8. Måtteori

Måtteori utgör en av matematikens äldsta områden främst beroende på ett uråldrigt intresse för geometriska mått såsom bågländ, area, volym osv. I gymnasiet studeras Exodus uttömningsförfarande, som i inledande högskolekurser i matematik leder fram till Riemanns integralbegrepp. Den mått- och integrationsteori, som har visat sig särskilt användbar inom teorierna för differentialekvationer, Fourieranalys och stokastiska processer, utvecklades dock först i början av 1900-talet, främst genom den franske matematikern Lebesgue. Inom teorin för finansiella derivat uppträder det så kallade riskneutrala måttet för första gången omkring 1980 och det har sedan dess spelat en mycket central roll för att vidareutveckla teorin.

Det finns ett stort antal mycket bra böcker inom mått- och integrationsteori (en av dessa är enligt författarens mening Nevues klassiska bok "Mathematical Foundations of the Calculus of Probability "[N]). Vi återger här delar av denna viktiga teori och gör emellanåt vissa antydningar mot sannolikhetsteori för att träna in begreppsbildningen. Bevis går vi sällan in på. Vårt syfte är främst att nöta in en formalism som är mycket användbar bl a inom finansiell matematik.

Vi börjar med en del mängdteoretiska begrepp. Antag R är en abstrakt mängd. Vi skriver $A \subseteq R$ om varje element i A också tillhör R och säger att A är en delmängd av R. Alternativt säger vi i detta fall att R omfattar A och skriver $R \supseteq A$. Om $A, B \subseteq R$ definieras snittet

$$A \cap B = \{x \in R;\, x \in A \text{ och } \ x \in B\}$$

och unionen

$$A \cup B = \{x \in R;\, x \in A \text{ eller } x \in B\}\,.$$

Dessa operationer utvidgas lätt till ett godtyckligt antal mängder. Vidare definieras

$$A \setminus B = \{x \in R;\, x \in A \text{ och } \ x \notin B\}\,.$$

Mängden $R \setminus B$ kallas för komplementet till B. Tomma mängden betecknas med $\emptyset$. Två mängder sägs vara disjunkta om snittet av dem är tomt.

En klass $\mathcal{A}$ av delmängder av R kallas för en σ-algebra av delmängder av R om

(i) $R \in \mathcal{A}$

(*ii*) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow R \setminus A \in \mathcal{A}$

(*iii*) $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbf{N} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

I detta fall kallas det ordnade paret $(R, \mathcal{A})$ för ett mätbart rum. Klassen $\{\emptyset, R\}$ är σ-algebra av delmängder av R. Detsamma gäller klassen 2^R bestående av alla delmängder av R. Notera att snittet av σ-algebror av delmängder av R är en ny σ-algebra varför det till varje given klass $\mathcal{C}$ av delmängder av R finns en minsta σ-algebra av delmängder av R (med avseende på mängdinklusion) som omfattar $\mathcal{C}$. Denna σ-algebra sägs genereras av $\mathcal{C}$ och betecknas med $\sigma(\mathcal{C})$. Den σ-algebra som genereras av de öppna delmängderna av $\mathbf{R}^n$ kallas för Borel-σ-algebran i $\mathbf{R}^n$ och betecknas med $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$. Om $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ kallas A en Borelmängd i $\mathbf{R}^n$(efter den franske matematikern Borel, som för övrigt var Lebesgues lärare). Man kan visa att $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ genereras av alla slutna (eller öppna) delintervall av $\mathbf{R}$. Det är inte lätt att få en känsla för vad som är en Borelmängd ens i en dimension.

Om R är en ändlig mängd kan vi på ett mycket konkret sätt beskriva alla σ-algebror av delmängder av R. För att förklara detta antar vi först att $A_1, ..., A_n$ är parvis disjunkta delmängder av R vars union är lika med R dvs

$$A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$$

och

$$\cup_{i=1,...,n} A_i = R.$$

Under dessa omständigheter sägs $(A_i)_{i=1}^n$ vara en partition av R. Vi definierar

$$\mathcal{A} = \{\cup_{i\in I} A_i;\ I \text{ godtyckliglig delmängd av } \{1, ..., n\}\}.$$

Klassen $\mathcal{A}$ av delmängder av R är en σ-algebra. Observera att

$$\cup_{i\in I} A_i = \emptyset \text{ om } I = \emptyset.$$

Omvänt om $\mathcal{A}$ är en σ-algebra av delmängder av den ändliga mängden R så låter vi $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ vara klassen av alla $A \in \mathcal{A}$ som har egenskapen att

$$B \in \mathcal{A},\ B \subseteq A,\ B \neq \emptyset \Rightarrow B = A.$$

Definitionen innebär att $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ besstår exakt av de element A i $\mathcal{A}$ som inte har någon icke-tom delmängd skild från A i σ-algebran $\mathcal{A}$. Klassen $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ är en partition av R och om $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = (A_i)_{i=1}^n$ så är

$$\mathcal{A} = \{\cup_{i\in I} A_i;\ I \text{ godtyckliglig delmängd av } \{1, ..., n\}\}.$$

För godtyckligt R finns ingen liknande beskrivning av σ-algebror av delmängder av R.

Om R_0 och R_1 är två mängder och $f : R_0 \to R_1$ en funktion så definieras

$$f^{-1}(A) = \{x \in R_0; f(x) \in A\}$$

för varje delmängd A av R_1. Speciellt gäller att

$$f^{-1}(R_1 \setminus A) = R_0 \setminus f^{-1}(A).$$

Antag nu att $(A_j)_{j \in J}$ är en godtycklig familj delmängder av R_1. Av definitionerna följer lätt att

$$f^{-1}(\cap_{j \in J} A_j) = \cap_{j \in J} f^{-1}(A_j)$$

och

$$f^{-1}(\cup_{j \in J} A_j) = \cup_{j \in J} f^{-1}(A_j).$$

Om $(R_1, \mathcal{A}_1)$ är ett mätbart rum och $f : R_0 \to R_1$ så definieras

$$f^{-1}(\mathcal{A}_1) = \left\{ f^{-1}(A);\ A \in \mathcal{A}_1 \right\}.$$

Härav följer att $f^{-1}(\mathcal{A}_1)$ är en σ-algebra av delmängder av R_0. Denna betecknas ofta $\sigma(f)$ om missförstånd ej kan inträffa.

Antag $(R_0, \mathcal{A}_0)$ och $(R_1, \mathcal{A}_1)$ är två mätbara rum och $f : R_0 \to R_1$ en funktion sådan att

$$\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_0.$$

Funktionen f sägs i detta fall vara $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$-mätbar eller helt enkelt bara mätbar om missförstånd ej kan inträffa. Inom klassisk analys spelar mätbarhetsbegreppet en ganska liten roll. Det är främst genom stokastisk analys begreppet fått stor betydelse och vi får efterhand se varför.

Antag att $(R, \mathcal{A})$ är ett mätbart rum. En funktion μ definierad i hela $\mathcal{A}$ och med värden i intervallet $[0, +\infty]$ kallas ett positivt mått om $\mu(\emptyset) = 0$ och

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

för varje sekvens $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbf{N}$, av parvis disjunkta mängder. Den ordnade tripeln $(R, \mathcal{A}, \mu)$ sägs i detta fall vara ett positivt måttrum. Råkar $\mu(R) < +\infty$ kallas μ för ett ändligt positivt mått och om $\mu(R) = 1$ kallas μ för ett sannolikhetsmått. Den ordnade tripeln $(R, \mathcal{A}, \mu)$ kallas för ett ändligt positivt måttrum om μ är ett ändligt positivt mått och ett sannolikhetsrum om μ är ett sannolikhetsmått. Sannolikhetsrum betecknas ofta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Om $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum sägs ibland (något oprecist) μ vara ett positivt mått i R. Det så kallade räknemåttet c_R i R som definieras av att $c_R(A)$ är lika med antalet element i A för varje $A \in \mathcal{A}$ är ett konkret och enkelt exempel på ett positivt mått.

Om $(R, \mathcal{A})$ är ett positivt måttrum och mängden R är ändlig så kan vi lätt beskriva alla positiva mått definierade på σ-algebran $\mathcal{A}$. För att förklara detta låt σ-algebran $\mathcal{A}$ ge partitionen $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = (A_i)_{i=1}^n$av R. Om $A \in \mathcal{A}$ definieras $I(A) = \{i; i \in \{1, ..., n\}$ och $A_i \subseteq A\}$ så att

$$A = \cup_{i \in I(A)} A_i.$$

Om μ är ett positivt mått definierat på σ-algebran $\mathcal{A}$ så är

$$\mu(A) = \sum_{i \in I(A)} \mu(A_i).$$

Omvänt kan vi definiera ett positivt mått μ på σ-algebran $\mathcal{A}$ utifrån givna $a_1, ..., a_n \in [0, \infty]$ genom sätta

$$\mu(A) = \sum_{i \in I(A)} a_i, \ A \in \mathcal{A}.$$

Positiva mått definierade på σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ kallas för positiva Borelmått i $\mathbf{R}^n$. Ett ändligt positivt Borelmått μ på $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ är inre reguljärt med avseende på kompakta delmängder i den meningen att

$$\mu(A) = \sup \{\mu(K); K \text{ kompakt} \subseteq A\}, \ A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n).$$

Om vi talar om ett positivt mått i $\mathbf{R}^n$ är det underförstått att måttet är ett positivt Borelmått om inte annat anges.

Två ändliga positiva Borelmått i $\mathbf{R}$ som ger samma mått för alla delintervall av $\mathbf{R}$ är lika.

Det finns exakt ett positivt mått m på σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ sådant att

$$m([a, b]) = b - a$$

för varje $a < b$. Måttet m kallas för Lebesguemåttet i $\mathbf{R}$. Existensen av detta mått är relativt svår att komma åt och faller utanför ramen för denna framställning. Om $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ definieras

$$\mathcal{B}_B(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbf{R});\ A \subseteq B\}.$$

Observera att $\mathcal{B}_B(\mathbf{R})$ är en σ-algebra av delmängder av B. Måttet m_B definierat av ekvationen

$$m_B(A) = m(A),\ \ A \in \mathcal{B}_B(\mathbf{R})$$

kallas för Lebesguemåttet i B.

Antag nu att $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett fixt positivt måttrum. Om $A \subseteq R$ definieras den så kallade indikatorfunktionen för mängden A genom att

$$1_A(x) = \begin{cases} 1,\ x \in A \\ 0,\ x \notin A. \end{cases}$$

En funktion $g : R \to \mathbf{R}$ sägs vara en enkel mätbar funktion om den är $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar och g endast antar ändligt många värden. Under dessa förutsättningar kan g skrivas

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k 1_{A_k}(x)$$

för lämpliga parvis olika $\lambda_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, ..., n$, och parvis disjunkta $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, ..., n$. Om $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, ..., n$, i denna representation definierar vi μ-integralen av funktionen g genom formeln

$$\int_R g(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu(A_k).$$

Här definieras $0 \cdot \infty = 0$.

Delintervall av $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ tilldelas i fortsättningen alltid den σ-algebra som genereras av delintervallen av intervallet ifråga. Om $f : R \to [0, +\infty]$ är mätbar definieras integralen av f över R med avseende på måttet μ genom

$$\int_R f(x) d\mu(x)$$

$$= \sup \left\{ \int_R g(x) d\mu(x);\ \text{där } g \text{ är enkel mätbar och } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Sats 1. (Lebesgues monotona konvergenssats) *Antag* $(R, \mathcal{A}, \mu)$ *är ett positivt måttrum och antag att* $f_n : R \to [0, \infty]$, $n \in \mathbf{N}$, är *en följd mätbara funktioner sådan att* $f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, *och*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),\ x \in R.$$

Då gäller att f är mätbar och

$$\lim_{n\to\infty}\int_R f_n(x)d\mu(x) = \int_R f(x)d\mu(x).$$

Antag $f : R \to [0,+\infty]$ är mätbar. Man kan visa att det finns icke-negativa enkla mätbara funktioner $g_n, n \in \mathbf{N}$, sådana att $g_n \le g_{n+1}$ och

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x), \text{ alla } x \in R.$$

Antag nämligen att $n \in \mathbf{N}_+$ och sätt $E_{n,i} = f^{-1}(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right[\ ),\ 1 \le i \le n2^n$, $F_n = f^{-1}([n,\infty])$ och

$$g_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} 1_{E_{n,i}} + n1_{F_n}.$$

Definitionerna ger (efter en stunds arbete) att $g_n \le g_{n+1}$ och

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x), \text{ alla } x \in R.$$

Lebesgues monotona konvergenssats medför nu att

$$\int_R f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_R g_n(x)d\mu(x).$$

Vi skriver $f \in L^1(\mu)$ eller eventuellt för tydlighets skull $f \in L^1(R,\mathcal{A},\mu)$ om $f : R \to [-\infty,+\infty]$ är mätbar och $f^+ = \max(0,f)$ och $f^- = \max(0,-f)$ har ändliga integraler över R med avseende på måttet μ . I detta fall definieras

$$\int_R f(x)d\mu(x) = \int_R f^+(x)d\mu(x) - \int_R f^-(x)d\mu(x).$$

Om $A \in \mathcal{A}$ och $f \in L^1(\mu)$, definieras

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \int_R 1_A(x)f(x)d\mu(x).$$

I specialfallet att $R = \mathbf{R}$ och A är ett begränsat intervall med vänsteränd-punkten a och högerändpunkten b skrivs

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \int_a^b f(x)d\mu(x)$$

förutsatt att $\mu(\{a,b\})=0$. Om $a,b\in\mathbf{R}$ definieras integralerna

$$\int_a^\infty f(x)d\mu(x)$$

och

$$\int_{-\infty}^b f(x)d\mu(x)$$

på liknande sätt förutsatt att $\mu(\{a\})=0$ i första fallet och $\mu(\{b\})=0$ i andra fallet. Vi skriver också

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)d\mu(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\mu(x).$$

Om $f\in C([a,b])$ dvs om f är en reellvärd kontinuerlig funktion i det kompakta intervallet $[a,b]$ och m som vanligt betecknar Lebesguemåttet i $\mathbf{R}$ så gäller att

$$\int_a^b f(x)dm(x)=\int_a^b f(x)dx$$

där integralen i högra ledet är en vanlig Riemannintegral.

Antag nu att $(R,\mathcal{A},\mu)$ och $(R,\mathcal{A},\nu)$ är två positiva måttrum. Då är $\mu+\nu$ ett positivt mått och för varje $f\in L^1(\mu)\cap L^1(\nu)$ gäller att

$$\int_R f(x)d(\mu+\nu)(x)=\int_R f(x)d\mu(x)+\int_R f(x)d\nu(x).$$

Vidare gäller för varje $f\in L^1(\mu)$ och $\alpha\in[0,\infty[$ att

$$\int_R f(x)d(\alpha\mu)(x)=\alpha\int_R f(x)d\mu(x).$$

Diracmåttet δ_a i en given punkt $a\in R$ definieras för varje $A\in 2^R$ genom relationen

$$\delta_a(A)=1_A(a)$$

där funktionen 1_A är indikatorfunktionen för mängden A. Egentligen borde Diracmåttet δ_a ha ytterligare ett index, nämligen R, men vi följer den gängse konventionen och utelämnar R. Definitionerna ger att

$$\int_R f(x)d\delta_a(x)=f(a).$$

Om $a,b\in R$ och $\alpha,\beta\geq 0$ så uppfyller det positiva måttet $\mu=\alpha\delta_a+\beta\delta_b$ relationen

$$\int_R f(x)d\mu(x)=\alpha f(a)+\beta f(b).$$

Om $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum och $f : R \to [0, \infty]$ är mätbar så följer av Lebesgues monotona konvergenssats att funktionen

$$\nu(A) = \int_A f(x) d\mu(x), \; A \in \mathcal{A}$$

är ett positivt mått. Detta mått betecknas med $f\mu$ dvs $\nu = f\mu$. Vi skriver också

$$d\nu(x) = f(x) d\mu(x)$$

vilket motiveras av att

$$\int_R g(x) d\nu(x) = \int_R g(x) f(x) d\mu(x)$$

för varje mätbar funktion $g \colon R \to [0, \infty]$. I fallet $\mu = m$ skrivs också

$$dm(x) = dx.$$

Måttet γ i $\mathbf{R}$ definierat av ekvationen

$$d\gamma(x) = e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

kallas för det kanoniska Gaussmåttet i $\mathbf{R}$. Det gäller att $\gamma(\mathbf{R}) = 1$ och

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 d\gamma(x) = 1.$$

De sannolikhetsteoretiska grundbegreppen går ofta bra att beskriva med måtteorins språk. Om $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett sannolikhetsrum så kallas, inom sannolikhetsteorin, en mätbar funktion $X : \Omega \to \mathbf{R}$ för en reellvärd stokastisk variabel. Det är här och i fortsättningen ofta underförstått att $\mathbf{R}$ är tilldelad σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ om missförstånd ej kan inträffa. Om $X \in L^1(P)$ kallas X för en absolutintegrabel stokastisk variabel och dess väntevärde $E[X]$ definieras av att

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$$

eller tydligare

$$E^P[X] = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega).$$

Råkar dessutom $A \in \mathcal{F}$ definieras

$$E[X; A] = \int_A X(\omega) dP(\omega).$$

Antag nu att $(R, \mathcal{A})$ är ett godtyckligt mätbart rum. En mätbar avbildning $X : \Omega \to R$ kallas för en R-värd stokastisk variabel. Denna inducerar ett så kallat fördelningsmått μ_X genom ekvationen

$$\mu_X(A) = P\left[X \in A\right], \, A \in \mathcal{A}$$

dvs om $A \in \mathcal{A}$ så är $\mu_X(A)$ lika med sannolikheten för att händelsen $[X \in A] = \{\omega;\, X(\omega) \in A\}$ inträffar. Om vi definierar en funktion

$$j_X : R \to R$$

genom att sätta $j_X(x) = x$, $x \in R$, så kan vi uppfatta j_X som en R-värd stokastisk variabel relativt sannolikhetsrummet $(R, \mathcal{A}, \mu_X)$. Konstruktionen visar att X och j_X har samma fördelningsmått, nämligen μ_X. Den stokastiska variabeln j_X kallas ibland för den första kanoniska representationen av X. Med Lebesgues monotona konvergenssats visas att om $f : R \to [-\infty, \infty]$ är mätbar så gäller att $f(X) \in L^1(P)$ om och endast om $f \in L^1(\mu_X)$ och i förekommande fall gäller

$$E\left[f(X)\right] = \int_R f(x) d\mu_X(x).$$

Om X antar värden i $[-\infty, \infty]$ och

$$E\left[X^2\right] = \int_R x^2 d\mu_X(x)$$

är ändlig så följer av Jensens olikhet att

$$E\left[\mid X \mid\right] \leq \sqrt{E\left[X^2\right]} < \infty.$$

I detta fall definieras variansen $\mathrm{Var}(X)$ av X genom att

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E\left[X\right])^2\right].$$

En kalkyl ger

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E\left[X\right])^2$$

En stokastisk variabel $X : \Omega \to R$ sägs ha en binomialfördelning om det existerar $a, b \in R$ sådana att $a \neq b$ och $P\left[X = a\right] + P\left[X = b\right] = 1$, där varje term i vänster led är positiv. Sätt $P\left[X = a\right] = p_a$ och $P\left[X = b\right] = p_b$. Råkar $R = \mathbf{R}$ så är $E\left[X\right] = p_a a + p_b b$ och $\mathrm{Var}(X) = p_a p_b (a - b)^2$.

En stokastisk variabel X med värden i en ändlig mängd R med n element säges ha en likformig fördelning i R om $\mu_X = \frac{1}{n} c_R$.

En stokastisk variabel X sägs ha en likformig fördelning i intervallet $[a, b]$, där $a < b$, om

$$\mu_X(A) = \frac{1}{b-a} m(A),\ A \in \mathcal{B}([a, b]).$$

I detta fall gäller att $E[X] = (b-a)/2$ och $\mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$.

En reellvärd stokastisk variabel X med fördelningsmåttet γ sägs ha en $N(0, 1)$-fördelning. Detta skrivs $X \in N(0, 1)$ och motsvarande fördelningsfunktion betecknas med Φ dvs

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}},\ y \in \mathbf{R}.$$

Inom matematisk finans skrivs ofta N istället för Φ.

En reellvärd stokastisk variabel X sägs ha en $N(\alpha, \sigma^2)$-fördelning om $\alpha \in \mathbf{R}$, $\sigma \geq 0$ och $X = \alpha + \sigma Y$ där $Y \in N(0, 1)$. En reellvärd stokastisk variabel sägs ha en normalfördelning om den är $N(\alpha, \sigma^2)$-fördelad för lämpliga $\alpha \in \mathbf{R}$, $\sigma \geq 0$. En reellvärd normalfördelad stokastisk variabel säges också ha en Gaussisk fördelning.

För att illustrera begreppen ovan gör vi nu en liten paus i den allmänna måtteorin och återknyter till binomialmodellen från föregående kapitel.

Exempel 1. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation och med ett tidssteg. Här antags alltså speciellt att tidsvariabeln t endast kan antaga två värden, nämligen 0 eller 1. Vi skriver

$$B(1) = B(0)e^r$$

där $r > 0$ och

$$S(1) = S(0)e^X$$

där X är en reellvärd binomialfördelad stokastisk variabel sådan att $X^{-1}(\{u, d\}) = \Omega$ för lämpliga $u, d \in \mathbf{R}$ som uppfyller $u > d$. Genom att eventuellt ersätta X med j_X kan vi antaga att $\Omega = \{u, d\}$, $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \Omega$, och $P = \mu_X$. Kom ihåg att

$$P[X = u] = p_u$$

och

$$P[X = d] = p_d$$

där $0 < p_u, p_d < 1$ och $p_u + p_d = 1$. Det gäller alltså att

$$P = p_u \delta_u + p_u \delta_d.$$

Måttet P kallas det fysikaliska måttet för binomialmodellen med ett tidssteg.

I det följande förutsätts att $u > r > d$ så att modellen saknar arbitrage.

Om ett betingat kontrakt av europeisk typ utbetalar beloppet $Y = f(X)$ vid tiden 1 så ges derivatets värde vid tiden $t = 0$ av formeln

$$\Pi_Y(0) = e^{-r}(q_u f(u) + q_d(f(d)).$$

där

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$

och

$$q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}.$$

Genom att definiera

$$Q = q_u \delta_u + q_u \delta_d$$

så följer att

$$\Pi_Y(0) = e^{-r} \int_{\mathbf{R}} f(\omega) dQ(\omega)$$

eller

$$\Pi_Y(0) = e^{-r} E^Q[Y]$$

eftersom $Y = f(X)$ och $X(\omega) = \omega$, $\omega \in \Omega$. Sannolikhetsmåttet Q kallas det riskneutrala måttet för binomialmodellen med ett tidssteg.

Vi skriver nu

$$Y = f(X) = g(S(0)e^X) = g(S(1))$$

och får

$$\Pi_Y(0) = e^{-r} E^Q[g(S(1))].$$

Innan vi avslutar exemplet vill vi göra en del anmärkningar för det fall att utbetalningsfunktionen g är konvex. I detta fall ger Jensens olikhet att

$$\Pi_Y(0) \geq e^{-r} g(E^Q[S(1)]) = e^{-r} g(e^r S(0))$$

Om vi nu dessutom antager att

$$\lambda g(s) \geq g(\lambda s),\ 0 < \lambda < 1,$$

erhålls olikheten

$$\Pi_Y(0) \geq g(S(0)).$$

Ett motsvarande amerikanskt kontrakt kan lösas in vid en godtycklig tidpunkt $t \in \{0,1\}$ och utbetalar då beloppet $g(S(t))$ till innehavaren. Det är inte optimalt att inlösa kontraktet vid tiden $t = 0$ under samma förutsättningar på g . Motsvarande europeiska kontrakt har nämligen ett värde som ej understiger det värde som erhålles om det amerikanska kontraktet inlöses. Ett intressant specialfall erhålls för $g(s) = \max(0, s - K)$ där $K > 0$ är ett givet tal.

Om $g(s) = \max(0, K - s)$, där $K > 0$, så är g fortfarande konvex men olikheten

$$\lambda g(s) \geq g(\lambda s),\ 0 < \lambda < 1$$

gäller ej. En närmare analys visar också att det kan vara optimalt att inlösa motsvarande amerikanska kontrakt vid tiden $t = 0$. Detta inträffar om

$$e^{-r}\left\{q_u \max(0, K - S(0)e^u) + q_d \max(0, K - S(0)e^d)\right\} < \max(0, K - S(0))$$

dvs om $S(0)$ är tillräckligt litet.

Exempel 2. Vi betraktar här tre mätbara rum, nämligen $(\Omega, \mathcal{F})$, $(R, \mathcal{A})$ och $(F, \mathcal{B})$ där F är en ändlig mängd och $\mathcal{B} = 2^F$. Det förutsätts att $X : \Omega \to R$ och $Y : \Omega \to F$ är givna funktioner.

Antag först att $Y = f(X)$ där $f : R \to F$ är $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mätbar. Om $B \in \mathcal{B}$ så gäller att

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

så

$$Y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \sigma(X).$$

Det gäller alltså att Y är $(\sigma(X), \mathcal{B})$-mätbar. Eftersom $\mathcal{B} = 2^F$ nöjer vi oss i denna situation med att säga att $f : R \to F$ är $\mathcal{A}$-mätbar och Y är $\sigma(X)$-mätbar.

Omvänt antag vi vet att $Y:\Omega\to F$ är $\sigma(X)$-mätbar. Vi påstår att det existerar en $\mathcal{A}$-mätbar funktion $f:R\to F$ sådan att $Y=f(X)$. För den skull antar vi att F har elementen $y_1,...,y_n$ och definierar

$$\Omega_i=Y^{-1}(\{y_i\})\ ,\ i=1,...,n.$$

Eftersom $\Omega_i\in\sigma(X)$ finns $R_i\in\mathcal{A}$ så att $\Omega_i=X^{-1}(R_i)$, för $i=1,...,n$. Sätt

$$R'_i=R_i\setminus\cup_{j<i}R_j,\ i=1,...,n$$

och

$$\Omega'_i=X^{-1}(R'_i),\ i=1,...,n.$$

Vi definierar

$$f(x)=y_i \text{ om } x\in R'_i,\ i=1,...,n$$

och

$$f(x)=y_1 \text{ om } x\in R\setminus\cup_{\ i=1,...,n}R'_i.$$

Man visar lätt att $Y=f(X)$ och att $f:R\to F$ är $\mathcal{A}$-mätbar.

För att illustrera resultatet går vi tillbaka till binomialmetoden med T tidssteg så att aktiepriset vid tiden t ges av

$$S(t)=S(0)e^{X_1+...+X_t}.$$

Låt $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$ och $\mathcal{F}_t=\sigma(X^t)$ där $X^t=(X_1,...,X_t)$ för $t=1,...,T$. En stokastisk variabel Z som är $\mathcal{F}_t$-mätbar är alltså en funktion av X^t dvs en funktion av de historiska aktiepriserna $S(0),S(1),...,S(t)$ och omvänt. Vi kan därför uppfatta $\mathcal{F}_t$ som den kända informationen vid tiden t. Mätbarhetsbegreppet är ett fundamentalt begrepp inom finansiell matematik.

Antag $(R,\mathcal{A},\mu)$ är ett positivt måttrum. En mängd $A\in\mathcal{A}$ sägs vara en μ-nollmängd eller (om missförstånd ej kan inträffa) en nollmängd om $\mu(A)=0$. Ett påstående $P(x)$, där $x\in R$, som gäller för alla x utanför en lämplig μ-nollmängd sägs gälla n.ö. $[\mu]$ eller om missförstånd ej kan inträffa helt enkelt n.ö. Förkortningen n.ö. uttalas "nästan överallt". Måttrummet $(R,\mathcal{A},\mu)$ säges vara komplett om mängden

$$\mathcal{N}_\mu(\mathcal{A})=\{B;\ B\subseteq A \text{ för något } A\in\mathcal{A} \text{ med } \mu(A)=0\}$$

är en delmängd av $\mathcal{A}$. Vi definierar

$$\mathcal{A}_\mu = \{E;\ \text{det existerar } A, B \in \mathcal{A} \text{ så att } A \subseteq E \subseteq B \text{ och } \mu(B \backslash A) = 0\}.$$

Man kan visa att $\mathcal{A}_\mu$ är en σ-algebra och den kallas för μ-kompletteringen av $\mathcal{A}$. Om $E \in \mathcal{A}_\mu$ finns $A, B \in \mathcal{A}$ så att $A \subseteq E \subseteq B$ och $\mu(B \backslash A) = 0$. Genom att definiera $\nu(E) = \mu(A)$ blir ν ett positivt mått. Måttet ν kallas för utvidgningen av måttet μ till σ-algebran $\mathcal{A}_\mu$. Måttrummet $(R, \mathcal{A}_\mu, \nu)$ är komplett. Om μ är ett sannolikhetsmått sägs ofta "med sannolikhet ett" eller "nästan säkert" istället för "nästan överallt". Uttrycket "nästan säkert" förkortas n.s. Man kallar m-kompletteringen av Borel-σ-algebran i $\mathbf{R}$ för Lebesgue-σ-algebran i $\mathbf{R}$.

Om $0 \leq f \in L^1(\mu)$ följer av olikheterna

$$\infty > \int_R f(x) d\mu(x) \geq s\mu(f^{-1}([s, +\infty])),\ 0 < s < \infty$$

att

$$\mu(\{x \in R; f(x) = \infty\}) = 0$$

dvs mängden $\{x \in R; f(x) = \infty\}$ är en nollmängd. Alltså är f reellvärd n.ö. För två funktioner $f, g \in L^1(\mu)$ som är lika n.ö. gäller att

$$\int_R f(x) d\mu(x) = \int_R g(x) d\mu(x).$$

Två funktioner i $L^1(\mu)$ som är lika n.ö. identifieras från och med nu. Varje $f \in L^1(\mu)$ har med denna konvention en reellvärd kopia i $L^1(\mu)$ och det är härigenom lätt att definiera summan av två funktioner i $L^1(\mu)$. Det erbjuder heller inga svårigheter att definiera multiplikation av funktion i $L^1(\mu)$ med skalär. Härigenom blir $L^1(\mu)$ ett vektorrum och man kan visa att avbildningen

$$f \to \int_R f(x) d\mu(x)$$

är en linjär avbildning från $L^1(\mu)$ in i $\mathbf{R}$.

Om $f \in L^1(\mu)$ definieras den så kallade $L^1(\mu)$-normen av f genom att

$$\| f \|_1 = \int_R | f(x) | d\mu(x).$$

Följande egenskaper är lätta att verifiera, nämligen

(i) $\| \alpha f \|_1 = | \alpha | \| f \|_1$, $\alpha \in \mathbf{R}$

(ii) $\| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1$

(iii) $\| f \|_1 \geq 0$ med likhet om och endast om $f = 0$ i $L^1(\mu)$.

Man säger att rummet $L^1(\mu)$ tillsammans med $L^1(\mu)$-normen bildar ett normerat rum. Om $f, g \in L^1(\mu)$ uppfattar vi

$$\| f - g \|_1$$

som avståndet mellan f och g. Vi säger att en sekvens $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ i $L^1(\mu)$ konvergar mot $f \in L^1(\mu)$ om

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_1 = 0.$$

Detta kan på kompakt vis uttryckas

$$f_n \to f \quad \text{i } L^1(\mu)$$

då $n \to \infty$.

Sats 2. (Lebesgues majorantsats) *Antag* $f_n \in L^1(\mu)$, $n \in \mathbf{N}$, *och*

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} | f_n | \in L^1(\mu).$$

Antag vidare att gränsvärdet

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

existerar och är lika med $f(x)$ n.ö. $[\mu]$. *Då gäller att* $f \in L^1(\mu)$ och

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_1 = 0.$$

Speciellt gäller att

$$\lim_{n \to \infty} \int_R f_n(x) d\mu(x) = \int_R f(x) d\mu(x).$$

Vi definierar klassen

$$L^2(R,\mathcal{A},\mu)=\left\{f;f \text{ mätbar och } f^2\in L^1(R,\mathcal{A},\mu)\right\}.$$

Om missförstånd ej kan uppstå skrivs $L^2(R,\mathcal{A},\mu)=L^2(\mu)$. Två funktioner i $L^2(\mu)$ som är lika n.s. identifieras. Man definierar summa och skalärmultiplikation i $L^2(\mu)$ analogt med motsvarande operationer i rummet $L^1(\mu)$ och härigenom blir $L^2(\mu)$ ett vektorrum. Funktionen

$$(f,g)=\int_R f(x)g(x)d\mu(x),\ \ f,g\in L^2(\mu)$$

kallas för skalärprodukten i $L^2(\mu)$ och om $f\in L^2(\mu)$ definieras

$$\| f \|_2=\sqrt{\int_R f^2(x)d\mu(x)}.$$

Detta uttryck kallas för $L^2(\mu)$-normen av f. Man kan visa Cauchy -Schwarz olikhet

$$(f,g)\leq\| f \|_2\| g \|_2$$

och att
(i) $\| \alpha f \|_2=| \alpha |\| f \|_2$, $\alpha\in\mathbf{R}$
(ii) $\| f+g \|_2\leq\| f \|_2+\| g \|_2$
(iii) $\| f \|_2\geq 0$ med likhet om och endast om $f=0$ i $L^1(\mu)$.

Man säger att rummet $L^2(\mu)$ tillsammans med skalärprodukten (f,g) bildar ett prehilbertrum (vi får t o m ett Hilbertrum men vi går inte in på detta begrepp här). Om $f,g\in L^2(\mu)$ uppfattas

$$\| f-g \|_2$$

som avståndet mellan f och g. Vi säger att en sekvens $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $L^2(\mu)$ konverger mot $f\in L^2(\mu)$ om

$$\lim_{n\to\infty}\| f_n-f \|_2=0.$$

Detta kan på kompakt vis uttryckas

$$f_n\to f\quad\text{i } L^2(\mu)$$

då $n\to\infty$.

Om mängden R är ändlig har vektorrummet $L^2(\mu)$ ändlig dimension. Om denna dimension betecknas med n så är kan motsvarande prehilbertrum $L^2(\mu)$ identifieras med $\mathbf{R}^n$ och den vanliga skalärprodukten.

Av Jensens olikhet följer att

$$L^2(P) \subseteq L^1(P).$$

Om $X \in L^2(P)$ gäller speciellt att

$$\mathrm{Var}(X) = \| X - E[X] \|_2^2 .$$

Kovariansen mellan två stokastiska variabler $X, Y \in L^2(P)$ definieras av

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

och om X, Y ej är kontanta n.s. definieras korrelationen mellan dem genom

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Två stokastiska variabler $X, Y \in L^2(P)$ sägs vara okorrelerade om $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Antag nu att $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och låt $\mathcal{G}$ vara en σ-algebra av delmängder av Ω sådan att $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Det finns då en unik stokastisk variabel $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ sådan att

$$E[X; A] = E[Y; A], \text{ alla } A \in \mathcal{G}$$

dvs

$$E[XZ] = E[YZ],$$

för alla reellvärda begränsade $\mathcal{G}$-mätbara stokastiska variabler Z. Genom att välja $Z = 1_{[Y \geq 0]} - 1_{[Y<0]}$ följer att

$$E[| X |] \geq E[| Y |].$$

Här kallas Y det betingade väntevärdet av X givet $\mathcal{G}$ och betecknas med $E[X \mid \mathcal{G}]$. Om Ω är en ändlig mängd så är varje reellvärd funktion definierad på Ω begränsad och det följer att $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Kom ihåg att om $L^2(\mu, \mathcal{F}, P)$ har dimensionen n så kan motsvarande prehilbertrum identifieras med $\mathbf{R}^n$ med den vanliga skalärprodukten. Vi kan se $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ som ett delrum av $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eller som ett delrum av $\mathbf{R}^n$. Om $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

kan vi helt enkelt definiera Y som den vektor i $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) = L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ som ligger närmast X. Vi kallar också Y för ortogonala projektionen på delrummet $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Det allmänna fallet är mer krävande och vi utreder inte existensfrågan här.

Om $X_1, ..., X_n$ betecknar stokastiska variabler definierade på Ω betecknar $\sigma(X_1, ..., X_n)$ den minsta σ-algebra av delmängder av Ω som gör $X_1, ..., X_n$ mätbara. Vi skriver i fortsättningen

$$E[X \mid X_1, ..., X_n]$$

istället för

$$E[X \mid \sigma(X_1, ..., X_n)].$$

Om $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ är reellvärda stokastiska variabler och $X \leq Y$ n.s. skriver vi helt enkelt $X \leq Y$. Om $A \in \mathcal{G}$ skrivs $E[1_A \mid \mathcal{G}] = P[A \mid \mathcal{G}]$.

Man kan visa följande egenskaper för betingat väntevärde:

(i) $E[1 \mid \mathcal{G}] = 1$

(ii) $E[aX \mid \mathcal{G}] = \alpha E[X \mid \mathcal{G}]$, $\alpha \in \mathbf{R}$

(iii) $E[X + Y \mid \mathcal{G}] = E[X \mid \mathcal{G}] + E[X \mid \mathcal{G}]$.

(iv) $X \leq Y \Rightarrow E[X \mid \mathcal{G}] \leq E[Y \mid \mathcal{G}]$.

Om $\mathcal{G}_0$ och $\mathcal{G}_1$ är σ-algebror av $\mathcal{F}$ sådana att $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}_1$ så gäller den viktiga relationen

$$E[E[X \mid \mathcal{G}_1] \mid \mathcal{G}_0] = E[X \mid \mathcal{G}_0].$$

Ett bevis kan gå till så här. Sätt

$$Y_k = E[X \mid \mathcal{G}_k], \; k = 0, 1.$$

Det gäller att visa att

$$E[Y_1 \mid \mathcal{G}_0] = Y_0.$$

Eftersom Y_0 är $\mathcal{G}_0$-mätbar räcker det att visa att

$$E[Y_1; A] = E[Y_0; A]$$

för givet $A \in \mathcal{G}_0$. Här är högra ledet lika med $E[X; A]$. Även vänster led lika med $E[X; A]$ eftersom $A \in \mathcal{G}_1$ så beviset är klart.

Ett positivt måttrum $(R, \mathcal{A}, \mu)$ sägs vara σ-ändligt om det existerar A_n, $n \in \mathbf{N}$, så att $R = \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ och $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbf{N}$. Betrakta nu två positiva σ-ändliga måttrum $(R_k, \mathcal{A}_k, \mu_k)$, $k = 1, 2$. Vi definierar produktrummet

$$R_1 \times R_2 = \{(x_1, x_2); x_1 \in R_1 \text{ och } \ x_1 \in R_1\}$$

och låter $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ beteckna σ-algebran av delmängder av $R_1 \times R_2$ som genereras av alla mängder av typen

$$A_1 \times A_2, \ A_1 \in \mathcal{A}_1, \ A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Man kan visa att det existerar ett unikt positivt mått, här betecknat med $\mu_1 \times \mu_2$, definierat på σ-algebran $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, sådant att

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \ A_1 \in \mathcal{A}_1, \ A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Vidare gäller för varje mätbar funktion $f : R_1 \times R_2 \to [0, \infty]$ att

$$\int_{R_1 \times R_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \times \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{R_2} (\int_{R_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)) d\mu_2(x_2)$$

och

$$\int_{R_1 \times R_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \times \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{R_1} (\int_{R_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)) d\mu_1(x_1).$$

Detta resultat kallas Fubinis sats.

För positiva mått gäller följande räknelagar

(i) $(\alpha\mu_1) \times \mu_2 = \mu_1 \times (\alpha\mu_2) = \alpha(\mu_1 \times \mu_2)$, $\alpha \geq 0$

(ii) $(\mu_1 + \mu_2) \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_3) + (\mu_2 \times \mu_3)$

(iii) $\mu_1 \times (\mu_2 + \mu_3) = (\mu_1 \times \mu_2) + (\mu_1 \times \mu_3)$.

Definitionen av produktmått kan lätt utsträckas till en ändlig produkt av positiva σ-ändliga mått. Vi skriver

$$m_n = m \times ... \times m\,, \, n \, \text{st faktorer}$$

och kallar detta mått för det n-dimensionella Lebesguemåttet. Observera att $m_1 = m = m_{\mathbf{R}}$. Om $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ är en given mängd kallas måttet μ som definieras av att $\mu(A) = m_n(A)$ för alla $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ sådana att $A \subseteq B$ för

Lebesguemåttet i B. Man kallar m_n-kompletteringen av Borel-σ-algebran i $\mathbf{R}^n$ för Lebesgue-σ-algebran i $\mathbf{R}^n$. Råkar B vara en axelparallell rektangel i $\mathbf{R}^n$ och $f : B \to \mathbf{R}$ en reellvärd kontinuerlig funktion så är

$$\int_B f(x)dm_n(x) = \int_B f(x)dx = \underset{B}{\int \cdots \int} f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$$

där integralerna i mittersta och högra leden är vanliga Riemannintegraler.

Det kanoniska Gaussmåttet γ_n i $\mathbf{R}^n$ ges av

$$\gamma_n(A) = \int_A e^{-|x|^2/2} \frac{dm_n(x)}{\sqrt{2\pi}^n},\ A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$$

där

$$\mid x \mid = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

är den vanliga normen i $\mathbf{R}^n$. I fortsättningen skriver vi också

$$d\gamma_n(x) = e^{-|x|^2/2} \frac{dm_n(x)}{\sqrt{2\pi}^n}$$

eller

$$d\gamma_n(x) = e^{-|x|^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}^n}.$$

En $\mathbf{R}^n$-värd stokastisk variabel X sägs vara en kanonisk Gaussvariabel i $\mathbf{R}^n$ om $\mu_X = \gamma_n$.

Vi skall nu ytligt beröra begreppet absolutkontinuitet för mått. Detta begrepp kommer senare att bli aktuellt i samband med riskneutrala mått i olika modeller. Låt $(R, \mathcal{A}, \mu)$ och $(R, \mathcal{A}, \nu)$ vara positiva måttrum. Vi säger att måttet ν är absolutkontinuerligt med avseende på måttet μ om

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0,\ \text{för } A \in \mathcal{A}.$$

Detta skrives $\nu << \mu$. Om $\nu << \mu$ och $\mu << \nu$ säges måtten vara ekvivalenta. Om $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt måttrum och $f \in L^1(\mu)$ är icke-negativ så gäller givetvis att $f\mu << \mu$. Om $(R, \mathcal{A}, \mu)$ är ett positivt σ-ändligt måttrum och $(R, \mathcal{A}, \nu)$ är ett ändligt positivt måttrum sådant att $\nu << \mu$ så är $\nu = f\mu$ för en lämplig icke-negativ funktion $f \in L^1(\mu)$. Detta resultat kallas Radon-Nikodyms sats.

Exempel 3. Betrakta återigen binomialmodellen med ett tidssteg. Det fysikaliska måttet ges av ekvationen

$$P = p_u \delta_u + p_d \delta_d$$

där

$$p_u = P[X = u]$$

och

$$p_d = P[X = d]$$

uppfyller $0 < p_u, p_d < 1$ och $p_u + p_d = 1$. Det är underförstått att $\Omega = \{u, d\}$ och $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Dessutom förutsätts i det följande att $u > r > d$ så att motsvarande modell saknar arbitrage. Det riskneutrala måttet Q ges av

$$Q = q_u \delta_u + q_d \delta_d$$

där

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}$$

och

$$q_d = \frac{e^u - e^r}{e^u - e^d}.$$

Om $P[A] = 0$ så gäller att $Q[A] = 0$ ty $p_u > 0$ och $p_d > 0$. Radon-Nykodyms sats garanterar därför att

$$Q = fP$$

dvs

$$q_u \delta_u + q_d \delta_d = f(u) p_u \delta_u + f(d) p_d \delta_d.$$

för en lämplig icke-negativ funktion $f \in L^1(P)$. Att det verkligen finns en sådan funktion f är i detta fall lätt att inse genom att definiera

$$f(u) = \frac{q_u}{p_u}$$

och

$$f(d) = \frac{q_d}{p_d}.$$

På liknande sätt inses att P är absolutkontinuerligt med avseende på Q varför måtten P och Q är ekvivalenta.

Övningar

1. Antag $A \subseteq R$. Visa att $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, R \setminus A, R\}$ är en σ-algebra av delmängder av R.

2. Antag $(R_k,\, \mathcal{A}_k)$, $k = 0, 1$, är mätbara rum och låt $f : R_0 \to R_1$. Visa att klassen
$$\left\{ A \in \mathcal{A}_1 ; f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_0 \right\}$$
är en σ-algebra.

3. Antag $(R,\, \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och låt $A \subseteq R$. Visa att funktionen 1_A är mätbar om och endast om $A \in \mathcal{A}$.

4. En mängd A kallas uppräknelig om det finns en omvändbart entydig funktion definierad på $\mathbf{N}$ med värdemängden A. En mängd sägs vara högst uppräknelig om den är ändlig eller uppräknelig. Visa att följande mängder är högst uppräkneliga *a*) $\emptyset$ *b*) $\{$alla jämna heltal$\}$ *c*) $\mathbf{N}^2$ *d*) $\mathbf{Q}$.

5. Låt U vara en öppen delmängd av $\mathbf{R}$. Visa att det finns $a_n \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{N}$ och $r_n \in \mathbf{Q}_+$, $n \in \mathbf{N}$, så att
$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}}]a_n - r_n, a_n + r_n[= U.$$

6. Visa att $\sigma(\{]a, \infty[\,;\ a \in \mathbf{R}\}) = \mathcal{B}(\mathbf{R})$.

7. Antag $(R,\, \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och låt $f : R \to \mathbf{R}$. Antag
$$\{x \in R;\ f(x) > a\} \in \mathcal{A}$$
för varje reellt tal a. Visa att f är $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar.

8. Antag $(R, \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och låt $f : R \to \mathbf{R}$. Antag

$$\{x \in R;\ f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$$

för varje reellt tal a. Visa att f är $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar.

9. Antag $(R, \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och låt f och g vara två reellvärda $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbara funktioner. Visa att $f + g$ är $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar.

10. Antag $(R, \mathcal{A})$ är ett mätbart rum och låt f_n, $n \in \mathbf{N}$, vara en sekvens $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbara funktioner sådan att

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

existerar och är lika med $f(x)$ för varje $x \in R$. Visa att f är $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar.

11. Antag f, $f_n \in L^2(\mu)$, $n \in \mathbf{N}$, och att

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_2 = 0.$$

Visa att det finns en delföljd av sekvensen $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ som konvergerar mot f n.s $[\mu]$.

12. **(Första hälften av Borel-Cantellis lemma)** Antag $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ är ett sannolikhetsrum och $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbf{N}$, händelser sådana att

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Visa att endast ändligt många av händelserna A_n, $n \in \mathbf{N}$, inträffar med sannolikheten 1. Definieras

$$\{A_n \text{ i.o.}\} = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

så gäller alltså att

$$P[A_n \text{ i.o.}] = 0.$$

Här betyder i.o. ”oändligt ofta” och kommer från engelskans ”infinitely often”.

13. Antag att $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ är kontinuerlig. Visa att f är $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^m), \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$-mätbar.

14. Visa att $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.

15. Antag $G \in N(0,1)$ och sätt för varje $f \in C_b(\mathbf{R})$ och $t > 0$

$$(A_t f)(x) = E\left[f(e^{-t}x + (1 - e^{-2t})^{\frac{1}{2}} G)\right], \; x \in \mathbf{R}$$

dvs

$$(A_t f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-t}x + (1 - e^{-2t})^{\frac{1}{2}} y) e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}, \; x \in \mathbf{R}.$$

Visa att om $f \in C_b(\mathbf{R})$ så gäller att $A_t f \in C_b(\mathbf{R})$ och

$$A_{t_1}(A_{t_2} f) = A_{t_1 + t_2} f.$$

16. Låt $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \gamma_n)$. Visa att varje linjär avbildning $L : \Omega \to \mathbf{R}$ har en Gaussisk fördelning.

17. **(Jensens olikhet för betingat väntevärde)** Antag $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och låt $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vara en konvex funktion sådan att $f(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Visa att

$$f(E[X \mid \mathcal{G}]) \leq E[f(X) \mid \mathcal{G}].$$

18. Antag $f_n \to f$ i $L^2(R, \mathcal{A}, \mu)$ då $n \to \infty$. Visa att

$$\lim_{n \to \infty} \int_R f_n^2(x) d\mu(x) = \int_R f^2(x) d\mu(x).$$

19. Antag $X_n \in N(0, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbf{N}_+$, och $X_n \to X$ i $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ då $n \to \infty$. Visa att $X \in N(0, \sigma^2)$ för lämpligt $\sigma \geq 0$.