Chalmers/GU
Matematiska institutionen

TENTAMEN

TMA945/MAN280
TILLÄMPAD OPTIMERINGSLÄRA

Datum:	00–08–23
Tid:	8^{45}–13^{45}
Hjälpmedel:	Typgodkänd räknedosa
Antal uppgifter:	7; för godkänd uppgift krävs 2 poäng av 3. Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. CTH: För godkänt krävs 8 poäng och tre godkända uppgifter. GU: För godkänt krävs 11 poäng och tre godkända uppgifter.
Examinator:	Michael Patriksson
Jourhavande lärare:	Henrik Olsson, tel. 0740-479626
Resultat anslås senast:	00–09–06 Kortfattade lösningsförslag anslås vid skrivningstidens slut på anslagstavlan för optimeringslära vid matematiska institutionen.

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa lösningsmetodik och beräkningar.
Använd generellt giltiga metoder, t.ex. de som genomgåtts i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

(Linjärprogrammering)

Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{lrrrrrrl} \text{minimera} & z = & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2, \\ & & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(2p) a) Lös problemet på *korrekt* sätt med hjälp av simplexmetoden, dvs. med hjälp av både Fas I och Fas II.

(1p) b) När problemet är löst kommer den reducerade kostnaden för slackvariabeln tillhörande bivillkor 1 att anta värdet av skuggpriset för bivillkor 2 (möjligen så när som på tecken). Förklara varför.

Uppgift 2

(Modellering)

I en större stad har man beslutat att bygga två nya vårdcentraler. Den gamla befintliga vårdcentralen kommer att läggas ner när de nya tas i bruk. Det finns fem tomter där man kan få bygglov; kostnaden för byggnation på tomt i är c_i (kronor). Man har en gemensam budget, b (kronor), för byggprojekten; denna får inte överskridas. Kapaciteten, räknat i antal invånare som kan betjänas av en vårdcentral, varierar också mellan de olika tomterna, eftersom dessa är olika stora. En vårdcentral på tomt i kan betjäna totalt högst k_i invånare. Regionen som de nya vårdcentralerna skall betjäna är indelad i 18 geografiska områden; alla invånare i ett område skall höra till samma vårdcentral; område j har a_j invånare. Kapaciteten hos de nya vårdcentralerna måste räcka till för invånarna i alla deras respektive tillhörande geografiska områden. Avståndet mellan tomt i och område j är d_{ij}.

(2p) a) Formulera en linjär heltalsmodell för att bestämma vilka två tomter som skall användas till vårdcentraler då målet är att det genomsnittliga avståndet för alla invånare till "sina" respektive vårdcentraler skall vara så litet som möjligt. (Minimera samhällets totala transportkostnader för den öppna sjukvården.)

(1p) b) Justera modellen så att i stället den längsta transportvägen mellan ett bostadsområde och dess vårdcentral skall vara så kort som möjligt. (Fördela den öppna sjukvården geografiskt så rättvist som möjligt.)

Uppgift 3

(Olinjär optimeringsteori)

Betrakta optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(x), \\ \text{då} \quad & x \in X, \end{aligned}$$

där f är en reellvärd funktion som är kontinuerligt differentierbar på en öppen mängd som innehåller den slutna, konvexa och icke-tomma mängden X. Vi betraktar en iterativ metod för att finna en stationär punkt, och som gör det genom att systematiskt förbättra målfunktionsvärdet hos f. Denna metod kallas för *gradientprojektion*.

Gradientprojektionsmetoden, utgående från en punkt $x^t \in X$ i en iteration t, ger en ny punkt genom den iterativa formeln

$$x^{t+1} := \mathrm{Proj}_X \left(x^t - \gamma_t \cdot \nabla f(x^t) \right),$$

där Proj_X anger Euklidisk projektion på mängden X och $\gamma_t > 0$ är en steglängdsparameter. Värdet av γ_t som väljs i varje iteration är ytterst kritiskt för konvergensen hos algoritmen. Jämför till exempel med fallet då $X = \Re^n$, då formeln ovan blir

$$x^{t+1} := x^t - \gamma_t \cdot \nabla f(x^t),$$

dvs. brantaste lutningsmetoden med steglängden γ_t. För detta fall vet vi en hel del om lämpliga val av γ_t; t.ex. vet vi att $-\nabla f(x^t)$ är en descentriktning från x^t om inte x^t är stationär, och då finns det ett intervall av steglängder, $(0, \bar{\gamma}_t]$, som alla ger ett minskat målfunktionsvärde. Men i fallet då $X \subset \Re^n$ är det kanske inte lika uppenbart hur ett steg ska väljas. (Till exempel kostar det mycket mer att beräkna ett tänkt x^{t+1} för ett provval av γ_t, på grund av projektionen.) Uppgiften illustrerar några fakta kring detta.

(1p) a) Betrakta en punkt $x^t \in X$ som inte är stationär, dvs. *inte* uppfyller

$$\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0, \qquad \forall x \in X,$$

för $x^* = x^t$. Visa att för vilket val som helst av $\gamma_t > 0$ gäller att $x^{t+1} \neq x^t$. (Så precis som för fallet med $X = \Re^n$ har vi ett bra kriterium för när vi står i en stationär punkt eller ej.)

Ledning: Ange kravet för stationaritet för projektionsproblemet, som är ett strikt konvext optimeringsproblem.

(1p) b) För samma punkt x^t, visa att det existerar ett intervall av steglängder, $(0, \bar{\gamma}_t]$, som alla ger ett minskat målfunktionsvärde, dvs. $f(x^{t+1}) < f(x^t)$. (Så precis som för fallet med $X = \Re^n$ har vi en möjlighet att förbättra målfunktionsvärdet genom att välja ett tillräckligt kort steg.)

Du får göra antandet att ∇f är Lipschitzkontinuerlig, dvs. uppfyller att, för något $M \geq 0$,

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \Re^n.$$

Denna egenskap leder bland annat till den nyttiga olikheten

$$f(x+d) \leq f(x) + d^T \nabla f(x) + \frac{M}{2}\|d\|^2, \qquad \forall x, d \in \Re^n.$$

Detta antagande behövs egentligen inte, men underlättar sannerligen beviset!

Ledning: Använd resultatet i a).

(1p) c) Antag nu att f också är konvex på mängden X, och att det existerar en mängd, X^*, av optimala lösningar till problemet. För samma punkt x^t, visa att det existerar ett intervall av steglängder, $(0, \bar{\gamma}_t]$, som alla ger ett minskat avstånd till den optimala mängden X^*, dvs. för varje $x^* \in X^*$ gäller att $\|x^{t+1} - x^*\| < \|x^t - x^*\|$.

Ledning: projektionen är icke-expansiv, dvs. för två godtyckliga punkter v och w i $\Re^n$ gäller att $\|\text{Proj}_X(v) - \text{Proj}_X(w)\| \leq \|v - w\|$.

(3p) Uppgift 4

(Linjärprogrammeringens dualitet)

Ange och bevisa den starka dualsatsen för ett LP-problem på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & c^T x, \\ \text{då} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

(3p) Uppgift 5

(Sekventiell Kvadratisk Programmering, SQP)

Betrakta optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(x) := -2x_1 + x_1^2 - x_2 + 2x_2^2 \\ \text{då} \quad & 3x_1^2 + 2x_2^2 \leq 3, \\ & 2 \geq x_1 \geq 0, \quad 2 \geq x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Starta i punkten $x^0 = (0,0)^T$ och genomför en iteration med sekventiell kvadratisk programmering. Redovisa alla stegen noga. Välj en lämplig straffunktion och en lämplig metod för linjesökningen.

Uppgift 6

(Sant/falskt om optimering)

Tre påståenden ges nedan. Din uppgift är att ange om vart och ett av dem är sant eller falskt. Motivera Dina svar! Du får inte addera någon ytterligare förutsättning än de som redan är angivna.

(1p) a) Betrakta problemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & q^T x + \frac{1}{2} x^T Q x, \\ \text{då} \quad & Ax = b, \end{aligned}$$

där $q \in \Re^n$, $Q \in \Re^{n \times n}$, $A \in \Re^{m \times n}$ och $b \in \Re^m$, dvs. ett minimeringsproblem med en kvadratisk målfunktion över ett underrum. Påstående: varje lokalt optimum är ett globalt optimum.

(1p) b) Antag att en funktion $f : \Re^n \mapsto \Re$ är differentierbar i en punkt $x \in \Re^n$. För att en riktning $d \in \Re^n$ skall vara en descentriktning för funktionen f i punkten x är det nödvändigt att $\nabla f(x)^T d < 0$.

(1p) c) Linjärprogrammering är ett lätt problem i den meningen att varje problem kan lösas med en algoritm som har en polynomisk tidskomplexitet. Simplexmetoden löser varje linjärt problem. Alltså är simplexmetoden en polynomiell algoritm.

Uppgift 7

(Om det kinesiska brevbärarproblemet)

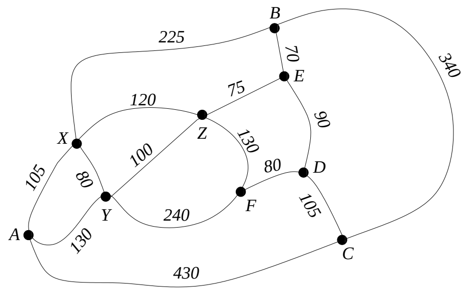
I det oriktade *kinesiska brevbärarproblemet* är vi intresserade av att finna en sluten tur som passerar varje båge i ett nätverk med oriktade bågar minst en gång och som tar kortast möjliga tid.

(1p) a) Ge en matematisk modell av problemet.

(1p) b) Under vilka förutsättningar har problemet en optimal lösning där varje båge används *exakt* en gång?

(1p) c) Ett mjölkbud och hans assistent levererar mjölk i en liten engelsk by, vars utseende ges i nedanstående skiss, där korsningarna markerats med bokstäver och längden av varje båge är angiven.

Den nuvarande planen är att utifrån mjölkaffären vid A leverera mjölken längs båda sidor vägen genom att följa rutten $AYZFYXZEBEDFDCAXBCA$. Kan rutten förbättras? Ge i så fall en bättre rutt.


B
225
70
E
340
120
75
X
Z
130
90
105
100
80
D
80
Y
F
240
105
A
130
C
430