MATEMATIK OCH OPTIONER (CTH[$TMA861$]&GU[$MAN690$])

lp3-lp4, 1999/2000

Examinations-PM

Det skriftliga slutprovet omfattar 25 poäng. Kursen har sex ej obligatoriska inlämningsuppgifter. Av dessa räknas endast de fem bästa resultaten och man kan maximalt erhålla $5 \times 9 = 45$ poäng från denna del. Erhålls X poäng på slutprovet och sammanlagt Y poäng från de fem bästa inlämningsuppgifterna beräknas nyckeltalet

$$S = [X + 0.1 \times Y]$$

där $[a]$ betyder heltalsdelen av a. Inom grundutbildningen på Chalmers krävs ett nyckeltal S minst lika med 10 för godkänt ($15 \leq S < 20$ ger en 4:a och $S \geq 20$ ger en 5:a). Inom grundutbildningen på GU krävs ett nyckeltal S minst lika med 12 för godkänt ($S \geq 18$ ger betyget VG). Hur uppnått kursresultat bedöms inom forskarutbildningen bestämmer den forskarstuderandes handledare.

Det skriftliga slutprovet omfattar alltså 25 poäng; problemdelen omfattar 13 poäng och teoridelen 12 poäng. Minst 6 av de 12 poängen från teoridelen hämtas från följande lista:

1. 1domin: Visa att det ej är optimalt att lösa in en amerikansk köpoption före slutdagen då aktien ej ger utdelning.

2. 2bin: Sats 1

3. 2bin: Sats 2

4. 3Brown: Antag $(X_k)_{k=1}^n$ är en reellvärd Gaussisk stokastisk process. Visa att $X_1, ..., X_n$ är stokastiskt oberoende om och endast om $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ för $i \neq j$.

5. 3Brown: Sats 4 och Sats 5

6. 4BSdiff: Motivera definition 1

7. 4BSdiff: Sats 1

8. 5utd: Sats 1 med $N = 0$.

9. 6konv: Sats 6

10. 6konv: Korollarium 2

11. 8matt: Visa att $L^2(P) \subseteq L^1(P)$.

12. 9stok: Sats 3

13. 10Gauss: Sätt

$$L_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mid W(\frac{k+1}{2^n}T) - W(\frac{k}{2^n}T) \mid .$$

Visa att

$$\lim_{n\to\infty} L_n^{(1)} = \infty \text{ n.s.}$$

14. 10Gauss: Om $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T$ definieras

$$L_\Delta^{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1} (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2.$$

Visa att

$$L_\Delta^{(2)} \to T \text{ i } L^2(P)$$

då indelningens finhet

$$\delta = \max_{0\le k\le n-1} (t_{k+1} - t_k)$$

går mot noll

15. Gul, kap 9: Definiera Paley-Wiener-Zygmunds stokastiska integral

16. Gul, kap 10: Sats 2

17. Gul, kap 11: Sats 6

18. Gul, kap 11: Antag att $a \in L_W^1[0,T]$, $b \in L_W^2[0,T]$ och låt

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t).$$

Visa med hjälp av produktregeln att

$$dX^n(t) = nX^{n-1}(t)dX(t) + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2}(t)b^2(t)dt,\ n = 2, 3, \ldots .$$

19. Gul, kap 12: Sats 1

20. Gul, kap 12: Ett enkelt aktiederivat av europeisk typ med slutdagen T har värdet $v(t, S(t))$ vid tiden t. Härled Black-Scholes differentialekvation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + rs\frac{\partial v}{\partial s} - rv = 0,\ t < T,\ s > 0,$$

med hjälp av stokastisk kalkyl.

21. Gul, kap 12: Sats 2

Göteborg 02-02- 2000

Christer Borell