Chalmers/GU
Matematiska institutionen

TENTAMEN

TMA946/MAN280
TILLÄMPAD OPTIMERINGSLÄRA

Datum:	02–03–11
Tid:	eftermiddag
Hjälpmedel:	Typgodkänd räknedosa
Antal uppgifter:	7; för godkänd uppgift krävs 2 poäng av 3. Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. För godkänt krävs 10 poäng och tre godkända uppgifter.
Examinator:	Michael Patriksson
Jourhavande lärare:	Niclas Andréasson (0740-459022)
Resultat anslås senast:	02–03–22 Kortfattade lösningsförslag anslås vid skrivningstidens slut på anslagstavlan för optimeringslära vid matematiska institutionen.

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa lösningsmetodik och beräkningar.
Använd generellt giltiga metoder, t.ex. de som genomgåtts i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

(Linjär optimering)

Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{llrcrcl} \text{minimera} & z = & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 1, \\ & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(2p) a) Lös problemet på *korrekt* sätt med hjälp av simplexmetoden, dvs. med hjälp av både Fas I och Fas II.

(1p) b) Antag att vi byter ut det första elementet i högerledet (ettan) mot en parameter $d \in \Re$. Uttryck problemets optimala värde som en funktion av d. *Ledning:* Det är acceptabelt att använda geometrisk lösning i denna deluppgift.

Några matrisinverser som kan vara till nytta vid lösandet är

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 2

(Linjär optimering)

Vi har ett problem av typen

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & c^{\mathrm{T}}x, \\ \text{då} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0^n, \end{array}$$

med $A \in \Re^{m \times n}$, och A har full radrang.

Din kamrat Kalle säger sig ha fått en gudomlig ingivelse, och har funnit en optimal lösning till problemet. Kalles lösning innehåller $m + k$ nollskilda variabler, och vi vet därmed att den ej är en baslösning.

(2p) a) Hur gör du för att kontrollera att Kalles lösning stämmer *utan att använda simplexmetoden, eller någon annan metod för att lösa ett LP-problem*? Du kan anta att problemet har en unik dual optimallösning. Beskriv din metodik noggrannt.

(1p) b) Vi antar att du i föregående uppgift lyckas kontrollera att lösningen verkligen är optimal. För att visa dig på styva linan inför Kalle önskar du ta fram en optimal baslösning (till det primala problemet). Hur gör du detta *utan att använda simplexmetoden, eller någon annan metod för att lösa ett LP-problem*? Beskriv din metodik noggrannt.

Uppgift 3

(Yttre straffmetod)

Betrakta det begränsade problemet att

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(x) := \frac{1}{2}(x_1^2 + |x_2|^\rho) - 2x_2, \\ \text{då} \quad & x_2 = 0, \end{aligned}$$

där $\rho > 1$ är en konstant.

(1p) a) Formulera KKT-villkoren för detta problem. Finn KKT-punkt(erna) och motsvarande Lagrange-multiplikator(er). Är KKT-villkoren tillräckliga för global optimalitet i detta problem? *Ledning:* Utnyttja att $(|x_2|^\rho)' = \rho x_2 |x_2|^{\rho-2}$.

(1p) b) Formulera ett obegränsat optimeringsproblem genom att överföra bivillkoret till målfunktionen via den vanliga kvadratiska straffunktionen. Lös det obegränsade problemet för varje värde på straffparametern $\sigma > 0$, och anta att $\rho = 2$. *Ledning:* Utnyttja att $|x_2|^2 = x_2^2$.

Kommer optimallösningen x_σ^* till det straffade problemet att konvergera mot en optimal lösning till problemet ovan när σ går mot oändligheten?

(1p) c) Upprepa frågan i b) för fallet $\rho = 1$. Är det möjligt att applicera gradientbaserade metoder (till exempel brantaste lutningsmetoden) för det straffade problemet i detta fall?

Uppgift 4

(1p) a) Definiera begreppet "konvex funktion på $\Re^n$." Ge, för en (1) gång differentierbara funktioner, en karakterisering av begreppet som utnyttjar gradienten av funktionen (giltig i C^1). Ge, för två (2) gånger differentierbara funktioner, en karakterisering av begreppet som utnyttjar Hessianen av funktionen (giltig i C^2). Bevisa, för minst en av dessa, att karakteriseringen är korrekt.

(1p) b) Betrakta problemet att

$$\underset{x \in \Re^n}{\text{minimera}} \quad f(x),$$

där f är en gång kontinuerligt differentierbar (i C^1) och konvex, men inte strikt konvex, $n = 5000$, och vi har en ganska god aning om var optimum finns. Vi vet att det finns ett optimum, ty f modellerar en energifunktion, som är ickenegativ, och $f(x)$ går mot oändligheten när normen av x växer mot oändligheten. Rekommendera en algoritm för detta problem; var kritisk och motivera ditt val. Om så behövs, ställ några ytterligare frågor om problemet till Er själv, och ge rekommendationer beroende på svaren.

(1p) c) Antag att vi vill lösa en följd av LP-problem med varierande högerled:

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & z = c^{\mathrm{T}} x, \\ \text{då} \quad & Ax \geq b^k, \\ & x \geq 0^n, \end{aligned}$$

för, $k = 1, \ldots, 10$, dvs. tio olika problem. Vart och ett av problemen är mycket stort och fordrar en timmes lösningstid då vi använder CPLEX, det bästa kommersiella programpaketet för linjär optimering. Hur skulle Du lösa dessa tio problem på det mest effektiva sättet?

(3p) Uppgift 5

(Modellering)

Din uppgift är att konstruera en trycktank för att förvara 1000m^3 kväve (volymen är vid en atmosfärs tryck). Tryck och volym är relaterade till varandra med den välkända formeln

$$pv = c_1,$$

där p är trycket, v är volymen och c_1 är en konstant. För att tanken skall gå in i en standardcontainer får den totala längden inte överskrida 5.87m och den totala bredden inte överskrida 2.34m. För att klara trycket byggs tanken som en cylinder med halvklot till ändar (se Figur 1).

Varje halvklot får då en yta av $2\pi r^2$m^2 och en volym av $2/3\pi r^3$m^3. Den cylindriska delen får en yta av $2\pi r l$m^2 och en volym av $\pi r^2 l$m^3. Godstjockleken hos tanken måste uppfylla

$$prc_2 \leq d,$$

där d är tjockleken hos godset och c_2 är en konstant.

Formulera problemet att minimera det material som åtgår till att bygga tanken då den passar in i en container och uppfyller kravet att kunna lagra den efterfrågade volymen.

När ni beräknar godsvolymen kan ni anta att denna ges av tankens area gånger godstjockleken.

Uppgift 6

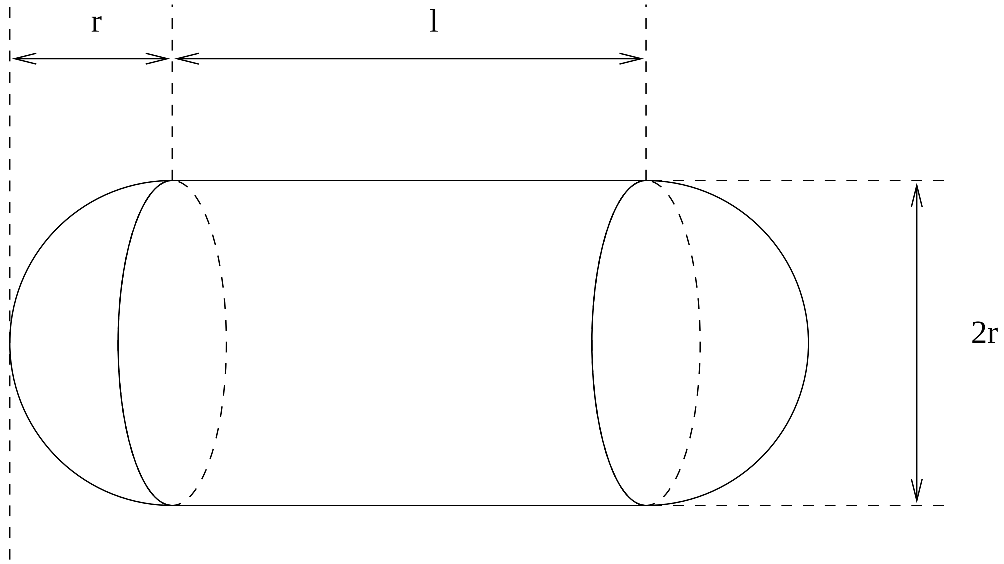

Figure 1: Bild på trycktank

(Global optimalitet för konvex optimering och LP)

Betrakta det konvexa problemet att

$$
\begin{aligned}
\text{minimera} \quad & f(x), && && (1)\\
\text{då} \quad & g_i(x) \geq 0, && i = 1, \ldots, m, && (2)\\
& x \in X, && && (3)
\end{aligned}
$$

där $f : \Re^n \mapsto \Re$ är konvex, $g_i : \Re^n \mapsto \Re$, $i = 1, \ldots, m$, är konkava funktioner och X är konvex.

(1p) a) Definiera det Lagrangeduala problemet vid Lagrangerelaxering av bivillkoren (2). Formulera och bevisa den Svaga Dualsatsen.

(1p) b) För det primala och det duala problemet, ange de globala optimalitetsvillkoren. Bevisa att om de är uppfyllda i en primal–dual punkt, så löser de båda respektive det primala och duala problemet och stark dualitet gäller.

(1p) c) Antag nu att $f(x) = c^{\mathrm{T}}x$, $g_i(x) = a_i^{\mathrm{T}}x - b_i$, $i = 1, \ldots, m$, och $X = \{ x \in \Re^n \mid x \geq 0^n \}$, dvs. vi betraktar ett LP-problem. Ge dess LP-dual och visa att det sammanfaller med det Lagrangeduala problemet i a). Ge också optimalitetsvillkoren för linjär optimering och visa att de sammanfaller med de globala optimalitetsvillkoren i b).

Uppgift 7

(Förbättrade optimalitetsvillkor för obegränsad optimering)

Betrakta ett obegränsat optimeringsproblem för minimering av en *två gånger kontinuerligt differentierbar* funktion f av *en variabel.*

Det existerar ett "gap" mellan den första och andra ordningens nödvändiga, och andra ordningens tillräckliga, krav på lokal optimalitet i detta problem. Till exempel, både första och andra ordningens nödvändiga villkor är uppfyllda för funktionen $f_1(x) = x^3$ i $x = 0$, vilket inte är ett lokalt minimum. Å andra sidan uppfylls inte andra ordningens tillräckliga villkor för funktionen $f_2(x) = x^4$ i $x = 0$, trots att det är ett strikt lokalt minimum.

Om funktionen f är deriverbar *oändligt många gånger* är det möjligt att analysera högre ordningens derivator och göra gapet mindre mellan de nödvändiga och tillräckliga villkoren.

(1p) a) Visa att följande villkor är nödvändigt för att x^* skall vara ett lokalt minimum till f: antingen är alla dess derivator i x^* 0 eller också existerar det ett *jämnt* heltal $n \geq 2$ med

$$f'(x^*) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x^*) = 0, \text{ och } f^{(n)}(x^*) > 0.$$

Ledning: Utnyttja att motsatsen leder till en motsägelse.

(1p) b) Visa att följande villkor är tillräckligt för att x^* skall vara ett *strikt* lokalt minimum till f: det existerar ett *jämnt* heltal $n \geq 2$ med

$$f'(x^*) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x^*) = 0, \text{ och } f^{(n)}(x^*) > 0.$$

(1p) c) Visa att det fortfarande finns ett gap mellan de nödvändiga och tillräckliga villkoren. *Ledning*: Betrakta funktionerna

$$f_1(x) = \begin{cases} -e^{-1/x^2}, & \text{om } x < 0, \\ 0, & \text{om } x = 0, \\ e^{-1/x^2}, & \text{annars,} \end{cases} \qquad \text{och} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } x = 0, \\ e^{-1/x^2}, & \text{annars,} \end{cases}$$

som båda är oändligt många gånger deriverbara.

Lycka till!