Chalmers/GU
Matematiska institutionen

TENTAMEN

TMA946/MAN280
TILLÄMPAD OPTIMERINGSLÄRA

Datum:	01–08–21
Tid:	förmiddag
Hjälpmedel:	Typgodkänd räknedosa
Antal uppgifter:	7; för godkänd uppgift krävs 2 poäng av 3. Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. För godkänt krävs 10 poäng och tre godkända uppgifter.
Examinator:	Michael Patriksson
Jourhavande lärare:	Rolf Liljendahl (0740-459022)
Resultat anslås senast:	01–09–10 Kortfattade lösningsförslag anslås vid skrivningstidens slut på anslagstavlan för optimeringslära vid matematiska institutionen.

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa lösningsmetodik och beräkningar.
Använd generellt giltiga metoder, t.ex. de som genomgåtts i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

(Linjärprogrammering)

Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{minimera} & z = & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6, \\ & & -x_1 & + & x_2 & \geq & -2, \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(2p) a) Lös problemet med simplexmetoden (fas 1 och fas 2).

(1p) b) Antag att vi till det ursprungliga problemet lägger ett bivillkor av formen

$$x_1 \;+\; x_2 \;\geq\; c.$$

Formulera ett LP-problem för att avgöra för vilka värden på c som vårt förra problems tillåtna mängd påverkas. *Lös ej!*

Uppgift 2

(Algoritmer)

Betrakta det olinjära optimeringsproblemet att

$$\begin{aligned} &\text{minimera} \quad f(x), && (1) \\ &\text{då} \quad g_i(x) \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m, && (2) \end{aligned}$$

där $f : \Re^n \mapsto \Re$ och $g_i : \Re^n \mapsto \Re$, $i = 1, \ldots, m$, samtliga är kontinuerligt differentierbara funktioner på $\Re^n$.

(1p) a) För en *exakt* straffunktion, beskriv hur straffunktionsmetoden fungerar för att lösa detta problem.

(1p) b) Antag att g_i är affin, dvs. av formen $a_i^{\mathrm{T}} x - b_i$, för alla i. Beskriv hur Frank–Wolfe-algoritmen opererar. Ange också vad som måste gälla för att en hel iteration ska vara välställd, dvs. garanterat fungera och ge en ny iterationspunkt.

(1p) c) Antag att $m = 0$, dvs. vi har ett obegränsat problem. För detta problem, och med de antaganden vi har gjort, vilken metod rekommenderar Du, om problemet är konvext och $n = 500$? Beskriv den.

(3p) Uppgift 3

(Modellering)

Reklambyrån ZAP (Zetterström, Anderson och Petterson) skall inreda sitt nya kontor med en öppen planlösning. Den nya lokalen består av ett fyrkantigt rum som är l meter långt och b meter brett. Lite förenklat kan vi anta att det utrymme varje arbetsplats kräver är en cirkel med diametern d och arbetsplatserna måste placeras så att de inte överlappar. Dessutom skall varje arbetsplats anslutas till telenätet i en av två kopplingspunkter. Då de tre telefonerna har en begränsad sladdlängd av $a_i, i = 1 \ldots 3$, meter måste arbetsplatserna placeras i närheten av telejacken (alla firmans pengar gick till lokalen så de kan inte köpa mera kabel). För enkelhets skull antar vi att telefonen placeras i arbetsplatsens mitt. Ett av kontorets långväggar är ett stort panoramafönster, och alla de tre delägarna vill sitta så nära fönstret som möjligt. De tre delägarna bestämmer sig därför för att försöka minimera avståndet till fönstret för den arbetsplats som har den sämsta placeringen.

Formulera problemet att placera de tre arbetsplatserna så att det maximala avståndet till fönstret minimeras, under uppfyllande av samtliga bivillkor.

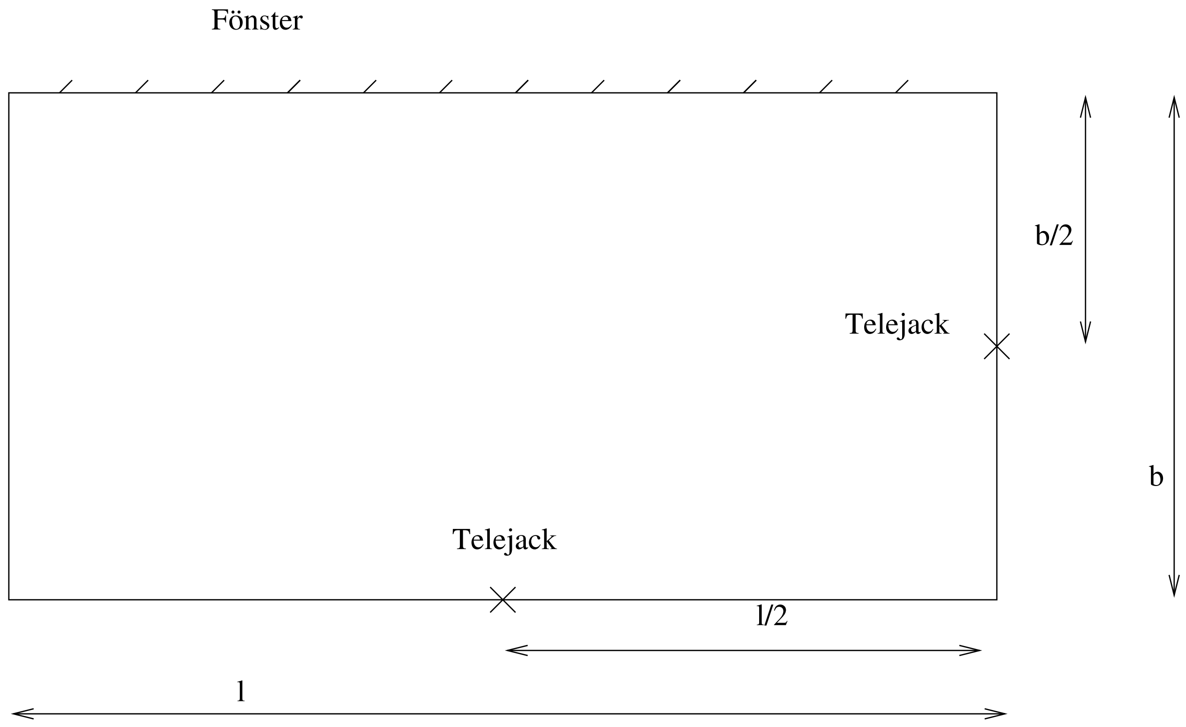


Figure 1: Bild på kontor

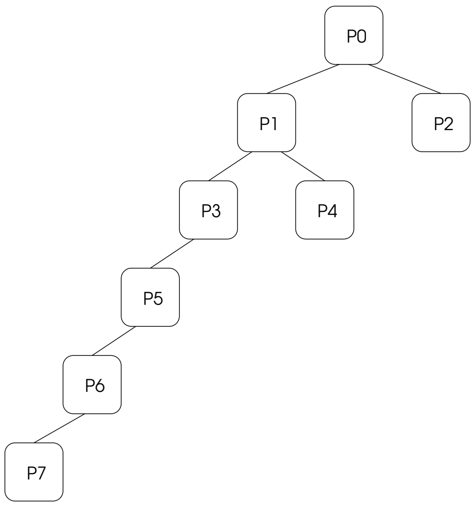
Uppgift 4

(Heltalsprogrammering)

Givet är följande kappsäcksproblem:

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & \sum_{j=1}^{10} c_j x_j, \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{10} a_j x_j \leq b, \\ & x_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1, \dots, 10, \end{aligned}$$

där $(a_1, \dots, a_{10}) = (15, 12, 9, 27, 15, 5, 8, 20, 12, 15)$, $b = 62$ och $(c_1, \dots, c_{10}) = (30, 19, 13, 38, 20, 6, 8, 19, 10, 11)$. Det kan lösas med hjälp av branch–and–bound-algoritmen, då man relaxerar heltalskraven och förgrenar över fraktionella variabler. Figuren nedan visar ett sökträd som erhållits då ovanstående algoritm tillämpats på exemplet ovan. (0-grenar åt vänster och 1-grenar åt höger.) Observera att $c_{j+1}/a_{j+1} < c_j/a_j$ gäller för $j = 1, \dots, 9$.



(2p) a) Visa, för varje förgrening (nod), vilken variabel som förgrenats över. Beräkna, vid varje nod, värdet på den lösning som erhållits, ange huruvida lösningen är tillåten i ursprungsproblemet eller ej samt ange vilka gränser för det optimala målfunktionsvärdet som gäller i varje del av trädet.

(1p) b) Antag att vi inte har hittat någon tillåten lösning till problemet utöver dem/den som har hittats vid lösning av relaxeringarna (subproblemen) vid noderna i trädet. Hur bra är den bästa tillåtna lösningen?

Uppgift 5

(KKT-villkoren med tillämpning)

Betrakta problemet att

$$\text{minimera} \quad \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j), \tag{1}$$

$$\text{då} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = \kappa, \tag{2}$$

$$1 \geq x_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{3}$$

där $f_j : \Re \mapsto \Re$ är kontinuerligt differentierbar med derivata f_j', $j = 1, \dots, n$, och $\kappa > 0$.

(1p) a) Antag att x^* är en lokal optimallösning till detta problem. Ange de optimalitetsvillkor som x^* därför uppfyller. Med ledning av dessa, gruppera den optimala lösningen så att det blir tydligt att var och en av variablerna x_j har en av tre olika kategorier av egenskaper i optimum.

(2p) b) Antag nu att $f_j(x_j) = -c_j^{\mathrm{T}} x_j$, $j = 1, \dots, n$, så att problemet faktiskt är ett mycket speciellt LP-problem. Vi skulle kunna tolka detta problem som en kontinuerlig relaxation av det binära kappsäcksproblemet, eller snarare ett mycket enkelt fall av det, där alla föremål tar lika stor plats. För detta problem är följande algoritm välkänd:

0. Sortera elementen c_j i avtagande ordning. [Notera att a) beskriver ett minimeringsproblem, medan kappsäcksproblemet, med målfunktionskoefficienter c_j, beskriver ett maximeringsproblem.] Låt, för enkelhets skull, det vara så att $c_j \geq c_{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$, så att sorteringen redan är genomförd.
1. För $r = 1, \dots, n$, gör följande: Om $r \leq \kappa$, låt då $x_r = 1$. Om $r > \kappa$, låt då $x_r = \kappa - (r-1)$, och avsluta algoritmen.

Optimalitetsvillkoren i a) är giltiga också för detta LP-problem. Specialisera dem, eller använd linjärprogrammeringens optimalitetsvillkor för detta problem i stället, om så önskas, för att *bevisa* att denna algoritm alltid ger en optimal lösning till problemet.

Uppgift 6

(Olinjär optimering)

(1p) a) Låt funktionen f vara kontinuerligt differentierbar på $\Re^n$. Antag att x^* är ett lokalt minimum till f. Ange samtliga de egenskaper x^* har och som kan formuleras utifrån denna information.

(2p) b) Betrakta mängden $S := \{ x \in \Re^n \mid Ax \geq b \}$, där $A \in \Re^{m \times n}$ and $b \in \Re^n$. För en funktion f med samma egenskaper som anges i a), antag att x^* är ett lokalt minimum till f över S. Ange samtliga de egenskaper x^* har och som kan formuleras utifrån denna information.

(3p) Uppgift 7

(Linjärprogrammering)

Betrakta LP-problemet

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & z = c^{\mathrm{T}} x, \\ \text{då} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0^n, \end{aligned}$$

där $A \in \Re^{m \times n}$. Ange LP-dualen, formulera och bevisa starka dualsatsen. Samtliga resultat ur kursen som utnyttjas *skall* bevisas.

Lycka till!