**LÖSNINGAR**
**MATEMATIK OCH OPTIONER (CTH[$TMA861$],GU[$MAN690$])**

*Skrivningsdag:* 15 april 2000, kl $8^{45} - 13^{45}$

$- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -$

1. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation, där parametrarna uppfyller $u > 0$, $d = -u$, $r = \frac{u}{2}$ och $t \in \{0, 1, 2\}$. Aktiens pris vid tiden $t$ betecknas med $S(t)$. Ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen 2 utbetalar denna dag beloppet

$$S(2) - \min_{t \in \{0,1,2\}} S(t).$$

Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

*Lösning.* Sätt $S(0) = s$ och

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ t = 0, 1.$$

Låt $v(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden $t$. Vi har att

$$\begin{pmatrix} v(2)_{|X_1=u,X_2=u} = se^{2u} - s = s(e^{2u} - 1) \\ v(2)_{|X_1=u,X_2=d} = se^{u+d} - s = 0 \\ v(2)_{|X_1=d,X_2=u} = se^{d+u} - se^{d} = s(1 - e^{d}) \\ v(2)_{|X_1=d,X_2=d} = se^{2d} - se^{2d} = 0. \end{pmatrix}$$

och definieras

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q_d$$

så följer att

$$\begin{pmatrix} v(1)_{|X_1=u} = e^{-r}(q_u s(e^{2u} - 1) + q_d 0) \\ v(1)_{|X_1=d} = e^{-r}(q_u s(1 - e^{d}) + q_d 0) \end{pmatrix}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} v(1)_{|X_1=u} = se^{-r}q_u(e^{2u} - 1) \\ v(1)_{|X_1=d} = se^{-r}q_u(1 - e^{d}) \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$v(0) = e^{-r}(q_u se^{-r}q_u(e^{2u} - 1) + q_d se^{-r}q_u(1 - e^{d}))$$

$$= sq_u e^{-2r}(q_u(e^{2u}-1)+q_d(1-e^d)) \leftarrow SVAR$$

där $q_u$ och $q_d$ är som ovan och där parametrarna $u, d$ och $r$ är relaterade som i texten.

2. Bestäm $h \in M_W^2\,[0,T]$ så att

$$X = E\,[X] + \int_0^T h(t)dW(t)$$

då a) $X = W(T)$ b) $X = W^2(T)$ c) $X = e^{W(T)}$.

*Lösning.* a) Det gäller att

$$\int_0^T 1dW(t) = W(T) - W(0) = W(T).$$

Alltså är $h = 1$.

$SVAR$: $h = 1$.

b) Itôs lemma ger

$$dW^2(t) = 2W(t)dW(t) + dt$$

varför

$$W^2(T) = \int_0^T 2W(t)dW(t) + T.$$

Sätt $h(t) = 2W(t)$, $0 \le t \le T$. Processen $h$ är progressivt mätbar och

$$\int_0^T E\left[h^2(t)\right] dt = 2T^2 < \infty.$$

$SVAR$: $h(t) = 2W(t)$, $0 \le t \le T$.

c) Sätt

$$u(t,x) = e^{x-t/2}.$$

Itôs lemma ger

$$du(t,W(t)) = u_t'(t,W(t)dt + u_x'(t,W(t)dW(t) + \frac{1}{2}u_{xx}''(t,W(t))dt$$

$$= u(t, W(t))dW(t)$$

och integration ger

$$u(T, W(T)) = u(0,0) + \int_0^T u(t, W(t))dt$$

dvs

$$e^{W(T)} = e^{T/2} + \int_0^T e^{W(t)+(T-t)/2} dt.$$

Sätt

$$h(t) = e^{W(t)+(T-t)/2},\ 0 \leq t \leq T.$$

Processen $h$ är progressivt mätbar och

$$\int_0^T E\left[h^2(t)\right] dt = e^T(e^T - 1) < \infty.$$

*SVAR*: $h(t) = e^{W(t)+(T-t)/2}$, $0 \leq t \leq T$.

3. a) Lös den stokastiska differentialekvationen

$$dX(t) = -X(t)dt + dW(t),\ t \geq 0$$

med begynnelsevärdet $X(0) = 0$. Vilken fördelning har $X(t)$ för fixt $t$?
b) Beräkna

$$E\left[e^{-\int_0^1 X(t)dt}\right].$$

*Lösning.* a) Vi har att

$$dX(t) + X(t)dt = dW(t)$$

dvs

$$d(e^t X(t)) = e^t dW(t)$$

och integration ger

$$e^t X(t) = \int_0^t e^{\lambda} dW(\lambda)$$

ty $X(0) = 0$. Härav följer att

$$X(t) = \int_0^t e^{\lambda - t} dW(\lambda).$$

Eftersom Wienerprocessen är en centrerad Gaussisk process så följer att den stokastiska variabeln $X(t)$ har en Gaussisk fördelning med väntevärdet 0. Dess varians ges av

$$E\left[X^2(t)\right] = \int_0^t (e^{\lambda - t})^2 d\lambda = \left[\frac{1}{2}e^{2(\lambda - t)}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}).$$

b) Eftersom $(X(t))_{t\geq 0}$ är en centrerad Gaussisk process är den stokastiska variabeln

$$Y = \int_0^1 X(t)dt$$

en Gaussisk variabel med väntevärdet 0. Vidare är

$$E\left[Y^2\right] = E\left[\int_0^1 X(s)ds \int_0^1 X(t)dt\right] = E\left[\int_0^1 \int_0^1 X(s)X(t)dsdt\right].$$

Observera här att

$$E\left[\int_0^1 \int_0^1 \mid X(s)X(t) \mid dsdt\right] = \int_0^1 \int_0^1 E\left[\mid X(s)X(t) \mid\right] dsdt < \infty$$

ty

$$E\left[\mid X(s)X(t) \mid\right] \leq \sqrt{E\left[X^2(s)\right]}\sqrt{E\left[X^2(t)\right]} \leq \frac{1}{2}.$$

Fubinis sats medför därför att

$$E\left[Y^2\right] = \int_0^1 \int_0^1 E\left[X(s)X(t)\right] dsdt = 2 \iint\limits_{0\leq s\leq t\leq 1} E\left[X(s)X(t)\right] dsdt.$$

Om $0 \leq s \leq t \leq 1$ blir emellertid

$$E\left[X(s)X(t)\right] = E\left[\int_0^t 1_{[0,s]}(\lambda)e^{\lambda - s}dW(\lambda) \int_0^t e^{\lambda - t}dW(\lambda)\right]$$

$$= \int_0^t 1_{[0,s]}(\lambda)e^{2\lambda - s - t}d\lambda = \int_0^s e^{2\lambda - s - t}d\lambda$$

$$\left[\frac{1}{2}e^{2\lambda - s - t}\right]_0^s = \frac{1}{2}(e^{s-t} - e^{-s-t}).$$

Härav följer att

$$E\left[Y^2\right] = \iint\limits_{0\le s\le t\le 1} (e^{s-t} - e^{-s-t})dsdt = \int_0^1 \left[e^{s-t} + e^{-s-t}\right]_{s=0}^{s=t} dt$$

$$= \int_0^1 (1 + e^{-2t} - 2e^{-t})dt = 2e^{-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}.$$

Nu är

$$E\left[e^{-\int_0^1 X(t)dt}\right] = e^{\frac{1}{2}E\left[Y^2\right]} = e^{e^{-1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2}} \leftarrow SVAR$$

**Alternativ till 3b:** Det gäller att

$$Y = \int_0^1 X(t)dt = -\int_0^1 dX(t) + \int_0^1 dW(t)$$

$$-X(t) + \int_0^1 dW(t) = \int_0^1 (-e^{\lambda-1} + 1)dW(\lambda)$$

varför

$$E\left[e^{-\int_0^1 X(t)dt}\right] = e^{\frac{1}{2}E\left[Y^2\right]} = e^{\frac{1}{2}\int_0^1(-e^{\lambda-1}+1)^2 d\lambda}$$

$$= e^{e^{-1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2}} \leftarrow SVAR$$

4. Antag $0 \le t \le T < T_1$ och $L > 0$. Ett finansiellt derivat ger innehavaren rättigheten, men ej skyldigheten, att vid tiden $T$ välja antingen en aktieköpoption med lösenpriset $S(T)$ och slutdagen $T_1$ eller ett fixt belopp $L$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t$.

*Lösning.* Derivatets värde vid tiden $t$ betecknas med $v(t)$. Enligt förutsättning gäller att $v(T) = \max(0, c(T), L) = \max(c(T), L)$, där

$$c(T) = c(T, S(T), S(T); T_1) = c(T, 1, 1; T_1)S(T).$$

Alltså blir

$$v(T) = (c(T) - L)^+ + L$$

$$= c(T, 1, 1; T_1)(S(T) - \frac{L}{c(T, 1, 1; T_1)})^+ + L$$

och det följer att

$$v(t) = c(T,1,1;T_1)c(t,S(t),\frac{L}{c(T,1,1;T_1)};T) + Le^{-r(T-t)}$$

eller

$$v(t) = c(t,c(T,1,1;T_1)S(t),L;T) + Le^{-r(T-t)} \leftarrow SVAR$$

Här är

$$c(T,s,K;T) = \max(0,s-K)$$

och för $t < T$ gäller att

$$c(t,s,K;T) = s\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

där

$$d_1 = \frac{\ln\frac{s}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

och

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$