\sigma} + o(\sqrt{h})}{1 + o(\sqrt{h})}$$

$$= \frac{1}{2} + (r - \alpha - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{h}}{2\sigma} + o(\sqrt{h}),\ h \to 0.$$

Alltså är

$$q_d = \frac{1}{2} - (r - \alpha - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{h}}{2\sigma} + o(\sqrt{h}),\ h \to 0.$$

Funktionen $v = v_N$ har en ändlig definitionsmängd och beror av $N \in \mathbf{N}_+$. Vi antar nu att denna funktions definitionsområde kan utvidgas till området $[t, T[ \times \mathbf{R}$ så att utvidgningen blir en gång kontinuerligt deriverbar i första variabeln (som betecknas med $t$) och två gånger kontinuerligt deriverbar i andra variabeln (som betecknas med $s$) och så att denna funktions beroende av $N$ kan försummas för stora $N$. Detta medför att

$$v(t+h, se^{\alpha h + \sigma\sqrt{h}}) = v(t,s) + \frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h + \frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s(e^{\alpha h + \sigma\sqrt{h}} - 1)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2(e^{\alpha h+\sigma\sqrt{h}}-1)^2+o(h),\ h\to 0.$$

Alltså gäller att

$$v(t+h,se^{\alpha h+\sigma\sqrt{h}})=v(t,s)+\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h+\frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s((\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h+\sigma\sqrt{h})$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2 h+o(h),\ h\to 0.$$

På liknande sätt fås

$$v(t+h,se^{\alpha h-\sigma\sqrt{h}})=v(t,s)+\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h+\frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s((\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h-\sigma\sqrt{h})$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2 h+o(h),\ h\to 0.$$

Vi utnyttjar nu att

$$e^{rh}=1+rh+o(h),\ h\to 0$$

och insättning i ekvationen

$$v(t,s)e^{rh}=q_u v(t+h,se^{\alpha h+\sigma\sqrt{h}})+q_d v(t+h,se^{\alpha h-\sigma\sqrt{h}})$$

ger

$$v(t,s)(1+rh)+o(h)$$

$$=q_u\left\{v(t,s)+\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h+\frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s((\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h+\sigma\sqrt{h})+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2 h\right\}$$

$$+q_d\left\{v(t,s)+\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h+\frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s((\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h-\sigma\sqrt{h})+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2 h\right\}$$

då $h\to 0$. Efter förenkling erhålls

$$v(t,s)rh+o(h)=$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)h+\frac{\partial v}{\partial s}(t,s)s((\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h+(q_u-q_d)\sigma\sqrt{h})+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2 h$$

då $h\to 0$. Vidare gäller att

$$(\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h+(q_u-q_d)\sigma\sqrt{h}=(\alpha+\frac{\sigma^2}{2})h+2(r-\alpha-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\sqrt{h}}{2\sigma}\sigma\sqrt{h}+o(h)$$

$$= rh + o(h),\ h \to 0$$

(parametern $\alpha$ försvinner!) och det följer att

$$v(t,s)r = \frac{\partial v}{\partial t}(t,s) + \frac{\partial v}{\partial s}(t,s)sr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s)s^2\sigma^2.$$

Denna partiella differentialekvation, som framkommer i Black och Scholes publikation [$BS$] från 1973, kallas Black-Scholes differentialekvation och brukar skrivas

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s) + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s) + rs\frac{\partial v}{\partial s}(t,s) - rv(t,s) = 0,\ 0 \le t < T.$$

Vårt ursprungliga derivat uppfyller också slutvillkoret

$$v(T,s) = g(s).$$

I sats 5, kapitel 3, kom vi fram till att denna ekvation har lösningen

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g\left(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)}\right)\right]$$

där $\tau = T - t$. Det ursprungliga derivatets teoretiska värde vid tiden $t$ definieras därför lika med $v(t, S(t))$. Detta pris kallas för Black-Scholes pris för det aktiella derivatet. Det kan påpekas ytterligare en gång att detta pris inte beror på log-prisets driftskoefficient $\alpha$. Black-Scholes prisformel gäller även för $t = T$ då $\tau = 0$.

Vi sammanfattar ovanstående i följande viktiga definition.

**Definition 1.** *Antag $g \in \mathcal{P}$. Ett enkelt derivat av europeisk typ som utbetalar beloppet $Y = g(S(T))$ slutdagen $T$ har det teoretiska värdet $\Pi_Y(t) = v(t, S(t))$ vid tiden $t$, där*

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g\left(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)}\right)\right]$$

*och $\tau = T - t$.*

Om vi går tillbaka till härledningen av Black-Scholes differentialekvation och följer funktionerna $h_S$ och $h_B$ i den diskreta modellen till gräns ($N \to \infty$) så får vi med samma beteckning för gränsvärdena att

$$h_S(t) = \frac{\partial v}{\partial s}(t, S(t))$$

och

$$v(t, S(t)) = h_S(t)S(t) + h_B(t)B(t).$$

Högra ledet kan tolkas som ett innehav i aktien och obligationen som i varje tidpunkt har samma värde som optionen. Portföljstrategin kräver en initial investering men borde i övrigt vara självfinansierad eftersom den approximerande tidsdiskreta portföljstrategin är självfinansierande. Att reda upp motsvarande definitioner ordentligt i kontinuerlig tid kräver stokastisk kalkyl och faller utom ramen för denna kurs. Om $v(t, S(t)) \neq 0$ kan ekvationen

$$1 = \frac{h_S(t)}{v(t, S(t))}S(t) + \frac{h_B(t)}{v(t, S(t))}B(t)$$

tolkas som en relativ portfölj i aktien och obligationen. Om $S(t) = s$ så är det relativa aktievärdet lika med

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial s}}{v}\, s = \frac{\frac{\partial v}{v}}{\frac{\partial s}{s}} \quad \text{(symboliskt)}.$$

Detta uttryck brukar kallas optionsprisets elasticitet med avseende på aktiepriset.

Antag $g_i \in \mathcal{P}$, $i = 1, ..., m$, och låt $a_i$, $i = 1, ..., m$, vara fixa reella tal. Om

$$\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(e^x) \geq 0, \text{ alla } x \in \mathbf{R}$$

så följer att

$$V_{\mathcal{A}}(t) = e^{-r\tau} E\left[\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(se^{r\tau} M_\sigma(\tau))\right] \geq 0.$$

Dominansprincipen gäller alltså för portföljer som endast innehåller obligationen och enkla finansiella derivat av europeisk typ.

**Sats 1.** *En europeisk köpoption med slutdagen $T$ och lösenpriset $K$ har värdet $c(t,S(t),K)$ vid tiden $t<T$ där*

$$c(t,s,K) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{s}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

*och*

$$d_2 = \frac{\ln\frac{s}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

*En europeisk säljoption med slutdagen $T$ och lösenpriset $K$ har värdet $p(t,S(t),K)$ vid tiden $t<T$ där*

$$p(t,s,K) = Ke^{-r\tau}\Phi(-d_2) - s\Phi(-d_1).$$

**Bevis.** Definition 1 ger att

$$c(t,s,K) = e^{-r\tau}E\left[\max(0, se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau-\sigma\sqrt{\tau}G} - K)\right]$$

där $G$ är en $N(0;1)$-fördelad stokastisk variabel. Härav följer att

$$c(t,s,K) = e^{-r\tau}E\left[se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau-\sigma\sqrt{\tau}G} - K;\ G \le \frac{\ln\frac{s}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

och därmed är

$$c(t,s,K) = e^{-r\tau}\left\{E\left[se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau-\sigma\sqrt{\tau}G};\ G\le d_2\right] - K\Phi(d_2)\right\}.$$

Vidare är

$$e^{-r\tau}E\left[se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau-\sigma\sqrt{\tau}G};\ G\le d_2\right] = s\int_{x\le d_2} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau-\sigma\sqrt{\tau}x-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

där högra ledet är lika med

$$s\int_{x\le d_2} e^{-\frac{(\sigma\sqrt{\tau}+x)^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = s\Phi(\sigma\sqrt{\tau}+d_2) = s\Phi(d_1).$$

Säljoptionens värde kan härledas på liknande sätt. Alternativt kan vi utnyttja dominansprincipen som visar att

$$p(t, s, K) = Ke^{-r\tau} - s + c(t, s, K)$$

och här sätta in Black-Scholes köpoptionspris. Det avslutar beviset för sats 1.

$$\Lambda$$

Resultaten i kapitel 1 visar att amerikanska köpoptioner (utan utdelning i den bakomliggande aktien) värderas som motsvarande europeiska kontrakt. För den amerikanska säljoptionen finns idag ingen känd analytiskt given prisformel. Om $v(t, S(t))$ betecknar värdet vid tiden $t$ för en amerikansk säljoption med lösenpriset $K$ och slutdagen $T$ så gäller att $v$ uppfyller Black-Scholes differentialekvation i ett från början okänt område av typen

$$D = \{(t, s);\ s > b(t),\ 0 \le t < T\}$$

där $b$ är en växande, kontinuerligt deriverbar funktion sådan att

$$\lim_{t \to T-} b(t) = K.$$

Vidare gäller att

$$\begin{aligned} v(t, s) &> \max(K - s, 0),\ (t, s) \in D, \\ v(t, s) &= \max(K - s, 0),\ (t, s) \in \partial D \end{aligned}$$

och

$$\frac{dv}{ds}(t, b(t)+) = -1,\ 0 \le t < T.$$

Det är optimalt att lösa in optionen om $S(t) < b(t)$. Den kritiska randen $s = b(t)$ beskrivs ej heller av något känt analytiskt uttryck. Det finns explicita prisformler för den amerikanska säljoptionen i termer av den kritiska randen $[CJM]$. Om $T \to +\infty$ får optionen oändlig löptid ("perpetual option"). Låt $v = v(s)$ vara värdet för rättigheten att sälja aktien till priset $K$ vid varje tidpunkt i framtiden. Då gäller att

$$\frac{\sigma^2 s^2}{2} \frac{d^2 v}{ds^2} + rs \frac{dv}{ds} - rv = 0.$$

Denna Eulerekvation har de linjärt oberoende lösningarna $v = s$ och $v = s^{-\gamma}$ där

$$\gamma = \frac{2r}{\sigma^2}.$$

Den första lösningen är ej begränsad då $s \to \infty$ och saknar intresse här. Antag därför $v = As^{-\gamma}$. Om

$$v(s) = K - s$$

och

$$\frac{dv}{ds}(s) = -1$$

blir

$$s = \frac{\gamma K}{1+\gamma}.$$

Definieras

$$b = \frac{\gamma K}{1+\gamma}.$$

så är därför

$$v(s) = \frac{K}{1+\gamma}\left(\frac{b}{s}\right)^{\gamma}, \ s > b.$$

För mer information om den amerikanska säljoptionen hänvisas till $[CJM]$, $[MY]$ och $[WDH]$ (nedan ges också några numeriska illustrationer).

Sats 1 kan användas för vissa valutaberoende finansiella derivat. Som ett exempel antar vi att dollarkusen i kr är lika med $\xi(t)$ vid tiden $t$ och betraktar rättigheten att få köpa en dollar för $K$ kr vid tiden $T$ om innehavaren av kontraktet har lust. Vi möter alltså här ett kontrakt av europeisk typ med utbetalningen

$$Y = \max(0, \xi(T) - K)$$

vid tiden $T$. En dollar skiljer sig mycket från en aktie. T ex är ett dollarlån ej gratis ens på en friktionsfri marknad. Trots detta kan det aktuella kontraktet värderas med hjälp av sats 1. Om vi antar att den amerikanska marknaden erbjuder en obligation med priset $B_a(t) = B_a(0)e^{r_a t}$ vid tiden $t$, där räntan $r_a$ är en positiv konstant, så kan vi uppfatta

$$S(t) = B_a(t)\xi(t), \ t \geq 0$$

som prisprocessen för ett svenskt värdepapper (med historiska veckonoteringar för dollarkursen under de senaste 12 åren skattar vi volatiliteten för dollarkursen i kr till ungefär 10.4% per år). Vi kan nu skriva

$$Y = B_a(T)^{-1} \max(0, S(T) - B_a(T)K)$$

och får att optionens värde $v(t)$ vid tiden $t < T$ ges av

$$v(t) = B_a(T)^{-1} c(t, S(t), B_a(T)K; T) =$$

$$B_a(T)^{-1} \left( B_a(t)\xi(t)\Phi(D_1) - B_a(T)Ke^{-r\tau}\Phi(D_2) \right)$$

där $\tau = T - t$,

$$D_1 = \frac{\ln \frac{B_a(t)\xi(t)}{B_a(T)K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} =$$

$$\frac{\ln \frac{\xi(t)}{K} + (r - r_a + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och

$$D_2 = \frac{\ln \frac{\xi(t)}{K} + (r - r_a - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Efter någon förenkling följer att

$$v(t) = \xi(t)e^{-r_a t}\Phi(D_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(D_2)$$

(se Garman och Kohlhagen [$GK$]). Optionen att få sälja en dollar för $K$ kr vid tiden $T$ kan behandlas på liknande sätt. Optionen att få köpa en IBM-aktie till ett föreskrivet belopp i kr ett givet framtida datum kan inte behandlas lika enkelt. Detta derivat beror på två bruskällor, en från valutakursen och en från aktien.

Sats 1 kan även användas för att värdera köpoptioner på terminskontrakt. Antag $t < T < T_1$ och betrakta ett finansiellt derivat som vid tiden $T$ dels ger innehavaren ett nytecknat terminskontrakt i aktien med leverans vid tiden $T_1$, dels en utbetalning på beloppet

$$Y = \max(0, S^{T_1}_{term}(T) - K).$$

Kom ihåg att ett terminskontrakt är värdeklöst vid tecknandet och att

$$Y = e^{r(T_1 - T)} \max(0, S(T) - Ke^{-r(T_1 - T)}).$$

Det aktuella kontraktet har därför vid tiden $t$ värdet

$$e^{r(T_1-T)}c(t,S(t),Ke^{-r(T_1-T)};T)$$

$$= e^{r(T_1-T)}\left\{S(t)\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{Ke^{-r(T_1-T)}}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t)}})\right.$$

$$\left.-Ke^{-r(T_1-T)}e^{-r(T-t)}\Phi(\frac{\ln\frac{S(t)}{Ke^{-r(T_1-T)}}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t)}})\right\}$$

$$= e^{r(T-t)}\left\{S(t)\Phi(\frac{\ln\frac{S^T_{term}(t)}{K}+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t)}})-K\Phi(\frac{\ln\frac{S^T_{term}(t)}{K}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t)}})\right\}$$

Denna formel kallas "Blacks 76-formel".

Överensstämmer Black-Scholes optionspris med marknadens priser? Låt oss titta på en köpotion. En kalkyl visar att

$$\frac{\partial c}{\partial\sigma}=\frac{\partial p}{\partial\sigma}=s\Phi'(d_1)\sqrt{\tau}=se^{-d_1^2/2}\sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}>0.$$

Vidare gäller att

$$\lim_{\sigma\to 0+}c(t,s,K)=\max(0,s-Ke^{-r\tau})$$

och

$$\lim_{\sigma\to\infty}c(t,s,K)=s.$$

Om $s=S(t)$ och

$$\max(0,s-Ke^{-r\tau})<\text{marknadspriset vid}\quad t<s$$

för $t<T$ (vilket är högst sannolikt) så kan därför $\sigma$ skattas så att det råder ett perfekt samband mellan teoretiskt optionpris och marknadens optionspris. Denna skattning av standardavvikelsen kallas för den implicita standardavvikelsen för aktiepriset. Som funktion av lösenpriset är den implicita standardavvikelsen ofta en strikt konvex funktion med ett minimum nära aktiepriset ("volatility with a smile"). Denna funktion borde vara i det närmaste konstant om Black-Scoles optionspriser vore helt invändningsfria. En del forskare inom optionsområdet har hävdat att avvikelserna mellan teoretiska priser och marknadspriser i regel är små och försumbara. Andra har

uttryckt att Black-Scholes teori kan bilda utgångspunkt för en förfinad teori. För mer information om dessa påståenden, se Gemmills bok $[GEM]$.

Det är också en vanlig uppfattning att Black-Scholes teori undervärderar en köpoption då aktiepriset är mindre än lösenpriset ("out of the money call") och på samma sätt undervärderar teorin en säljoption då aktiepriset är större än lösenpriset ("out of the money put"). Av relationen

$$c(t, S(t), K) - S(t) = p(t, S(t), K) - Ke^{r\tau}$$

följer då också att teorin undervärderar en europeisk köpoption då aktiepriset är större än lösenpriset ("in the money call") och teorin undervärderar en europeisk säljoption då aktiepriset är mindre än lösenpriset ("in the money put"). Det kan i detta sammanhang vara värt att påpeka att det på det på marknaden inte finns köp- och säljoptioner svarande mot alla lösenpriser $K > 0$. För mer information hänvisas återigen till Gemmills bok $[GEM]$.

Vi avslutar detta kapitel med en del numeriska resultat. Betrakta först ett enkelt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen $g$. Vi skall bestämma dess värde $v(t, S(t))$ vid tiden $t$ med den binomialapproximation som ledde till definitionen av Black-Scholes optionspris. Med beteckningar som ovan erhålls först att

$$v(t_N, se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}) = g(se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}),\ j = 0, 1, ..., N$$

och sedan successivt för $n = N-1, N-2, ...., 1, 0$, att

$$v(t_n, se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}}) = e^{-rh}(q_u v(t_{n+1}, se^{(n+1-2j)\sigma\sqrt{h}}) + q_d v(t_{n+1}, se^{(n-1-2j)\sigma\sqrt{h}}))$$

för $j = 0, 1, ..., n$ där

$$q_u = \frac{e^{rh} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

och $q_d = 1 - q_u$. Vi har alltså valt driftskoefficienten $\alpha$ för log-priset lika med 0 (jmfr $[H]$).

Som numerisk illustration betraktar vi först europeiska köpoptioner i en aktie vars pris har volatiliteten 20 procent per år och aktiekursen 40 kr i detta ögonblick. Räntan antages vara 5 procent per år (dvs den kontinuerliga räntan är $\ln 1.05$ procent per år). De teoretiska priserna för köpoptionerna beräknas exakt med hjälp av sats 1. Som jämförelse beräknas i några specialfall köpoptionsvärden med binomialapproximationen för $N = 5$, $N = 20$ och $N = 50$.

*exakta värden*

| $K \backslash \tau$ | 1/12 | 4/12 | 7/12 |
|---|---|---|---|
| 35 | 5.15 | 5.76 | 6.40 |
| 40 | 1.00 | 2.17 | 3.00 |
| 45 | 0.02 | 0.51 | 1.10 |

$N = 5$

| $K \backslash \tau$ | 1/12 | 4/12 | 7/12 |
|---|---|---|---|
| 35 | 5.14 | 5.77 | 6.45 |
| 40 | 1.05 | 2.26 | 3.12 |
| 45 | 0.02 | 0.54 | 1.15 |

$N = 20$

| $K \backslash \tau$ | 1/12 | 4/12 | 7/12 |
|---|---|---|---|
| 35 | 5.15 | 5.77 | 6.39 |
| 40 | 0.99 | 2.14 | 2.97 |
| 45 | 0.02 | 0.51 | 1.11 |

$N = 50$

| $K \backslash \tau$ | 1/12 | 4/12 | 7/12 |
|---|---|---|---|
| 35 | 5.15 | 5.76 | 6.40 |
| 40 | 1.00 | 2.16 | 2.99 |
| 45 | 0.02 | 0.51 | 1.11 |

Om vi simulerar 1 miljon Gaussiska slumptal och beräknar motsvarande köpoptionsvärden med Monte Carlometoden får vi i enskilda försök följande jämförelser:

*exakta värden*

| $K \backslash \tau$ | 1/12 | 4/12 | 7/12 |
|---|---|---|---|
| 35 | 5.15 | 5.76 | 6.40 |
| 40 | 1.00 | 2.17 | 3.00 |
| 45 | 0.02 | 0.51 | 1.10 |

$10^6$ *slumptal*

| $K \backslash \tau$ | 1/12 | 4/12 | 7/12 |
|---|---|---|---|
| 35 | 5.15 | 5.75 | 6.40 |
| 40 | 1.00 | 2.17 | 3.00 |
| 45 | 0.02 | 0.51 | 1.11 |

För ett enkelt amerikanskt kontrakt med utbetalningsfunktionen $g$ måste hänsyn tas till att det kan vara optimalt att lösa in kontraktet före slutdagen. Liksom för motsvarande europeiska kontrakt gäller att

$$v(t_N, se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}) = g(se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}),\ j = 0, 1, ..., N.$$

Därefter beräknas successivt för tidpunkterna $t_n, n = N-1, N-2, ...., 2, 1, 0,$ optionspriserna

$$v(t_n, se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}})$$

$$= \max(g(se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}}), e^{-rh}(q_u v(t_{n+1}, se^{(n+1-2j)\sigma\sqrt{h}}) + q_d v(t_{n+1}, se^{(n-1-2j)\sigma\sqrt{h}})))$$

för $j = 0, 1, ..., n$. Som numerisk illustration väljer vi en amerikansk säljoption i en aktie vars pris har volatiliteten 20 procent per år och som just nu har värdet 40 kr. Räntan antages som ovan vara 5 procent per år. För lösenpriset $K = 45$ och tidslängden $\tau = 4/12$ till slutdagen erhålls säljoptionsvärdet 5.08 om $N = 25$ och 5.09 om $N = 50, 75$ , 100 och 150. För motsvarande europeiska säljoption är värdet 4.78. Om istället $\tau = 1/12$ blir det amerikanska säljoptionsvärdet 5 och en närmare analys visar att det är optimalt att lösa in optionen.

## Övningar

I nedanstående övningar i detta kapitel förutsätts Black-Scholes optionspriser och de standardbeteckningar vi infört ovan.

1. Antag tiden mäts i år och att räntan $r = \ln 1.05$. Betrakta en aktie med volatiliteten $\sigma = 0.27$ och en europeisk köpoption i aktien med slutdagen 20 mars och lösenpriset 100 kr. Under perioden 20 januari-20 februari stiger aktiepriset från 97 kr till 112 kr. Med hur många procent stiger det teoretiska optionspriset under samma period?

2. Låt $\varphi = \Phi'$ och $c = c(t, s, K; T)$. Visa att

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \Phi(d_1) \qquad (Delta)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial s^2} = \frac{\varphi(d_1)}{s\sigma\sqrt{\tau}} \qquad (Gamma)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = K\tau e^{-r\tau}\Phi(d_2) \qquad (Rho)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{s\varphi(d_1)\sigma}{2\sqrt{\tau}} - rKe^{-r\tau}\Phi(d_2) \qquad (Theta)$$

och

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = s\varphi(d_1)\sqrt{\tau} \qquad (Vega).$$

Varför gäller att

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\, Gamma + rS\, Delta + Theta = rc?$$

3. Antag $g \in \mathcal{P}$ och $Y = g(S(T))$. Sätt $\Pi_Y(t) = v(t, S(t))$ och visa att

$$\frac{\partial v}{\partial s}(t,s) = \frac{e^{-r\tau}}{s\sigma\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})W(\tau)\right]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(t,s) = \frac{e^{-r\tau}}{s^2\sigma\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})(\frac{W^2(\tau)}{\sigma\tau} - W(\tau) - \frac{1}{\sigma})\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})(\frac{W(\tau)}{\sigma} - \tau)\right]$$

och

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma}(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma W(\tau)})(\frac{W^2(\tau)}{\sigma\tau} - W(\tau) - \frac{1}{\sigma})\right]$$

för $\tau = T - t > 0$.

4. Antag $K$ och $L$ är positiva konstanter.

   *a*) **(”cash or nothing call”)** Ett europeiskt derivat i aktien utbetalar ingenting om aktiepriset understiger $K$ slutdagen $T$ och i annat fall utbetalar derivatet beloppet $L$ denna dag. Bestäm derivatets värde vid tiden $t$.

   *b*) **(”asset or nothing call”)** Ett europeiskt derivat i aktien utbetalar ingenting om aktiepriset understiger $K$ slutdagen $T$ och i annat fall utbetalar derivatet beloppet $S(T)$ denna dag. Bestäm derivatets värde vid tiden $t$.

5. (Speciell **”as you like it”** option eller **”chooser”** option) Låt $t < T < T_1$ och $K > 0$. Ett finansiellt derivat ger innehavaren rättigheten, men ej skyldigheten, att vid tiden $T$ välja antingen en europeisk köpoption i aktien med slutdagen $T_1$ och lösenpriset $K$ eller en europeisk säljoption i aktien med slutdagen $T_1$ och lösenpriset $K$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t$.

6. Visa att

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = \frac{sd_1d_2}{\sigma}\varphi(d_1)\sqrt{\tau}$$

och dra slutsatsen att funktionen $\sigma \to c(t,s,K;T)$ är en konvex funktion i intervallet $]0,\sigma_0]$ och en konkav funktion i intervallet $[\sigma_0,\infty[$ , där

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{\tau} \mid \ln \frac{se^{r\tau}}{K} \mid}.$$

7. Sätt $g(\tau) = c(t,1,1;T)$ då $T \geq \tau = T - t \geq 0$ och observera att $c(t,s,s;T) = sg(T-t)$. Nedan antages att $1/T + 2r + \sigma^2/4 \geq r^2/\sigma^2$.

   a) Visa att $g$ är konkav och $g(0) = 0$. Dra slutsatsen att $g(\lambda\tau) \geq \lambda g(\tau)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \tau \leq T$. Rita slutligen grafen för funktionen $y = g(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$ då $T = 1$, $\sigma = 0.25$ och $r = \ln 1.05$.

   $b$) Låt $t \leq t_* < T$. Ett derivat i aktien utbetalar $\max(0, S(T) - S(t_*))$ vid tiden $T$. Visa att derivatets teoretiska värde vid tiden $t$ är lika med $S(t)g(T - t_*)$.

   $c$) (**"tandem option"**) Låt $\tau = T - t > 0$ och sätt $t_j = t + \frac{j}{n}\tau$, $j = 0, ..., n$ där $n \in \mathbf{N}_+$. Ett derivat utbetalar $\max(0, S(t_j) - S(t_{j-1}))$ vid tiden $t_j$ för $j = 1, ..., n$. Visa att derivatets teoretiska värde vid tiden $t$ är lika med $nS(t)g(\tau/n)$ och dra slutsatsen att detta värde ej understiger $c(t, S(t), S(t); T)$.

8. Visa att ett enkelt derivat av europeisk typ i aktien med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ och slutdagen $T$ har värdet $v(t, S^T_{term}(t))$ vid tiden $t$ där

$$v(t, s_{term}) = e^{-r\tau} E\left[g(s_{term} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma W(\tau)})\right]$$

   där $G \in N(0,1)$.

9. Ett enkelt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ och slutdagen $T$ har värdet $v(t, S(t))$ vid tiden t där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{r-\tau e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau + \sigma W(\tau)}})\right].$$

   Antag funktionen $g$ endast antager positiva värden och att funktionen $\ln g(e^x)$ är en konvex funktion av $x$. Visa att optionsprisets elasticitet med avseende på aktiepriset är en växande funktion av aktiepriset $s$.

10. En amerikansk säljoption i aktien med slutdagen $T$ och lösenpriset $K$ har det teoretiska priset $P(t, S(t), K; T)$ vid tiden $t$. Antag $\sigma = 0.25$, $r = \ln 1.05$, $t = 0$, $T = 1/6$, och $K = 45$. Rita grafen för funktionen $y = P(s) = P(t, s, K; T)$, $35 \leq s \leq 54$. Rita i samma koordinatsystem grafen för funktionen $y = \max(0, K - s)$, $35 \leq s \leq 54$.

11. Antag $g \in \mathcal{P}$ och

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)})\right]$$

där $\tau = T - t$. Visa att

$$v(t,s) = e^{-r\tau_*} E\left[v(t_*, se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau_* + \sigma W(\tau_*)})\right]$$

för $t \leq t_* \leq T$ där $\tau_* = t_* - t$. (Ledning: Om $G, G' \in N(0,1)$ är stokastiskt oberoende så gäller att $\sqrt{\tau_*}G + \sqrt{T - t_*}G' \in N(0,\tau)$.)

12. Låt $P(t, S(t), K)$ beteckna det teoretiska värdet vid tiden $t$ för en amerikansk säljoption i aktien med slutdagen $T$ och lösenpriset $K$ och låt $p(t, S(t), K)$ beteckna det teoretiska värdet för motsvarande säljoption av europeisk typ. Antag

$$t = t_0 < ... < t_N = T$$

betecknar en indelning av intervallet $[t, T]$ som i texten ovan så att $t_k - t_{k-1} = \tau/N$, $k = 1, ..., N$. Skillnaden

$$P(t, s, K) - p(t, s, K)$$

kan approximeras med $v_a(t_0, s)$ $-v_e(t_0, s)$ som bestäms genom följande algoritm: beräkna först

$$v_a(t_N, se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}) = v_e(t_N, se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}) =$$

$$\max(0, K - se^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}),\ j = 0, 1, ..., N;$$

definiera

$$p = \frac{e^{rh} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

och $q = 1 - p$ och beräkna därefter successivt för tidpunkterna $t_n, n = N-1, N-2, ...., 2, 1, 0$, optionspriserna

$$v_a(t_n, se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}}) =$$

$$\max(K - se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}}, e^{-rh}(pv_a(t_{n+1}, se^{(n+1-2j)\sigma\sqrt{h}}) + qv_a(t_{n+1}, se^{(n-1-2j)\sigma\sqrt{h}}))$$

och

$$v_e(t_n, se^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}}) \quad =$$

$$e^{-rh}(pv_e(t_{n+1}, se^{(n+1-2j)\sigma\sqrt{h}}) + qv_e(t_{n+1}, se^{(n-1-2j)\sigma\sqrt{h}}))$$

för $j = 0, 1, ..., n.$

a) Hur stort behöver $N$ vara för att ge ett approximativt bra värde på $P(t, s, K) - p(t, s, K)$ med denna algoritm?

b) Hur stort behöver $N$ vara för att ge ett approximativt bra värde på $P(t, s, K)$ med binomialapproximationen?

Experimentera med datorn! Studera också gärna artikeln $[HW]$.