Matematik och optioner (TM/GU), 99/00

INLÄMNINGSUPPGIFT 6

1. Om $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig och $n \in \mathbf{N}_+$ definieras

$$\varepsilon_n(f) = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).$$

   a) Låt $W = (W(t))_{0\leq t\leq 1}$ vara en normaliserad Wienerprocess i tidsintervallet $[0,1]$. Skriv $\varepsilon_n(W)$ som en stokastisk integral.

   b) Beräkna $\mathrm{Var}(\varepsilon_n(W))$.

2. Antag $k \in \mathbf{N}$. a) Skriv differentialen $dW^k(t)$ på formen $a(t)dt+b(t)dW(t)$.
   b) Sätt

$$a_k(t) = E\left[W^k(t)\right]$$

   och dra slutsatsen att

$$a_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t a_{k-2}(s)ds,\ k = 2, 3, 4, \ldots .$$

   c) Beräkna $a_2(t), a_4(t)$ och $a_6(t)$.

3. Sätt

$$X(t) = (W(t)+t)e^{-W(t)-\frac{t}{2}},\ t \geq 0.$$

   Visa att processen $(X(t))_{t\geq 0}$ är en Wienermartingal.