Matematik och optioner (TM/GU), 99/00
INLÄMNINGSUPPGIFT 5:

Uppgift 1. 4BSdiff: Övning 5.

Uppgift 2. a) Antag $Y, V \in L^2(P)$, där V ej är konstant och $E[V] = \alpha_V$. Låt $\beta \in \mathbf{R}$. Visa att $\mathrm{Var}(Y - \beta(V - \alpha_V))$ är minimal om

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(Y, V)}{\mathrm{Var}(V)}.$$

b) Definiera

$$Y = f(X) = e^{-r\tau} \max(0, se^X - K)$$

där $X \in N((r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$ och där r, s, K, σ och $\tau > 0$ är positiva konstanter (med standardbeteckningar från Black-Scholes modell gäller att $c(t, s, K; T) = E[Y]$). Sätt $V = e^X$ och beräkna

$$\beta_0 = \frac{\mathrm{Cov}(Y, V)}{\mathrm{Var}(V)}.$$

I deluppgifterna c) och d) nedan förutsätts Black-Scholes kapitalmarknadsmodell.

c) Beräkna $c(0, 100, 105; 1/12)$ i fallet $r = \ln 1.05$ och $\sigma = 0.3$.

d) Låt $X_1, ..., X_n$ vara stokastiskt oberoende observationer på den stokastiska variabeln X i del b) och sätt

$$Y_i = f(X_i),\ i = 1, ..., n,$$

$$V_i = e^{X_i},\ i = 1, ..., n,$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i$$

och

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})(V_i - \bar{V})}{\sum_{i=1}^{n} (V_i - \bar{V})^2}.$$

Betrakta följande skattningar av köpoptionspriset $c(t, s, K; T)$, nämligen

$$MC_1(n) = \bar{Y},$$

$$MC_2(n) = \bar{Y} - \hat{\beta}(\bar{V} - \alpha_V)$$

och

$$MC_3(n) = \bar{Y} - \beta_0(\bar{V} - \alpha_V)$$

där β_0 definieras i del b). Beräkna $c(0, 100, 105; 1/12)$ med hjälp av skattningen $MC_1(1000)$ i fallet $r = \ln 1.05$ och $\sigma = 0.3$. Upprepa försöket 100 gånger och beräkna stickprovets varians. Behandla till sist samma uppgifter för de två andra skattningarna.

Uppgift 3. Betrakta följande modell för en kapitalmarknad bestående av en aktie och en obligation där tiden t är lika med 0 eller 1. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$ och obligationens pris vid tiden t betecknas med $B(t)$. Låt x_1, x_2 och x_3 vara reella tal sådana att $x_1 < x_2 < x_3$ och antag att

$$S(1) = S(0)e^X$$

där $S(0)$ är en positiv konstant och där $X \colon \Omega \to \{x_1, x_2, x_3\}$ är en stokastisk varibel sådan att $P[X = x_k] > 0$, $k = 1, 2, 3$. Vidare gäller att

$$B(1) = B(0)e^r$$

där $B(0)$ är r är positiva konstanter. Begreppet arbitrage definieras analogt med motsvarande begrepp i samband med binomialmodellen.

a) Under vilka villkor på parametrarna x_1, x_2, x_3 och r saknar modellen arbitrage?

b) Antag $x_1 < r < x_3$ och representera X som identitetsavbildningen i mängden $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. Visa att det finns flera sannolikhetsmått Q i Ω som är ekvivalenta med P och som uppfyller relationen

$$S(0) = e^{-r} E^Q [S(1)] .$$

Ge också exempel på ett derivat av europeisk typ som slutdagen 1 utbetalar beloppet $g(S(1))$ och som har egenskapen att

$$g(S(1)) \neq h_S S(1) + h_B B(1)$$

för alla reella h_B och h_S (modellen är därför ej komplett). (Ledning: Om U och V är reellvärda stokastiska variabler så betyder relationen $U \neq V$ att $P[U = V] < 1$.)