## 9. Stokastiska grundbegrepp och Fourieranalys

I detta avsnitt diskuteras flera grundläggande sannolikhetsteoretiska begrepp med hjälp av måtteori. Vi återknyter också till binomialmodellen med $T$ tidssteg och definierar det så kallade riskneutrala måttet i det fall modellen saknar arbitrage. Vi ger också en martingalkarakterisering av det riskneutrala måttet. Slutligen visas en del Fourieranalytiska resultat.

En familj reellvärda stokastiska variabler $(X(t))_{t\in T}$ kallas för en reellvärd stokastisk process. Vi skriver ofta $X(t) = X_t$. Indexmängden $T$ kallas för tidsparametermängd och avbildningen

$$t \to X_t(\omega)$$

för en realisation, samplefunktion eller en trajektoria för processen. Om $T_0 \subseteq T$ betecknar $\sigma(X(t);\, t \in T_0)$ den minsta $\sigma$-algebra $\mathcal{G}$ av delmängder av $\Omega$ som gör alla avbildningarna $X(t)$, $t \in T_0$, $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbara. För varje $n \in \mathbf{N}_+$ och $t_{1,\ldots}, t_n \in T$ definieras

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n} = \mu_{(X(t_1),\ldots,X(t_n))}$$

där

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n))(\omega) = (X_{t_1}(\omega), \ldots, X_{t_n}(\omega)),\ \omega \in \Omega.$$

Speciellt gäller alltså att

$$\mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \ldots \times A_n) = P\left[X(t_1) \in A_1, \ldots, X(t_n) \in A_n\right]$$

för godtyckliga $A_k \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, $k = 1, \ldots, n$. Måtten $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$, $t_{1,\ldots}, t_n \in T$ , $n \in \mathbf{N}_+$, kallas för processens marginalfördelningar. Två reellvärda stokastiska processer med samma marginalfördelningar sägs vara ekvivalenta i fördelning. De sägs också vara versioner av samma stokastiska process.

Om $(X(t))_{t\in T}$ är en reellvärd stokastisk process och varje $X(t) \in L^1(P)$ definieras väntevärdesfunktionen $\alpha$ av processen genom att

$$\alpha_t = E\left[X(t)\right],\ t \in T.$$

Funktionen $\alpha$ kallas ofta helt enkelt för väntevärdet av processen $(X(t))_{t\in T}$. Om dessutom varje $X(t) \in L^2(P)$ definieras kovariansfunktionen $C : T \times T \to R$ genom att

$$C(s,t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t)),\ s, t \in T,$$

dvs

$$C(s,t) = E\left[(X(s)-\alpha_s)(X(t)-\alpha_t)\right],\ s,t \in T.$$

En reellvärd stokastisk process sägs vara centrerad om den har väntevärdesfunktionen noll. En stokastisk process $(X_t)_{t\in\{1,...,n\}}$ skrivs ofta $(X_k)_{k=1}^n$ och kan identifieras med en $\mathbf{R}^n$-värd stokastisk variabel. Om varje $X_k \in L^1(P)$ kan processens väntevärde uppfattas som en vektor i $\mathbf{R}^n$.

Betrakta ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och $n$ st $\sigma$-algebror $\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_n$ innehållna i $\mathcal{F}$. Vi säger att $\sigma$-algebrorna $\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_n$ är stokastiskt oberoende om

$$P\left[\bigcap_{k=1}^n A_k\right] = \prod_{k=1}^n P\left[A_k\right]$$

för alla $A_k \in \mathcal{G}_k$, $k = 1, ..., n$.

Antag nu att $(R_k, \mathcal{A}_k), k = 1, ..., n,$ är mätbara rum och låt $X_k : \Omega \to R_k$, $k = 1, ..., n$, vara stokastiska variabler. Vi definierar som ovan

$$(X_1, ..., X_n)(\omega) = (X_1(\omega), ..., X_n(\omega)),\ \omega \in \Omega.$$

De stokastiska variablerna $X_k$, $k = 1, ..., n$, sägs vara stokastiskt oberoende om $\sigma$-algebrorna $\sigma(X_k)$, $k = 1, ..., n$, är stokastiskt oberoende, vilket är ekvivalent med följande relation mellan fördelningsmåtten för de stokastiska variablerna $X_1, ..., X_n$ och $(X_1, ..., X_n)$, nämligen att

$$\mu_{(X_1,...,X_n)} = \mu_{X_1} \times ... \times \mu_{X_n}.$$

Händelserna $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ sägs vara stokastiskt obereoende om indikatorfunktionerna $1_{A_1}, ..., 1_{A_n}$ är stokastiskt oberoende. Slutligen sägs en uppsättning $\sigma$-algebror (stokastiska variabler, händelser) vara stokastiskt oberoende om varje ändlig deluppsättning av dem är stokastiskt oberoende.

Existensen av ändliga produkter av sannolikhetsmått kan ges följande formulering.

**Sats 1.** *Låt $(R_k, \mathcal{A}_k, \mu_k)_{k=1}^n$ vara en följd sannolikhetsrum och sätt*

$$\begin{cases} \Omega = R_1 \times ... \times R_n \\ \mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \times ... \times \mathcal{A}_n \\ P = \mu_1 \times ... \times \mu_n. \end{cases}.$$

*Om*

$$X_k(\omega) = \omega_k, \omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega,\ k = 1,,,,n$$

*så är de stokastiska variabler* $X_k : \Omega \to R_k$, $k = 1, ..., n$, *stokastiskt oberoende och*

$$\mu_{X_k}(A) = P\left[X_k \in A\right] = \mu_k(A),\ A \in \mathcal{A}_k,\ k = 1, ..., n.$$

En sekvens $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ av stokastiska variabler kallas en i.i.d. om de stokastiska variablerna $X_k$, $k \geq 1$, är stokastiskt oberoende och lika fördelade. Definitionen av i.i.d. kan också ges med en tidsparametermängd av exempelvis typen $\{1, ..., n\}$. Om $X$ är en stokastisk variabel och $(X_k)_{k=1}^{n}$ är en i.i.d. sådan att $X_1$ och $X$ har samma fördelning så sägs $X_1, ..., X_n$ vara stokastiskt oberoende observationer på $X$. Sats 1 garanterar att man alltid kan bilda ändligt många observationer på en stokastisk variabel. Det finns satser i måtteorin som garanterar att man kan bilda oändligt många stokastiskt oberoende observationer på en given stokastisk variabel.

Begreppet stokastiskt oberoende är naturligtvis mycket intressant ur modellsynpunkt. Följande satser illustrerar att begreppet även har stora fördelar ur beräkningssynpunkt.

**Sats 2.** *Antag* $\mathcal{G}$ *är en* $\sigma$*-algebra och låt* $X \in L^1(P)$ *vara en reellvärd stokastisk variabel sådan att* $\mathcal{G}$ *och* $\sigma(X)$ *är stokastiskt oberoende. Då gäller att*

$$E\left[X \mid \mathcal{G}\right] = E\left[X\right].$$

**Bevis.** Om $A \in \mathcal{G}$ fås

$$E\left[X; A\right] = E\left[X 1_A\right]$$

och eftersom $\mathcal{G}$ och $\sigma(X)$ är stokastiskt oberoende följer att högra ledet är lika med

$$E\left[X\right] E\left[1_A\right] = E\left[E\left[X\right] 1_A\right] = E\left[E\left[X\right]; A\right].$$

En konstant funktion är naturligtvis $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar och satsen följer omedelbart.

I fortsättningen lättar vi något på formalismen och säger helt enkelt att en reellvärd funktion är $\mathcal{G}$-mätbar om den är $(\mathcal{G}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$-mätbar. En funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ som är $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$-mätbar kallas en Borelfunktion i $\mathbf{R}^n$. Om vi nedan talar om en mätbar funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ så innebär detta att $f$ är en Borelfunktion i $\mathbf{R}^n$.

Nedan kommer vi ofta att ha nytta av följande sats..

**Sats 3.** *Antag $(R_k, \mathcal{A}_k)$, $k = 1, 2$, är mätbara rum och låt $X_k : \Omega \to R_k$, $k = 1, 2$ vara stokastiskt oberoende stokastiska variabler. Antag vidare att $f \in L^1(\mu_{(X_1,X_2)})$ samt definiera*

$$g(x_1) = E\left[f(x_1, X_2)\right], \ x_1 \in R_1.$$

*Då gäller att*

$$E\left[f(X_1, X_2) \mid X_1\right] = g(X_1)$$

*dvs*

$$E\left[f(X_1, X_2) \mid X_1\right] = E\left[f(x_1, X_2)\right]_{|x_1 = X_1}.$$

**Bevis.** Låt $A \in \sigma(X_1)$. Det gäller att visa att

$$E\left[f(X_1, X_2) 1_A\right] = E\left[g(X_1) 1_A\right].$$

Men

$$A = X_1^{-1}(B)$$

för ett lämpligt $B \in \mathcal{A}_1$ så

$$1_A = 1_B(X_1).$$

Det gäller alltså att visa att

$$E\left[f(X_1, X_2) 1_B(X_1)\right] = E\left[g(X_1) 1_B(X_1)\right]$$

eller

$$\iint\limits_{R_1 \times R_2} f(x_1, x_2) 1_B(x_1) d(\mu_{X_1} \times \mu_{X_2})(x_1, x_2) =$$

$$\int_{R_1} g(x_1) 1_B(x_1) d\mu_{X_1}(x_1).$$

Men

$$g(x_1) = E[f(x_1, X_2)] = \int_{R_2} f(x_1, x_2) d\mu_{X_2}(x_2)$$

så resultatet följer från Fubinis sats.

.

Betrakta nu en sekvens reellvärda stokastiska variabler $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ och en sekvens $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ av $\sigma$-algebror innehållna i $\mathcal{F}$, där som vanligt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betecknar det underliggande sannolikhetsrummet. Sekvensen $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ kallas en martingal om det för varje $n \geq 1$ gäller att

$(i)$ $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$

$(ii)$ $\sigma(M_n) \subseteq \mathcal{F}_n$

$(iii)$ $M_n \in L^1(P)$ och $M_n = E[\, M_{n+k} \mid \mathcal{F}_n]$, $k \geq 1$.

Villkoret $(i)$ kan uttryckas att sekvensensen $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande (i vid mening). En växande sekvens del-$\sigma$-algebror av $\mathcal{F}$ kallas ofta en filtration. Varje $X \in L^1(P)$ definierar tillsammans med en växande sekvens $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ av del-$\sigma$-algebror av $\mathcal{F}$ en martingal $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ genom formeln

$$M_n = E[\, X \mid \mathcal{F}_n], \; n \geq 1$$

eftersom $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+k}$, $M_n$ är $\mathcal{F}_n$-mätbar och

$$E[E[\, X \mid \mathcal{F}_{n+k}] \mid \mathcal{F}_n] = E[\, X \mid \mathcal{F}_n].$$

För att ytterligare belysa martingalbegreppet betraktar vi en reellvärd stokastisk process $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ där varje $X_n \in L^1(P)$ och har förväntan noll. Vi antager också att de stokastiska variablerna $X_n, n \geq 1$, är stokastiskt oberoende och sätter

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \; n \geq 1$$

och

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ...., X_n), n \geq 1.$$

Av förutsättningarna följer för varje $k \geq 1$ att

$$E[\, Z_{n+k} \mid \mathcal{F}_n\,] = Z_n + E[\, X_{n+1} + ... + X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n].$$

Sats 2 medför emellertid att

$$E[X_{n+1}+...+X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}] + .... + E[X_{n+k}] = 0$$

vilket visar att sekvensen $(Z_n,\, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ är en martingal.

En reellvärd stokastisk process $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ sägs ha Markovegenskapen om

$$E[f(U_{n+k}) \mid U_1,...,U_n] = E[f(U_{n+k}) \mid U_n]\,,\; n,k \geq 1,$$

för varje begränsad Borelfunktion $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$. För att illustrera detta begrepp låter vi $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en reellvärd stokastisk process med stokastiskt oberoende komponenter dvs de stokastiska variablerna $X_n, n \geq 1$, antags vara stokastiskt oberoende. Sätt

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\; n \geq 1.$$

Om $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ är en begränsad Borelmätbar funktion och $k \geq 1$ så gäller att

$$E[f(Z_{n+k}) \mid Z_1,...,Z_n] = E[f(Z_n + X_{n+1}+...+X_{n+k}) \mid Z_1,...,Z_n]$$

och eftersom de stokastiska variablerna $(Z_1,...,Z_n)$ och $(X_{n+1,}...,X_{n+k})$ är stokastiskt oberoende ger sats 3 att högra ledet är lika med

$$E[f(z_n + X_{n+1}+...+X_{n+k})]_{|z_1=Z_n,...z_n=Z_n} =$$

$$(E[f(z + X_{n+1}+...+X_{n+k})])_{|z=Z_n} = E[f(Z_{n+k}) \mid Z_n]\,.$$

Detta visar att processen $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ har Markovegenskapen. Om slumpvandringshypotesen ger en riktig bild av ett aktiepris så följer speciellt att historien inte ger mer information om aktiens framtida prisutveckling än vad som återfinns i dagens pris. All så kallad teknisk analys av det enskilda aktiepriset saknar i så fall prediktionsvärde.

Definitionerna av Markovegenskap och martingal kan också ges över ett godtyckligt delintervall av $\mathbf{N}$ (eventuellt med ändligt många element). Generaliseringen till kontinuerlig tid berörs nedan.

Vi går nu tillbaka till binomialmodellen med $T$ tidssteg och börjar med att repetera dess definition. Betrakta därför en modell för kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $S(t)$ vid tiden $t$ och en obligation med priset $B(t)$ vid tiden $t$, där $S(0)$ och $B(0)$ är positiva konstanter. Tidsvariabeln $t$ antar värdena $0,1,2,...,T$. Vidare gäller att

$$B(t+1) = B(t)e^r$$

där konstanten $r > 0$ och att

$$S(t+1) = S(t)e^{X(t+1)}$$

där $X(t+1) = X_{t+1}$ är en binomialfördelad stokastisk variabel för $t = 0, ..., T-1$. Dessutom förutsätts att det går att välja $u, d \in \mathbf{R}$, som uppfyller $u > d$, så att sannolikheterna

$$p_u = P\left[X_t = u\right]$$

och

$$p_d = P\left[X_t = d\right]$$

är oberoende av $t$ och uppfyller

$$p_u + p_d = 1,$$

$$p_u > 0$$

och

$$p_d > 0.$$

Vi antar också att händelsen

$$[X_t \notin \{u, d\}]$$

aldrig inträffar för godtyckligt $t = 1, ..., T$. Utöver alla dessa förutsättningarna antags att sekvensen $(X_k)_{k=1}^{T}$ består av stokastiskt oberoende stokastiska variabler.

Beroende på sats 1 kan binomialmodellen i $T$ tidssteg ges följande enkla representation. Sätt först $\Omega_k = \{u, d\}$, $\mathcal{F}_k = 2^{\Omega}$ och definiera ett sannolikhetsmått på $\mathcal{F}_k$ så att $P_k = p_u\delta_u + p_d\delta_d$ för $k = 1, ..., T$. Sätt därefter

$$\begin{cases} \Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_T \\ \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times ... \times \mathcal{F}_T \\ P = P_1 \times ... \times P_T \end{cases}$$

och

$$X_t(\omega) = \omega_t, \ \omega = (\omega_1, ..., \omega_T) \in \Omega.$$

Denna representation kallas för den första kanoniska representationen av binomialmodellen i $T$ tidssteg och vi förutsätter denna representation i det följande.

Måttet $P$ kallas det fysikaliska måttet.

Sätt $X = (X_1, ..., X_T)$. Om $f : \Omega \to \mathbf{R}$ blir

$$E[f(X) \mid X_1, ..., X_{T-1}] = E[f(x_1, ..., x_{T-1}, X_n)]_{|x_1=X_1,...x_{T-1}=X_{T-1}} =$$

$$\sum_{i_T = u \ eller \ d} p_{i_T} f(X_1, ..., X_{T-1}, i_T)$$

beroende på sats 3. Upprepning ger

$$E[f(X) \mid X_1, ...X_{T-2}] = E[E[f(X) \mid X_1, ...X_{T-1}] X_1, ..., X_{T-2}] =$$

$$\sum_{i_1,...,i_T = u \ eller \ d} p_{i_{T-1}} p_{i_T} f(X_1, ..., X_{T-2}, i_{T-1}, i_T)$$

och till sist

$$E[f(X)] = \sum_{i_1,...,i_T = u \ eller \ d} p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_T} f(i_1, ..., i_T)$$

Eftersom

$$S(t) = S(0)e^{X_1 + ... + X_t}, \ t = 0, ..., T$$

följer att $(\log S(t))_{t=0}^T$ är en slumpvandring och att $(S(t))_{t=0}^T$ är en Markovprocess.

I fortsättningen antas att $u > r > d$ vilket innebär att modellen saknar arbitrage. Vi påminner om att $\Omega_k = \{u, d\}$ och $\mathcal{F}_k = 2^\Omega$ och definierar ett sannolikhetsmått på $\mathcal{F}_k$ så att $Q_k = q_u \delta_u + q_d \delta_d$ för $k = 0, 1, ..., T$. Sätt därefter

$$Q = Q_1 \times .. \times .Q_T.$$

Måttet $Q$ kallas för det riskneutralamåttet. Funktionerna $X_1, ..., X_T$ kan uppfattas som stokastiska variabler relativt sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ och de är stokastiskt oberoende. Det följer därför att

$$E^Q[f(X)] = \sum_{i_1,...,i_T = u \ eller \ d} q_{i_1} \cdot ... \cdot q_{i_T} f(i_1, ..., i_T).$$

Vi inför nu följande filtration, nämligen

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

och

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, ..., X_t), \ t = 1, ..., T.$$

En sekvens $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ kallas en strategi om $h(0) = h(1)$ och det för var varje $t = 1, ..., T$ gäller att $h(t)$ är $\mathcal{F}_{t-1}$-mätbar. Motsvarande värdeprocess $V_h = (V_h(t))_{t=0}^T$ definieras av

$$V_h(t) = h_B(t)S(t) + h_B(t)B(t),\ t = 0, 1, .., T.$$

Med våra konventioner görs valet av $h_S(t)$ aktier och $h_B(t)$ obligationer vid tiden $t-1$ för $t = 1, .., T$. Portföljvärdet $V_h(t)$ är $\mathcal{F}_t$-mätbart för $t = 0, ..., T$.

Om en strategi $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ uppfyller

$$V_h(t) = h_B(t+1)S(t) + h_B(t+1)B(t),\ t = 1, ..., T-1$$

sägs strategin vara vara självfinansierande. I detta fall gäller enligt sats 2 i kapitel 2, att

$$V_h(0) = e^{-rT} \sum_{i_1, ..., i_T = u \text{ eller } d} q_{i_1} ... q_{i_T} V_h(T; i_1, ..., i_T)$$

dvs

$$V_h(0) = e^{-rT} E^Q \left[ V_h \right].$$

Det följer också att

$$V_h(t) = e^{-r\tau} E^Q \left[ V_h(T) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

där $\tau = T - t$ och $t = 0, ..., T$. Detta innebär helt enkelt att sekvensen

$$(e^{-rt} V_h(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$$

är en $Q$-martingal dvs en martingal relativt sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. Speciellt gäller att

$$(e^{-rt} S(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$$

är en $Q$-martingal.

Antag ett derivat i aktien utbetalar beloppet $Y$ vid tiden $T$ där $Y$ är $\mathcal{F}_T$-mätbar. Det gäller att $Y = f(X_1, ..., X_T)$ för en lämlig funktion $f : \Omega \to \mathbf{R}$. I kapitel 2 visades att det finns en självfinansierande strategi $h$ sådan att $V_h(T) = Y$. Vi definierade sedan derivatets teoretiska värde $\Pi_Y(t)$ vid tiden $t$ så att

$$\Pi_Y(t) = V_h(t).$$

Vi har därför kommit fram till prisformeln

$$\Pi_Y(t) = e^{-r\tau} E^Q \left[ Y \mid \mathcal{F}_t \right],\ t = 0, ..., T.$$

Vi kan nu visa följande vackra sats.

**Sats 4.** *Betrakta binomialmodellen i $T$ tidssteg och antag $u > r > d$. Det finns endast ett sannolikhetsmått $\mu$, ekvivalent med $P$, sådant att*

$$(e^{-rt}S(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$$

*är en $\mu$-martingal och detta mått är lika med med $Q$.*

**Bevis.** Antag att $Q_0$ och $Q_1$ är sannolikhetsmått, ekvivalenta med $P$, sådana att $(e^{-rt}S(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ är en martingal relativt dessa mått. Om $h = (h_S(t), h_B(t))_{t=0}^T$ är en självfinansierande strategi så gäller för $t \leq T-1$ och $i = 0, 1$ att

$$E^{Q_i}\left[e^{-r}V_h(t+1) \mid \mathcal{F}_t\right] = E^{Q_i}\left[e^{-r}(h_S(t+1)S(t+1) + h_B(t+1)B(t+1)) \mid \mathcal{F}_t\right] =$$

$$E^{Q_i}\left[h_S(t+1)e^{-r}S(t+1) + h_B(t+1)B(t)) \mid \mathcal{F}_t\right] =$$

$$h_S(t+1)E^{Q_i}\left[e^{-r}S(t+1) \mid \mathcal{F}_t\right] + h_B(t+1)B(t) =$$

$$h_S(t+1)S(t) + h_B(t+1)B(t) = V_h(t)$$

och det följer genom att

$$E^{Q_i}\left[e^{-(T-t)r}V_h(T) \mid \mathcal{F}_t\right] = V_h(t),\ t = 0, 1, ..., T.$$

Om $t = 0$ erhålls

$$E^{Q_i}\left[e^{-rT}V_h(T)\right] = V_h(0)$$

för $i = 0, 1$ och därför måste

$$E^{Q_0}\left[e^{-rT}V_h(T)\right] = E^{Q_1}\left[e^{-rT}V_h(T)\right].$$

Eftersom vår modell är komplett kan $h$ väljas så att $e^{-rT}V^h(T)$ är en godtycklig $\mathcal{F}_T$-mätbar funktion och det följer att $Q_1 = Q_2$. Slutligen gäller enligt exempel 1 att $(e^{-rt}S(t), \mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ är $Q$-martingal, vilket visar sats 4.

Vi avslutar detta kapitel med några viktiga samband mellan sannolikhetsteori och Fourieranalys.

Antag att $\mu$ är ett ändligt positivt mått på $\sigma$-algebran $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ dvs ett ändligt positivt Borelmått i $\mathbf{R}^n$. Fouriertransformen $\hat{\mu}$ av $\mu$ definieras av ekvationen

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} d\mu(x),\ \xi \in \mathbf{R}^n$$

där

$$\xi \cdot x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k$$

är den vanliga skalärprodukten i $\mathbf{R}^n$. Det följer av Lebesgues majorantsats att $\hat{\mu}$ är kontinuerlig. Om $X$ är en $\mathbf{R}^n$-värd stokastisk variabel med fördelningsmåttet $\mu_X$ så kallas funktionen

$$E\left[e^{i\xi\cdot X}\right] = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\xi\cdot x} d\mu_X(x),\ \xi \in \mathbf{R}^n$$

för den karakteristiska funktionen för $X$. Det gäller alltså att

$$E\left[e^{i\xi, X}\right] = \hat{\mu}_X(-\xi),\ \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Det kanoniska Gaussmåttet $\gamma$ i $\mathbf{R}$ ges av ekvationen

$$d\gamma(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

och vi vet från kapitel 3 att

$$\hat{\gamma}(\xi) = e^{-\xi^2/2}.$$

Om $\mu$ och $\nu$ är ändliga positiva Borelmått i $\mathbf{R}^n$ respektive $\mathbf{R}^p$ och

$$\tau = \mu \times \nu$$

så följer att

$$\hat{\tau}(\xi, \eta) = \hat{\mu}(\xi)\hat{\nu}(\eta),\ \ (\xi, \eta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p.$$

Det kanoniska Gaussmåttet $\gamma_n$ i $\mathbf{R}^n$ har därför Fouriertransformen

$$\hat{\gamma}_n(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$$

där $\mid \xi \mid$ är den vanliga normen av $\xi$ i $\mathbf{R}^n$.

**Sats 5. (Entydighetssatsen)** *Om två ändliga positiva mått $\mu$ och $\nu$ i $\mathbf{R}^n$ har samma Fouriertransformer så är måtten lika.*

Beviset bygger på följande lemma där beteckningen $C_b(\mathbf{R}^n)$ står för rummet av alla reellvärda begränsade och kontinuerliga funktioner definierade på $\mathbf{R}^n$.

**Lemma 1.** *Låt $\mu$ och $\nu$ vara två ändliga positiva Borelmått i $\mathbf{R}^n$ sådana att*

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)d\nu(x), \text{ alla } f \in C_b(\mathbf{R}^n).$$

*Då är $\mu = \nu$.*

**Bevis.** Låt $K$ vara en kompakt delmängd av $\mathbf{R}^n$ och välj en sekvens $f_k \in C_b(\mathbf{R}^n)$, $k \in \mathbf{N}$, sådan att $f_k \geq f_{k+1}, k \in \mathbf{N}$, och

$$\lim_{k\to\infty} f_k = 1_K.$$

Detaljerna i konstruktionen lämnas som övning. Eftersom

$$\int_{\mathbf{R}^n} f_k(x)d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x)d\nu(x), \; k \in \mathbf{N}$$

så ger Lebesgues monotona konvergenssats att

$$\mu(K) = \nu(K).$$

Genom att nu utnyttja att ändliga positiva Borelmått i $\mathbf{R}^n$ är inre reguljära med avseende på kompakta delmängder följer lemma 1.

**Bevis av sats 5.** Vi har att för varje $y \in \mathbf{R}^n$ och $\sigma > 0$ att

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{\mu}(\xi)e^{i\xi\cdot y}e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}d\xi = \int_{\mathbf{R}^n}(\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}e^{i\xi\cdot y}e^{-\frac{\sigma^2}{2}|\xi|^2}d\xi)d\mu(x)$$

enligt Fubinis sats. Här är högra ledet lika med

$$\sigma^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}(\int_{\mathbf{R}^n}e^{-i\xi\cdot\frac{x-y}{\sigma}}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}d\xi)d\mu(x)=(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma})^n\int_{\mathbf{R}^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-y|^2}d\mu(x)$$

En liknande formel med $\mu$ ersatt med $\nu$ ger att

$$\int_{\mathbf{R}^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-y|^2}d\mu(x)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-y|^2}d\nu(x).$$

Vi multiplicerar denna relation med $f(y)$, där $f\in C_b(\mathbf{R}^n)$, och integrerar med avseende på måttet $dy$ och får beroende på Fubinis sats

$$\int_{\mathbf{R}^n}(\int_{\mathbf{R}^n}f(y)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-y|^2}dy)d\mu(x)=\int_{\mathbf{R}^n}(\int_{\mathbf{R}^n}f(y)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}|x-y|^2}dy)d\nu(x).$$

Ett variabelbyte ger därför att

$$\int_{\mathbf{R}^n}(\int_{\mathbf{R}^n}f(x+\sigma y)e^{-\frac{1}{2}|y|^2}dy)d\mu(x)=\int_{\mathbf{R}^n}(\int_{\mathbf{R}^n}f(x+\sigma y)e^{-\frac{1}{2}|y|^2}dy)d\nu(x).$$

Vi låter nu $\sigma\to 0$ och får med hjälp av Lebesgues majorantsats att

$$\int_{\mathbf{R}^n}f(x)d\mu(x)=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)d\nu(x)$$

och sats 1 är bevisad beroende på lemma 1.

Om $f\in L^1(m_n)$ definieras Fouriertransformen $\hat{f}$ av $f$ genom att

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^d}e^{-i\xi\cdot x}f(x)dx,\ \xi\in\mathbf{R}^n.$$

**Sats 6. (Inversionssatsen)** *Antag* $f\in L^1(m_n)$. *Om* $\hat{f}\in L^1(m_n)$ *och* $f$ *är kontinuerlig och begränsad så gäller att*

$$f(x)=\int_{\mathbf{R}^d}e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^n},\ x\in\mathbf{R}^n.$$

**Bevis.** Som så mycket annat i denna kurs följer resultatet från kalkyl med Gaussiska stokastiska variabler. Om $\varepsilon > 0$ gäller att

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\xi\cdot x} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^2} \hat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n} = \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\xi\cdot(x-y)} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^2} \frac{d\xi}{(2\pi)^n} \right\} dy.$$

Här är högra ledet lika med

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(y) \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\eta\cdot\frac{x-y}{\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \frac{d\eta}{\sqrt{2\pi}^n} \right\} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}^n \varepsilon^n} = \int_{\mathbf{R}^n} f(y) e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}|y-x|^2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}^n \varepsilon^n}.$$

Om vi sätter

$$y - x = \varepsilon z$$

blir uttrycket i högra ledet lika med

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x + \varepsilon z) e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}^n}.$$

Alltså gäller

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i\xi\cdot x} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}|\xi|^2} \hat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n} = \int_{\mathbf{R}^n} f(x + \varepsilon z) e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}^n}$$

och inversionssatsen följer genom att låta $\varepsilon \to 0+$ och utnyttja Lebesgues majorantsats.

Det finns ett viktigt specialfall då förutsättningarna i inversionssatsen är uppfyllda. Låt $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ beteckna klassen av alla reellvärda funktioner $f$ i $\mathbf{R}^n$ som är oändligt många gånger kontinuerligt deriverbara i varje variabel och som dessutom är identiskt noll utanför en begränsad mängd. Ett exempel på en sådan funktion $f$ får vi genom att definiera

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} \left\{ \varphi(1 + x_k)\varphi(1 - x_k) \right\}, \; x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$$

där

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, \; t > 0, \\ 0, \; t \leq 0. \end{cases}$$

Om $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ gäller att $\hat{f} \in L^1(m_n)$ ty genom att utföra partiell integration med avseende på variabeln $x_k$ så erhålls för varje $\xi_k \neq 0$ att

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx = \frac{1}{i\xi_k}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} f'_{x_k}(x)dx$$

och upprepning ger

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(i\xi_k)^p}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} f^{(p)}_{x_k}(x)dx,\ p \in \mathbf{N}.$$

Alltså är

$$\mid \xi_k \mid^p \mid \hat{f}(\xi) \mid \leq \int_{\mathbf{R}^n} \mid f^{(p)}_{x_k}(x) \mid dx,\ p \in \mathbf{N}$$

och det följer att

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^n} \left\{(1+ \mid \xi \mid)^{n+1} \mid \hat{f}(\xi) \mid\right\} < \infty$$

så $\hat{f} \in L^1(m_n)$.

**Korollarium 1.** *Om $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ gäller att $\hat{f} \in L^1(m_n)$ och*

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^n},\ x \in \mathbf{R}^n.$$

**Sats 7.** *Låt $X_k : \Omega \to \mathbf{R}^d$, $k = 1, ..., n$, vara stokastiska variabler. Föjande villkor är ekvivalenta:*

*(i)* $X_1, ..., X_n$ *är stokastiskt oberoende*

*(ii)*

$$E\left[\prod_{k=1}^n f_k(X_k)\right] = \prod_{k=1}^n E\left[f_k(X_k)\right]$$

*om* $f_k \in C_b(\mathbf{R}^d)$, $k = 1, ..., n$.

*(iii)*

$$E\left[e^{i\sum_{k=1}^n \xi_k\cdot X_k}\right] = \prod_{k=1}^n E\left[e^{i\xi_k\cdot X_k}\right]$$

*om* $\xi_k \in \mathbf{R}^d$, $k = 1, ..., n$.

Vi nöjer oss med att bevisa att $(iii)$ med för $(ii)$

**Bevis av** $(iii) \Rightarrow (ii)$ : Antag först

$$f_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d),\ k = 1, ..., n.$$

Vi har att

$$E\left[\prod_{k=1}^n \hat{f}_k(\xi_k) e^{i\xi_k \cdot X_k}\right] = \prod_{k=1}^n E\left[\hat{f}_k(\xi_k) e^{i\xi_k \cdot X_k}\right]$$

för alla $\xi_k$, $k = 1, ..., n$. Genom att integrera denna likhet över $\mathbf{R}^{nd}$ med avseende på det $nd$-dimensionella måttet $\frac{1}{(2\pi)^{nd}} d\xi_1 \cdot ... \cdot d\xi_n$ så följer från inverstionsatsen att

$$E\left[\prod_{k=1}^n f_k(X_k)\right] = \prod_{k=1}^n E\left[f_k(X_k)\right].$$

Genom approximation inses att samma likhet gäller om funktionerna $f_k \in C_b(\mathbf{R}^d), k = 1, ..., n$.

Låt $\mu_n$, $n \in \mathbf{N}_+$, och $\mu$ vara Borelsannolikhetsmått i $\mathbf{R}^d$. Sekvensen $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}_+}$ sägs konvergera svagt mot måttet $\mu$ om

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(A) = \mu(A)$$

för varje $A \in \mathcal{B}(\ \mathbf{R}^d)$ sådant att randen av $A$ är en $\mu$-nollmängd dvs $\mu(\partial A) = 0$. Denna typ av konvergens förkortas

$$\mu_n \Rightarrow \mu.$$

Om $X_n$, $n \in \mathbf{N}_+$, och $X$ är $\mathbf{R}^d$-värda stokastiska variabler och

$$\mu_{X_n} \Rightarrow \mu_X$$

så sägs sekvensen $(X_n)_{n\in\mathbf{N}_+}$konvergera mot $X$ i fördelning (för $d=1$ är definitionen ekvivalent med den definition av konvergens i fördelning som vi angav i kapitel 3). Denna typ av konvergens förkortas

$$X_n \to X.$$

Om nödvändigt anges här att $n\to\infty$.

**Sats 8. (Centrala gränsvärdessatsen)** *Låt* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$*vara en* i.i.d. *där varje* $X_n$ *är* $\mathbf{R}^d$*-värd och begränsad* n.s. (*dvs det existerar en konstant* $C\in[0,\infty[$ *så att* $P[\mid X_n\mid\leq C]=1,\ n\in\mathbf{N}_+$). *Antag* $X_n$ *har väntevärdet* $\alpha$ *och låt* $G$ *vara en centrerad Gaussiskt fördelad* $\mathbf{R}^d$*-värd stokastisk variabel med samma kovarians som* $X_n$. *Sätt*

$$Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1+...+X_n-n\alpha),\ n\in\mathbf{N}_+.$$

*Då gäller*

$$Z_n\to G.$$

Sats 8 följer lätt från följande resultat.

**Sats 9.** *Antag* $\mu_n$, $n\in\mathbf{N}_+$, *och* $\mu$ *är sannolikhetsmått i* $\mathbf{R}^d$ *sådana att*

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_n(\xi)=\hat{\mu}(\xi),\ \xi\in\mathbf{R}^d.$$

Då gäller att $\mu_n\Rightarrow\mu$.

**Bevis.** Antag $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. Det gäller enligt korollarium 1, att $\hat{f}\in L^1(m_d)$ och

$$f(x)=\int_{\mathbf{R}^d}e^{i\xi\cdot x}\hat{f}(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^d},\ x\in\mathbf{R}^d.$$

Alltså är

$$\int_{\mathbf{R}^d}f(x)d\mu_n(x)=\int_{\mathbf{R}^d}\left\{\int_{\mathbf{R}^d}e^{i\xi\cdot x}d\mu_n(x)\right\}\hat{f}(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^d}$$

och
$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}^d} \left\{ \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\xi\cdot x} d\mu(x) \right\} \hat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^d}.$$
Förutsättningarna ger därför att
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} f(x)d\mu_n(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)d\mu(x).$$

Innan vi går vidare införs lite ny formalism. Om $A$ och $B$ är delmängder av $\mathbf{R}^d$ definieras summan
$$A + B = \{z;\ z = x + y \text{ där } x \in A \text{ och } y \in B\}.$$
Den slutna enhetsbollen i $\mathbf{R}^d$ med centrum 0 och radie $r > 0$ betecknas med $\bar{B}(0;r)$ dvs
$$\bar{B}(0;r) = \{x;\ | x | \leq r\}.$$
Om $r > 0$ och $A \subseteq \mathbf{R}^d$ skriver vi $A_r = A + \bar{B}(0;r)$. Det slutna höljet av $A \subseteq \mathbf{R}^d$ betecknas med $\bar{A}$ och det inre av $A$ betecknas med $A^o$. Slutligen betecknar $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ en icke-negativ funktion som är noll utanför $\bar{B}(0;1)$ och som uppfyller relationen
$$\int_{\mathbf{R}^d} h(x)dx = 1.$$

Vi går nu vidare i beviset för sats 9. Låt $K$ vara en godtycklig kompakt delmängd av $\mathbf{R}^d$ och definiera för varje $p \in \mathbf{N}_+$ funktionen
$$f_p(x) = p^d \int_{\mathbf{R}^d} h(p(x-y))1_{K_{\frac{1}{p}}}(y)dy,\ x \in \mathbf{R}^d.$$
Det följer att $0 \leq f_p \leq 1$ och eftersom
$$f_p(x) = \int_{\bar{B}(0;1)} h(z)1_{K_{\frac{1}{p}}}(x - \frac{z}{p})dz,\ x \in \mathbf{R}^d$$
erhålls också att
$$f_p(x) = \begin{cases} 1,\ x \in K \\ 0,\ x \notin K_{\frac{2}{p}}. \end{cases}$$
Det gäller också att $f_p \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. Olikheten
$$\mu_n(K_{\frac{2}{p}}) \geq \int_{\mathbf{R}^d} f_p(x)d\mu_n(x)$$

ger därför att

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(K_{\frac{2}{p}}) \geq \int_{\mathbf{R}^d} f_p(x) d\mu(x)$$

och

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(K_{\frac{2}{p}}) \geq \mu(K).$$

På liknande sätt visas att

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K_{\frac{2}{p}})$$

och Lebesgues majorantsats medför att

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$$

ty

$$\lim_{p\to\infty} 1_{K_{\frac{2}{p}}}(x) = 1_K(x), \text{ alla } x \in \mathbf{R}^d.$$

Antag nu att $F$ är en sluten delmängd av $\mathbf{R}^d$. Då gäller först att

$$\mu_n(F) \leq \mu_n(F \cap K_{\frac{2}{p}}) + \mu_n(\mathbf{R}^d \backslash K_{\frac{2}{p}}).$$

Eftersom mängden $F \cap K_{\frac{2}{p}}$ är kompakt erhålls

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F \cap K_{\frac{2}{p}}) + 1 - \liminf_{n\to\infty} \mu_n(K_{\frac{2}{p}})$$

och

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F) + 1 - \mu(K).$$

Vi väljer nu $K = \bar{B}(0; r)$ med $r > 0$ stort och får

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F).$$

Genom att gå till komplement drar vi också slutsatsen att

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$$

för varje öppen delmängd $U$ av $\mathbf{R}^d$.

Det är nu lätt att avsluta beviset för satsen. Antag $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ och $\mu(\partial A) = 0$. Av olikheten $\mu_n(A) \leq \mu_n(\bar{A})$ erhåller vi att

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \mu(\bar{A}) = \mu(A)$$

och olikheten $\mu_n(A) \geq \mu_n(A^o)$ ger

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \geq \mu(A^o) = \mu(A).$$

Detta bevisar satsen.

**Bevis av sats 8.** Vi har för varje $\xi \in \mathbf{R}^d$ att

$$E\left[e^{i\xi\cdot Z_n}\right] = \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{i\xi\cdot\frac{X_k-\alpha}{\sqrt{n}}}\right]$$

så vi får

$$E\left[e^{i\xi\cdot Z_n}\right] = \left\{E\left[e^{\frac{i}{\sqrt{n}}\xi\cdot(X_1-\alpha)}\right]\right\}^n.$$

Låt nu

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2} + t^3 f(t),\ t \in \mathbf{R}$$

där funktionen $f$ är begränsad på begränsade intervall. Härav följer att

$$E\left[e^{i\xi\cdot Z_n}\right] =$$

$$\left\{1 - \frac{1}{2n}E\left[(\xi\cdot(X_1-\alpha))^2\right] + \frac{1}{n^{3/2}}E\left[(\xi\cdot(X_1-\alpha))^3 f(\,\frac{1}{n^{1/2}}\xi\cdot(X_1-\alpha))\right]\right\}^n.$$

Alltså gäller

$$\lim_{n\to\infty} E\left[e^{i\xi\cdot Z_n}\right] = e^{-\frac{1}{2}E\left[(\xi\cdot(X_1-\alpha))^2\right]}$$

vilket beroende på sats 9 visar sats 8.

## Övningar

1. Låt $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en i.i.d. där varje $X_n \in N(0,1)$. Sätt $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ och

$$M_n = e^{X_1+...+X_n-\frac{n}{2}},\ n = 1, 2, ... \quad .$$

Visa att $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ är en martingal.

2. Betrakta en sekvens reellvärda stokastiska variabler $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ och en sekvens $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ av $\sigma$-algebror. Visa att sekvensen $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$är en martingal om det för varje $n \geq 1$ gäller att

   $(i)\, \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$

   $(\,ii)\, \sigma(M_n) \subseteq \mathcal{F}_n$

   $(iii)\; M_n \in L^1(P)$ och $M_n = E\,[\, M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]\,.$

3. Visa att en reellvärd stokastisk process $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ har Markovegenskapen om
$$E\,[f(U_{n+1}) \mid U_1, ..., U_n] = E\,[f(U_{n+1}) \mid U_n]\,,\; n \geq 1,$$
för varje Borelmätbar begränsad funktion $f:\, \mathbf{R}{\to}\mathbf{R}$.

4. Antag $x_1, x_2, x_3$ och $r$ är reella tal och $x_1 < x_2 < x_3$. Betrakta en modell för en kapitalmarknad bestående av en aktie och en obligation där tiden $t$ är lika med 0 eller 1. Aktiens pris vid tiden $t$ betecknas med $S(t)$ och obligationens pris vid tiden $t$ betecknas med $B(t)$. Det gäller att
$$S(1) = S(0)e^X$$
där $S(0)$ är en positiv konstant och där $X$: $\Omega \to \{x_1, x_2, x_3\}$ är en stokastisk varibel sådan att $P\,[X = x_k] > 0,\; k = 1, 2, 3$. Vidare gäller att
$$B(1) = B(0)e^r$$
där $B(0)$ är en positiv konstant. Begreppet arbitrage definieras analogt med motsvarande begrepp i samband med binomialmodellen.

   a) Under vilka villkor på parametrarna $x_1, x_2, x_3$ och $r$ saknar modellen arbitrage?

   b) Antag $x_1 < r < x_3$ och representera $X$ som identitetsavbildningen i mängden $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. Visa att det finns flera sannolikhetsmått i $\Omega$ sådana att
$$S(0) = e^{-r} E^Q\,[S(1)]\,.$$
Ge också exempel på ett derivat av europeisk typ som slutdagen 1 utbetalar beloppet $g(S(1))$ och som har egenskapen att
$$g(S(1)) \neq h_S S(1) + h_B B(1)$$

för alla reella $h_B$ och $h_S$ (man säger därför att modellen ej är komplett). (Ledning: Om $U$ och $V$ är reellvärda stokastiska variabler så betyder relationen $U \neq V$ att $P[U = V] < 1$.)

5. Betrakta binomialmodellen i $T$ tidssteg och låt $h = (h_S, h_B)$ vara en självfinansierande strategi. a) Visa att

$$e^{-rt}V_h(t) = V_h(0) + \sum_{k=1}^{t} h_S(k)(e^{-rk}S(k) - e^{-r(k-1)}S(k-1)).$$

(Ledning: Om

$$A(t) = (e^{-rt}S(t), B(0)) = (\tilde{S}(t), B(0))$$

så följer att

$$V_h(0) + \sum_{k=1}^{t} h_S(k)(\tilde{S}(k) - \tilde{S}(k-1)) =$$

$$V_h(0) + \sum_{k=1}^{t} h(k) \cdot (A(k) - A(k-1)).$$

Gruppera därefter om termerna.) b) Ge ett alternativt bevis för sats 4 med hjälp av del a).

6. Låt $X_n$, $Y_n$, $n \in \mathbf{N}_+$ och $X$ vara $\mathbf{R}^d$-värda stokastiska variabler sådana att

$$X_n \to X.$$

Antag

$$\lim_{n \to \infty} P[| X_n - Y_n | \geq \varepsilon] = 0, \text{ alla } \varepsilon > 0.$$

Visa att

$$Y_n \to X.$$

7. Låt $X_n$, $n \in \mathbf{N}_+$ och $X$ vara $\mathbf{R}^d$-värda stokastiska variabler sådana att

$$X_n \to X.$$

Visa att

$$f(X_n) \to f(X)$$

om $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^m$ är kontinuerlig.