MATEMATIK OCH OPTIONER (CTH[$TMA861$],GU[$MAN690$])

Skrivningsdag: 15 april 2000, kl $8^{45} - 13^{45}$ *Lokal*: mg *Hjälpmedel:* Beta
Telefonvakt: Christer Borell, tel. 92 18 93 *OBS:* Text på 2 sidor

– –

Nedan betecknar $(W(t))_{t\geq 0}$ en reellvärd normaliserad Wienerprocess med kontinuerliga trajektorier. I uppgifterna 4 och 7a) förutsätts Black-Scholes modell. Aktiens pris $S(t)$ vid tiden t ges av ekvationen $S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}$, där $\mu \in \mathbf{R}$ och där σ och $S(0)$ är positiva konstanter. Obligationens pris $B(t)$ vid tiden t är lika med $B(0)e^{rt}$, där $B(0)$ och r är positiva konstanter.

1. (3p) Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > 0$, $d = -u$, $r = \frac{u}{2}$ och $t \in \{0, 1, 2\}$. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet
$$S(2) - \min_{t\in\{0,1,2\}} S(t).$$
Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

2. (1p+1p+1p) Bestäm $h \in M_W^2\,[0, T]$ så att
$$X = E\,[X] + \int_0^T h(t)dW(t)$$
då a) $X = W(T)$ b) $X = W^2(T)$ c) $X = e^{W(T)}$.

3. (2p+2p) a) Lös den stokastiska differentialekvationen
$$dX(t) = -X(t)dt + dW(t),\ t \geq 0$$
med begynnelsevärdet $X(0) = 0$. Vilken fördelning har $X(t)$ för fixt t?
b) Beräkna
$$E\left[e^{-\int_0^1 X(t)dt}\right].$$

4. (3p) Antag $0 \leq t \leq T < T_1$ och $L > 0$. Ett finansiellt derivat ger innehavaren rättigheten, men ej skyldigheten, att vid tiden T välja antingen en aktieköpoption med lösenpriset $S(T)$ och slutdagen T_1 eller ett fixt belopp L. Bestäm derivatets värde vid tiden t.

5. (2p) Betrakta en kapitalmarknad bestående av en aktie med priset $S(t)$ vid tiden t och en obligation med priset $B(t) = B(0)e^{rt}$ vid tiden t. Antag $K > 0$. Visa att

$$S(t) - c(t, S(t), K; T) = Ke^{-r(T-t)} - p(t, S(t), K; T)$$

för alla $t \in [0, T]$ så snart dominansprincipen gäller.

6. (2p) Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är konvex och X betecknar en reellvärd stokastisk variabel sådan att

$$E [| X |] < \infty$$

och

$$E [| f(X) |] < \infty.$$

Visa att

$$f(E [X]) \leq E [f(X)] .$$

7. (3p+2p) a) Ett enkelt europeiskt aktiederivat med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ och slutdagen $T > 0$ har värdet $v(t, S(t))$ vid tiden $t \in [0, T]$ där

$$v(t, s) = e^{-r\tau} E \left[g(se^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)}) \right] \tag{1}$$

och $\tau = T - t$. Visa med hjälp härav att en europeisk aktieköpoption med slutdagen T och lösenpriset K har värdet $s\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$ vid tiden $t \in [0, T[$, där

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

och $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$.

b) Antag $t < t_* < T$, $\delta \in]0, 1[$ och att aktien utdelar beloppet $\delta S(t_*)$ vid tiden t_*. Hur ändras prisformeln (1) under denna förutsättning? Motivera svaret!

8. (3p) Antag funktionen $f : [0, T] \to \mathbf{R}$ är kontinuerligt deriverbar. Visa att

$$\int_0^T f(t)dW(t) = f(T)W(T) - \int_0^T f'(t)W(t)dt.$$