TMA946/MAN280
TILLÄMPAD OPTIMERINGSLÄRA

Datum:	02–05–29
Tid:	V-huset, förmiddag
Hjälpmedel:	Typgodkänd räknedosa
Antal uppgifter:	7; för godkänd uppgift krävs 2 poäng av 3. Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. För godkänt krävs 10 poäng och tre godkända uppgifter.
Examinator:	Michael Patriksson
Jourhavande lärare:	Anton Evgrafov (0740-459022)
Resultat anslås senast:	02–06–12 Kortfattade lösningsförslag anslås vid skrivningstidens slut på anslagstavlan för optimeringslära vid matematiska institutionen.

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa lösningsmetodik och beräkningar.
Använd generellt giltiga metoder, t.ex. de som genomgåtts i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

(Linjärprogrammering)

Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximera } z = & 2x_1 & + & x_2, & & \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 1, \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Observera att problemet är ett maximeringsproblem.

(2p) a) Lös detta problem med hjälp av Fas I och II av simplexmetoden.

(1p) b) Givet svaret i uppgift a), vad blir den optimala duala lösningen?

(3p) Uppgift 2

(LP-dualitet, set covering)

Betrakta LP-problemet

$$\begin{aligned} \text{minimera } & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{då } & Ax \geq \mathbf{1} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

där varje element i A endast kan ha värdet 0 eller 1, $c_i > 0$ för alla i och $\mathbf{1}$ betecknar en vektor med endast ettor.

Ibland är det inte nödvändigt att lösa detta problem till bevisad optimalitet; vi kan för att spara tid nöja oss med en tillåten lösning som ligger inom 5% av det optimala värdet. Formulera därför en metod som givet en primalt tillåten baslösning ger en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet hos problemet. Notera att vi behöver en gräns som är någorlunda skarp: att sätta alla x till 0 duger inte. Då vi skall använda gränsen för att avbryta sökningen i förtid för att spara datortid, får själva skapandet av gränsen ej ta allt för lång tid. Till exempel kan vi inte tillåta oss att lösa det duala problemet. (Däremot är det inte en dum idé att utnyttja det duala problemet!)

(En motivering: Vi tänker oss att vi skall bygga ett antal brandstationer i en stad, så att varje hus kan nås av en brandbil inom 10 minuter. Vi antar att vi har N hus vi vill nå, och M möjliga platser vi kan bygga en station på. Vi låter a_{ij} vara 1 om vi kan nå hus i med en bil från station j inom 10 minuter, 0 annars. Vidare låter vi x_j

vara 1 om vi bygger en station på plats j, 0 annars. Problemet att bygga stationer så billigt som möjligt blir då

$$\begin{aligned} \text{minimera } & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{då } & Ax \geq \mathbf{1} \\ & x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Ett problem av denna typ kallas "set covering" och är vanligt förekommande inom t.ex. schemaläggning. När man löser denna typ av problem behöver man ofta lösa LP-relaxeringen till problemet, vilken är precis det LP-problem som behandlas i uppgiften; $x \leq 1$ är redundant i LP-relaxationen.)

Uppgift 3

(Olinjär optimering)

Vi har ett problem av typen

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & f(x), \\ \text{då} \quad & g(x) \leq 0^m, \\ & h(x) = 0^\ell, \end{aligned}$$

där f, g_i, h_j är reellvärda, två gånger kontinuerligt differentierbara funktioner.

Antag att Du vill lösa ovanstående problem, och angriper det med Din favoritmetod.

(2p) a) Antag att du får en utskrift av typen

```
Search terminated.  The problem is infeasible.
```

Det existerar alltså inga tillåtna lösningar till problemet. I vissa fall kan man acceptera en lösning som bryter något mot bivillkoren, särskilt om de uttrycker kapacitetsvillkor; i sådana fall kan man tänka sig att ett överskridande av ett bivillkor motsvaras av en extra kostnad för att anskaffa mer kapacitet. (Vi kallar sådana bivillkor *mjuka*.) För problemet ovan är vi intresserade av att beskriva ett optimeringsproblem av just detta slag. Antag att olikhetsvillkoren är mjuka bivillkor. Ge en ny optimeringsmodell som medger att något eller några av de m olikhetsvillkoren överskrids, till en kostnad som är proportionell mot graden av överskridande. (Att strikt underskrida ett olikhetsbivillkor skall inte premieras.)

(1p) b) Antag i stället att vår favoritmetod är en SQP-metod, till exempel den alltmer populära *filter-SQP*-metoden. Vid körningen fås utskriften

```
Search successfully completed.  Optimal solution stored on file.
```

Ange de svagaste möjliga förutsättningarna hos det problem vi löser för att lösningen som en SQP-metod ger skall vara *globalt* optimum.

Uppgift 4

(Olinjär optimering)

Betrakta följande minsta kvadrat-problem:

$$\min_{x \in \Re^n} \sum_{i=1}^{N} \left(f_i(x)\right)^2.$$

Problemet kan ibland effektivt lösas med en *inkrementell gradient-metod*:

1. Välj en initial punkt x_0 och en steglängd $\alpha > 0$.
2. För $k = 0, 1, 2, \ldots$:
   (a) låt $x_k^{(0)} = x_k$,
   (b) för $i = 0, \ldots, N-1$, låt $x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} - 2\alpha f_{i+1}(x_k^{(i)}) \nabla f_{i+1}(x_k^{(i)})$,
   (c) låt $x_{k+1} = x_k^{(N)}$.

Vi ska studera beteendet hos algoritmen på följande exempel (här är $N = 2$):

$$\min_{x \in \Re} (x+1)^2 + (x-1)^2. \tag{1}$$

(1p) a) Vad är optimallösningen till problemet (1)? Välj $\alpha = 1/2$, $x_0 = 2$ och utför två steg av algoritmen. Kommer den att konvergera mot en optimallösning?

(2p) b) För enkelhets skull låter vi $y_k := x_k^{(1)}$. Då har vi att $y_k = x_k - 2\alpha f_1(x_k) \nabla f_1(x_k)$, $x_{k+1} = y_k - 2\alpha f_2(y_k) \nabla f_2(y_k)$. Antag att α väljs i intervallet $(0, 1)$. Låt $\lim_{k \to \infty}(x_k, y_k) = (x^*, y^*)$. Beräkna gränsvärdet $(x^*, y^*) = (x^*(\alpha), y^*(\alpha))$. (*Ledning*: om $(x_k, y_k) \to (x^*, y^*)$, $g(x_k, y_k) = 0$ och g är en kontinuerlig funktion, gäller att $g(x^*, y^*) = 0$.) Vad kan du säga om $\lim_{\alpha \to 0} x^*(\alpha)$?

(3p) Uppgift 5

(Heltalsoptimering)

En tillverkare av skrivare till datorer har en kedja av återförsäljare och till dessa vill man knyta ett mindre antal serviceverkstäder. Det finns fyra stycken återförsäljare i det aktuella området och man har möjlighet att kontraktera tre olika serviceverkstäder. Återförsäljarna beräknas behöva utnyttja 5, 3, 3 respektive 4 mantimmars service per dag och de tre serviceverkstäderna kan erbjuda 10, 10 respektive 7 mantimmars service per dag. Att skriva kontrakt med de olika verkstäderna kostar 150, 160 respektive 100 kkr. Kostnaden (i kkr) att knyta en viss verkstad till en viss återförsäljare ges av nedanstående tabell.

Återförsäljare	1	2	3	4
Verkstad 1	11	12	14	22
Verkstad 2	27	10	13	9
Verkstad 3	17	18	9	12

Ytterligare restriktioner ges av följande:

- Maximalt två återförsäljare får knytas till verkstad 1.
- Varje återförsäljare får skicka sina uppdrag till endast en verkstad.
- För kontrakterandet har man en budget på 350 kkr som ej får överskridas.

Målet är att minimera de totala kostnaderna för att tillfredsställa återförsäljarnas servicebehov.

Formulera ovanstående problemställning som ett *linjärt* optimeringsproblem med *heltalskrav* på variablerna. *Lös ej!*

Tips: Låt beslutsvariablerna svara mot att skriva/inte skriva kontrakt med de olika serviceverkstäderna och mot att knyta serviceverkstäder till återförsäljare.

Uppgift 6

(Optimalitetsvillkor)

(1p) a) Betrakta optimeringsproblemet:

$$\begin{aligned} \underset{x \in \Re}{\text{minimera}} \ & x^2, \\ \text{då} \ & \sin(x) \leq -1. \end{aligned} \tag{1}$$

Finn varje lokal och varje global optimallösning till problemet. Ange KKT-villkoren. Är de nödvändiga och/eller tillräckliga för problemet?

(1p) b) Trippeln (x_0, α, λ) sägs uppfylla *Fritz-Johns* (FJ) optimalitetsvillkor för problemet

$$\begin{aligned} \underset{x \in \Re^n}{\text{minimera}} \ & f(x), \\ \text{då} \ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{2}$$

definierat av differentierbara funktioner f, g_i, $i = 1, \ldots, m$, om

$$
\begin{aligned}
&g_i(x_0) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, && \text{(primal tillåtenhet)} \\
&(\alpha, \lambda) \geq 0, (\alpha, \lambda) \neq 0, && \\
&\alpha \nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = 0, && \text{(dual tillåtenhet)} \\
&\lambda_i g_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, && \text{(komplementaritet)}
\end{aligned}
$$

Uppfyller lokala/globala optimala lösningar till problemet (1) FJ-villkoren?

(1p) c) Undersök användbarheten av FJ-villkoren genom att finna en punkt (x, y) som uppfyller dessa för problemet

$$
\begin{aligned}
&\underset{(x,y)}{\text{minimera}}\ y, \\
&\text{då} \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ \quad\ \ x^3 \geq y^4, \end{cases}
\end{aligned}
$$

men som trots detta varken är lokalt eller globalt optimal för problemet.

Uppgift 7

(Relaxering medelst utvidgad Lagrangian)

(1p) a) Betrakta problemen

$$
\begin{aligned}
f^* := \text{minimum}\ & f(x), \\
\text{då}\ & x \in X,
\end{aligned} \tag{P}
$$

och

$$
\begin{aligned}
l^* := \text{minimum}\ & l(x), \\
\text{då}\ & x \in G.
\end{aligned} \tag{R}
$$

Om $X \subseteq G$ och $l(x) \leq f(x)$ för alla $x \in X$ sägs (R) vara en *relaxering* av (P). Omvänt är då (P) en *restrifiering* av (R).

Visa att $l^* \leq f^*$.

(2p) b) Betrakta ett problem på formen

$$
\begin{aligned}
f^* := \text{minimum}\ & f(x), \\
\text{då}\ & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

där $x \in \Re^n$ och f och g_i, $i = 1, \dots, m$, är kontinuerliga funktioner på $\Re^n$. Låt u_i, $i = 1, \dots, m$, vara reella multiplikatorer (dualvariabler) för bivillkoren och låt $P : \Re^m \mapsto \Re_+$ vara en kontinuerlig *yttre straffunktion*, dvs. en funktion sådan att

$$P(y) \begin{cases} = 0, & \text{då } y = 0^m, \\ > 0, & \text{då } y \neq 0^m. \end{cases}$$

Betrakta det straffade problemet

$$\theta^* = \underset{x \in \Re^n}{\text{minimum}} \ \theta(x) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) + \rho P(g(x)),$$

där $g(x)$ är m-vektorn av g_i och där $\rho > 0$. Visa att detta problem är en relaxering av det ursprungliga.

Lycka till!