LÖSNINGAR
MATEMATIK OCH OPTIONER (CTH[$TMA861$],GU[$MAN690$])

Skrivningsdag: 23 sept 2000, kl $8^{45} - 13^{45}$

– –

1. a) Under vilka villkor på parametrarna μ och σ är sannolikheten

$$P\left[S(t) \leq 2S(0)\right]$$

en avtagande funktion av t för alla $t \geq 0$? b) Under vilka villkor på på parametrarna r och σ är sannolikheten

$$Q\left[S(t) \leq 2S(0)\right]$$

en avtagande funktion av t för alla $t \geq 0$?

Lösning: a) Det gäller att

$$P\left[S(t) \leq 2S(0)\right] = P\left[e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t)} \leq 2\right]$$

$$= P\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t) \leq \ln 2\right] = P\left[\sigma W(t) \leq \ln 2 + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)t\right]$$

$$= P\left[\sigma\sqrt{t}G \leq \ln 2 + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)t\right]$$

där $G \in N(0,1)$. Alltså är

$$P\left[S(t) \leq 2S(0)\right] = \Phi(\frac{1}{\sigma}\left\{\frac{\ln 2}{\sqrt{t}} + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)\sqrt{t}\right\}).$$

Sätt

$$f(x) = \frac{\ln 2}{x} + (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)x, \ x > 0.$$

Funktionen f är strikt konvex och

$$f'(x) = -\frac{\ln 2}{x^2} + \frac{\sigma^2}{2} - \mu.$$

Om$\frac{\sigma^2}{2} - \mu \leq 0$ är $f'(x) < 0$ och f är strängt avtagande. Om $\frac{\sigma^2}{2} - \mu > 0$ är $f'(x_0) = 0$ där

$$x_0 = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{\sigma^2 - 2\mu}}.$$

Alltså är f strikt växande i intervallet $[0, x_0[$.

SVAR: Den givna sannolikheten är avtagande om och endast om $\mu \geq \frac{\sigma^2}{2}$.

b) Det gäller att

$$Q\left[S(t) \leq 2S(0)\right] = Q\left[e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \leq 2\right]$$

$$Q\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t) \leq \ln 2\right] = Q\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma(W^a(t) + a(t)) \leq \ln 2\right]$$

där $W^a(t) = W(t) - a(t)$ och

$$a(t) = \frac{r - \mu}{\sigma} t.$$

Härav följer att

$$Q\left[S(t) \leq 2S(0)\right] = Q\left[(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W^a(t) \leq \ln 2\right]$$

$$= P\left[(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t) \leq \ln 2\right]$$

eftersom processen W^a är en normaliserad Wienerprocess relativt måttet Q. Del a) ger oss nu följande

SVAR: Den givna sannolikheten är avtagande om och endast om $r \geq \frac{\sigma^2}{2}$.

2. Betrakta binomialmodellen för en aktie och en obligation i T tidssteg, där parametrarna uppfyller $u > r > 0 > d$ och där $T = 2m$ är ett jämnt positivt heltal. Ett aktiederivat av europeisk typ utfärdas vid tiden 0 och utbetalar slutdagen T beloppet 1 om aktiepriset $(S(n))_{n=0}^{T}$ uppfyller

$$(S(n) - S(n+1))(S(n+1) - S(n+2)) < 0, \; n = 0, ..., T-2.$$

I annat fall utbetalar derivatet ingenting. Bestäm derivatets värde vid tiden 0.

Lösning: Låt

$$q_u = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d} = 1 - q_d.$$

Derivatets värde ges av

$$e^{-rT}(q_u q_d q_u q_d \cdot ... \cdot q_u q_d \cdot 1 + ... + q_d q_u q_d q_u \cdot ... \cdot q_d q_u \cdot 1)$$

$$= e^{-rT}(q_u^m q_d^m + ... + q_d^m q_u^m) = 2e^{-rT} q_u^m q_d^m \leftarrow SVAR$$

3. a) Ett aktiederivat av europeisk typ har slutdagen T och utbetalningsfunktionen $g(s) = \ln \frac{1}{s}$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t < T$. b) Betrakta en självfinansierande portföljstrategi i aktien och obligationen med värdet $g(S(T))$ vid tiden T. Hur många aktier ingår i portföljen vid tiden $t < T$?

Lösning: a) Derivatets värde vid tiden t är lika med $v(t, S(t))$, där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma W(\tau)}) \right]$$

och $\tau = T - t$. Alltså är

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[-\ln s - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \sigma W(\tau) \right]$$

$$= -e^{-r\tau}(\ln s + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau).$$

SVAR: $-e^{-r\tau}(\ln S(t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau)$

b) Om en självfinansierande portföljstrategi i aktien och obligationen har värdet $V(t) = v(t, S(t)$ vid tiden t, där $V(T) = g(S(T))$ och

$$\begin{cases} V(t) = h_S(t)S(t) + h_B(t)B(t) \\ dV(t) = h_S(t)dS(t) + h_B(t)dB(t) \end{cases}$$

så är

$$h_S(t) = v'_s(t, S(t)).$$

I detta fall följer därför att

$$h_S(t) = -e^{-r\tau}\frac{1}{S(t)} \leftarrow SVAR$$

4. Antag $T \in]0, \infty[$ och

$$X = \int_0^T \sin W(t) dW(t).$$

Beräkna variansen av X.

Lösning: Sätt

$$f(t) = \sin W(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

Det gäller att f är progressivt mätbar och

$$E\left[\int_0^T f^2(t)dt\right] = \int_0^T E\left[\sin^2 W(t)\right] dt.$$

Här är

$$E\left[\sin^2 W(t)\right] = E\left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2W(t))\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1 - E\left[\cos 2W(t)\right]) = \frac{1}{2}(1 - E\left[e^{i2W(t)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{2}E\left[(2W(t))^2\right]}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

och det följer att

$$E\left[\int_0^T f^2(t)dt\right] = \int_0^T \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})dt$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{1}{4}e^{-2T} - \frac{1}{4} < \infty.$$

Alltså måste $f \in M_W^2\left[0, T\right]$ varför

$$E\left[X\right] = 0$$

och

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[\int_0^T f^2(t)dt\right] = \frac{T}{2} + \frac{1}{4}e^{-2T} - \frac{1}{4} \leftarrow SVAR$$