Lösningsförslag till tentamen TMA946/MAN280 Tillämpad optimeringslära 010523

1 a) Inför slackvariabler

$$\Rightarrow \min z = 2x_1 - x_2$$
$$\text{då} \begin{bmatrix} \\ 2x_1 + x_2 - s_1 = 3 \\ -x_1 + x_2 + s_2 = 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Inför en artificiell variabel och lös fas I

$$\min a$$
$$\text{då} \begin{bmatrix} \\ 2x_1 + x_2 - s_1 + a = 3 \\ -x_1 + x_2 + s_2 \qquad = 2 \\ x_{1,2}, s_{1,2}, a \geq 0 \end{bmatrix}$$

På matrisform:

$$\min a$$
$$\text{då} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \min c^T x \\ \text{Då } Ax = b \end{bmatrix}$$

Välj a, s_2 som bas

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} c_B^T = [1 \quad 0]$$

$$\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = [0 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\bar{c}^T = [-2 \quad -1 \quad 1].$$

Lägst reducerad kostnad har $x_1 \rightarrow x_1$ blir inkommande.

gör min ratio test. $y = B^{-1}A_{ink} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\text{utg} = \text{argmin}_{k,k>0} \frac{(B^{-1}b)k}{y_k} \Rightarrow \text{första basvariabeln}$$

är utgående c är första basvar)

Vi får ny bas s_2, x_2. Då a ej är kvar i basen har vi $a = 0 \Rightarrow$ vi har en tillåten bas. Åter till ursprungsproblemet.

$$\min 2x_1 - x_2$$

$$\text{Då } \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi har basen $x_1, s_2 \Rightarrow$

$$c_B^T = [2 \quad 0] B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{2} c_N^T = \begin{bmatrix} (x_2 \quad s_1) \\ [-1 \quad 0] \\ B^{-1}b = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}^T = c_N^T - c^T B B^{-1} N = [-1 \quad 0] - [2 \quad 0] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [-3 \quad 2]$$

$\Rightarrow x_2$ blir inkommande.

$$y = B^{-1}A_{ink} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Gör min ratio, $ut = \text{argmin}_{k, y_k > 0} \frac{(B^{-1}b)_k}{y_k}$

$\Rightarrow ut = 2ty \frac{7}{3} < 3$

$\Rightarrow$ basvar 2, dvs s_2 är utgående.

Ny bas x_1, x_2

$$c_B^T = [2 \quad -1] B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} c_N^T - [0 \quad 0] B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = [0 \quad 0] - [2 \quad -1] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} [1 \quad 4]$$

$\bar{c}^T \geq 0 \Rightarrow$ basen är optimal.

Vi får

$$x_B = B^{-1}b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, s_1, s_2 = 0.$$

med $z = c_B^T B^{-1}b = [2 \quad -3]\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{-5}{3}$

Kontroll:

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{9}{3} = 3 \geq 3 \quad \text{OK med } s_1 = 0$$
$$-x_1 + x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{6}{3} = 2 \leq 2 \quad \text{OK med } s_2 = 0.$$

b) Ersätt första högerledet med α. Vi får

$$v(\alpha) = c_B^T B^{-1}b = [2 \quad -1]\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}[1 \quad -4]\begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(\alpha - 8)$$

Kontroll: för $\alpha = 3$ (tidigare problemet) får vi $z = \frac{1}{3}(3-8) = \frac{-5}{3}$ OK!.
Då c^{-T} ej påverkas av b är basen fortsatt optimal om den är fortsatt tillåten.

$$B^{-1}\begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \alpha - 2 \\ \alpha + 4 \end{bmatrix} > 0 \text{ i en omgivining av } \alpha = 3.$$

högerderivatan är därmed det samma som derivatan: $\dfrac{d}{d\alpha}v(\alpha) = \dfrac{1}{3}$.

2. $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$

$$\text{Vi har} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \min[1.5 \quad 1 \quad 2 \quad 1]x \\ \text{då} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ x \geq 0 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Duala problemet blir

$$\left(\min \begin{bmatrix} c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{bmatrix} \text{ primalt blir } \begin{bmatrix} \max b^T y \\ A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{bmatrix} \text{ dualt}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \max y_1 + 0.142 \\ \text{då} \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ y \geq 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

Ritar vi upp detta får vi

Vi söker $\max y_1 + 0.1 + y_2$ och får optimum i punkten $y = (1.5, 0.5)$.

Vi ser att alla duala bivillkor utom no 2 binder. Då det andra duala villkoret ej binder vet vi att $x_2 = 0$.

Vidare har vi $y_1, y_2 > 0$ varför de primala villkoren binder.

Optimala mängden ges alltså av lösningen till

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0.55 \\ 0.45 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c \leq \alpha \leq 1$$

b) Vi vet att x_2 är en icke basvar (ty motsvarande duala villkor binder ej). Kvar finns x_1, x_3, x_4 med möjliga baser

$x_1x_3 \qquad x_1x_4 \qquad x_3x_4$

x_1x_4 ger $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} \ngeq 0$

$\Rightarrow x_1, x_4$ ej optimal bas.

x_1x_3 ger $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = [0.9 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0]$ optimal bas enligt ovan.

x_3x_4 ger $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_b^{-1} = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = [0 \quad 0 \quad 0.55 \quad 0.45]$ optimal enligt ovan.

Ökar vi c_1 till 1.6 kan vi se i figuren att bivillkor 1 slutar att binda, varför vi får att $x_1 = 0$ i en optimal lösning, och den optimala basen blir x_3x_4 samt den optimala mängden $x = [0 \quad 0 \quad 0.55 \quad 0.45]$.

3) Vi definierar index:

$i, i = 1 \dots 3$ Nummer på arbetsplats.

$k, k = 1 \dots 2$ Nummer på telejack.

Samt variabler

x_i, y_i	Koordinater för arbetsplats i.
$t_{i,k}$	Indikatorvariabel, värdet är 1 om arbetsplats i är ansluten till jack k.
z	Längsta avståndet till fönstret.

Vi får problemet : Minimera avståndet för sämsta arbetsplatsen:

$$\min \quad z \tag{1}$$

Då arbetsplatserna finns i rummet:

$$\frac{d}{2} \leq x_i \leq l - \frac{d}{2}, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{2}$$

$$\frac{d}{2} \leq y_i \leq b - \frac{d}{2}, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{3}$$

Då arbetsplatserna ej inkräktar på varandra:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq d^2, \quad \forall i = 1 \dots 3, \forall j = 1 \dots 3, i \neq j \tag{4}$$

Då sladden räcker:

$$t_{1,k}((x_i - \frac{l}{2})^2 + (y_i - 0)^2) \leq a_i^2, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{5}$$

$$t_{2,k}((x_i - l)^2 + (y_i - \frac{b}{2})^2) \leq a_i^2, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{6}$$

Vi måste ansluta varje arbetsplats till exakt ett telejack:

$$t_{i,1} + t_{i,2} = 1, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{7}$$

$$t_{i,k} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1 \dots 3, \forall k = 1, 2 \tag{8}$$

Vi skall se till att z är längre än avståndet till fönstret för den sämsta arbetsplatsen:

$$b - y_i \geq z, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{9}$$

Hela uppgiften blir då minimera (1) under uppfyllande av (2) - (9) .

4a) Se figuren nedan.

b)

$$\frac{z^* - z^H}{z^*} \leq \frac{\bar{z} - z^H}{z^*} \leq \frac{\bar{z} - z^H}{z^H} = \frac{98 - 88}{88} \approx 0.114$$

5a) Problem:

Minimera $\displaystyle\sum_{j=i}^{n} f_j(x_j)$

$$\text{Då} \left[\begin{array}{lcl} \\ \\ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = k & | & \alpha^* \\ & | & \\ x_j \leq 1, \forall j & | & \beta_j^*, \forall j \\ & | & \\ x_j \geq 0, \forall j & & \end{array} \right.$$

KKT-villkoren kan sammanfattas som följer:
För varje $j = 1, \ldots, n$ gäller att

$$\begin{array}{rll} x_j^* = 0 & \Rightarrow f_j'(x_j^*) \geq \alpha^* & \text{och } \beta_j^* = 0 \\ x_j^* \in (0,1) & \Rightarrow f_j'(x_j^*) = \alpha^* & \text{och } \beta_j^* = 0 \\ x_j^* = 1 & \Rightarrow f;_j\,(x_j^*) \leq \alpha^* & \text{och } \left\{ \begin{array}{l} f_j'(x_j^*) + \beta_j^* = \alpha^*, \\ \beta_j^* \geq 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Dessutom: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j^k = k.$

Lagrangefunktionen väljs till $L(x, \alpha, \beta) = \Sigma_j f_j(x_j)$
$-\alpha(\Sigma_j x_j - k) + \Sigma_j \beta_j (x_j - 1)$; KKT fås ur

- $\dfrac{\partial L(x,\alpha,\beta)}{\partial x_j} \geq 0, \dfrac{\partial L(x,\alpha,\beta)}{\partial x_j} \cdot x_j = 0, x_j \geq 0$
- $\dfrac{\partial L(x,\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = 0, \dfrac{\partial L(x,\alpha,\beta)}{\partial \beta_j} \leq 0, \dfrac{\partial L(x,\alpha,\beta)}{\partial \beta_j} \cdot \beta_j = 0, \beta_j \leq 0$
- $\Sigma x_j = k$

b) Antag att brytpunkten, dvs det j för vilket $r > k$ inträffar, är j^*. Det gäller då enligt algoritmen att $x_j^* = 1$ för alla $j = 1, 2, \ldots, j^* - 1$ och att $x_{j^*}^* - k - (j^* - 1)$.

Sätt $\alpha^* = -cj^*$. Vi uppfyller därmed att

$j = 1, \dots, j^* - 1$: $x^* = 1$ och $f_j'(x_j^*) = c - c_j \leq \alpha^*$, dvs $c_j \geq c_{j^*}$ för $j < j^*$ (följer ur sorteringen).

$j = j^*$: $x_{j^*} \in [0, 1]$ och $f_j'(x_j^*) = -c_{j^*} = -\alpha^*$

$j = j^*$: $x_j^* = 0$ och $f_j'(x_j^*) = -c_j \geq \alpha^* = -c_j^*$. dvs $c_j \leq c_{j^*}$ för $j > j^*$ (följer ur sorteringen).

$$\text{För} \begin{bmatrix} \\ \\ j > j_{j^*}, \text{sätt } \beta_j^* = 0 \\ j = 1, \dots, j^* - 1, \text{sätt } \beta_j^* = \alpha^* - f_j'(x_j^*) = -c_{j^*} + c_j \geq 0 \\ j = j^*, \text{sätt } \beta_j^* = 0 \end{bmatrix}$$

Vi xxxx därmed samtliga KKT-villkor!

6a) $\nabla f(x^*) = 0^*$

b) Det existerar $\lambda_* \geq 0^m$ med

- $\nabla f(x^*) = A^* \lambda_*$
- $\lambda_*^T (Ax - b) = 0$

samt $Zx_* \geq b$.

7. LP-dualen är: minimera $w = b^T \pi$

$$\text{då} \begin{bmatrix} \\ A^* \pi \geq c \\ \pi \geq 0 \end{bmatrix}.$$

Starka dualsatsen: Om ett av de två problemen (primalen eller dualsatsen) har en optimallösning, så har det andra det också, och de har samma optimala målfunktionsvärde.

Beräk. Vi utgör från att primala har ett optimum. Den har då en aoptimal tillåten beaslösning (sats 4.1-3). Vi skriver den som $x^* = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$, med $A = (B \quad N)$ och $C = \begin{bmatrix} c_C \\ c_N \end{bmatrix}$. Då är $x_B = B^{-1}b$. x^* är optimal om och endast om $c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leq 0^T$, dvs $c_B^T B^{-1} N \geq C_N^T$.

Sätt $\pi^* = (B^{-1})^T c_B$, dvs $(\pi^*)^T = c_B^T B^{-1}$.

Är π^* tillåten i dualen?

$(\pi^*)^T A = C_B^T B^{-1} (B \quad N) = (C_B^T \quad c_B^T B^{-1} N) \geq (c_B^T \quad c_N^T) = c^T$, dvs $A^* \bar{n}^* \geq c$. Gäller $\pi^* \geq 0$? För primalen stackvariabler gäller att

$$\bar{c}_s \leq 0, \text{ dvs } 0 - c_B^T B^{-1} I^m = -c_B^T B^{-1} = -(\pi^*)^T \leq 0.$$

$\because$ π^* är tillåten i dualen.

Gäller $b^T\pi^* = c^T x^*$ Ja, ty

$$e^* = c^T x^* = c_B^T B^{-1} b = (\pi^*)^T b = w^*.$$

Corollary 6.2 till svaga dualsatsen (Sats 6.1) ger att x^* och π^* är optimala i primalen respektive draker.