Tentamen i Tillämpad optimeringslära 990827

1. Fas-1 problemet:

   minimera $w = a$

   $$\text{då} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + s_1 \qquad\qquad = 3 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 \qquad - s_2 + a = 5 \\ \ \ x_1, \quad x_2, \quad s_1, \quad s_2, \quad a \geq 0 \end{cases}$$

   Tablå:

bas	w	x_1	x_2	s_1	s_2	a	h.l.	
$-w$	1	-1	-1	0	1	0	-5	x_1 inkommande,
s_1	0	-1	3	1	0	0	3	a utgående
a	0	$\boxed{1}$	1	0	-1	1	5	
$-w$	1	0	0	0	0	1	0	Optimum! $w^* = 0$, dvs
s_1	0	0	4	1	-1	1	8	(s_1, x_1) är en tillåten bas.
x_1	0	1	1	0	-1	1	5	

   Uttryck z i icke-basvariabler och övergå till fas-2:

bas	z	x_1	x_2	s_1	s_2		
$-z$	1	0	1	0	-2	10	x_2 inkommande,
s_1	0	0	$\boxed{4}$	1	-1	8	s_1 utgående
x_1	0	1	1	0	-1	5	
$-z$	1	0	0	$-1/4$	$-7/4$	8	
x_2	0	0	1	$1/4$	$-1/4$	2	Optimum!
x_1	0	1	0	$-1/4$	$-3/4$	3	

   $x^* = (3, 2)^T$; $z^* = -8$.

2 a) En KKT-punkt är strikt komplementär om varje olikhetsvillkor som är

uppfyllt med likhet har en positiv multiplikator. Om problemet är att

$$\begin{aligned} &\text{minimera } f(x) \\ &\text{då} \quad g_i(x) \leq, i = 1, \ldots, m \quad | \quad \lambda_i \\ &\qquad g_j(x) = 0, j = 1, \ldots, \ell \quad | \quad \mu_j \end{aligned}$$

och (x^*, λ^*, μ^*) är en KKT-punkt är den alltå strikt komplementär om

$$\lambda_i^* > 0 \text{ för alla } i = 1, \ldots, m \text{ där } g_i(x^*) = 0.$$

b) En extrempunkt i en mängd X är en punkt i X som inte kan skrivas som en konvexkombination av andra punkter i X.

c) En metodik för att (huvudsakligen) beräkna en optimal lösning till ett binärt heltalsproblem. Trädet beskriver en uppdelning av alla möjliga kombinationer av variabelvärden. Uppskattningar och tillägg av bivillkor styr vilka lösningar som genereras och undviker i möjligaste mån att generera onödiga (dåliga) variabelkombinationer.

3. För ett värde på barriär parametern $\mu > 0$ är det obegränsade problemet

$$\text{minimera}_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) - \mu \cdot \log(x_1 + 2x_2 - 10)$$

entydigt lösbaart, enligt följande:

$$x_1 - \frac{\mu}{x_1 + 2x_2 - 10} = 0; 2x_2 - -\frac{2\mu}{x_1 + 2x_2 - 10} = 0$$

ger att $x_1 = x_2$ måste gälla; den resulterande kvadratiska ekvationen $3x_1^2 - 10x_1 - \mu = 0$ har två rötter, varav bara en, $x_1(\mu) = 5/3 + \sqrt{25/9 + \mu/3}$, är (strikt) tillåten i bivillkoret. Då $\mu \to 0$ går $x_1(\mu) = x_2(\mu)$ mot 10/3.

Man visar sedan att $x^* = (\frac{10}{3}, \frac{10}{3})^T$ är en KKT-punkt. Bivillkoret är bindande, och $\lambda^* = 10/3 \geq 0$, ur det duala systemet. Eftersom problemet är konvext så är x^* optimal.

4 a) Nuvarande optimallösning:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad b^{NY} = b + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ger $x_B^{NY} = B^{-1}b^{NY} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51/2 \\ 4 \\ 41/2 \end{bmatrix}$. Eftersom $X_B^{NY} \geq 0$ är X_B^{NY} optimal. Funktionsvärde:

$$c^T x^{NY} = c_B^T x_B^{NY} = (-2, -1, 0) \begin{bmatrix} 51/2 \\ 4 \\ 41/2 \end{bmatrix} = -15.$$

Förändringen är $-15 - (-13) = -2$.

Skuggpriset för bivillkor 3 är värdet av dess dualvariabel, dvs $y_3^* = -2$ (hela den duala vektorn är $(0, -1, -2)^T$)/ Skuggpriset anger just den marginella förändringen av det optimala målfunktionsvärdet vid en förändring med en enhet i ett högerled, varför de två storheterna är lika.

b) Då c_1 förändras kommer de reducerade kostnaderna att förändras:

$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} b = (1, 2)$; med $c_B^{NY} = c_B + (0, 4, 0)^T$
fås därför $(c_N^{NY})^T = c_N^T - (c_B^{NY})^T B^{-1} b = \bar{c}^T N - (0, 4, 0) \cdot B^{-1} b$
$= (1, 2) - 4 \cdot (0, 1) = (1, -2)$.

Eftersom $\bar{x}_{s_3} < 0$ är inte x_B längre en optimal bas. Om s_3 införs i basen (obs: ny målfunktionsrad: $[1\,0\,0\,0\,1\ -21]$) fås s_2 som utgående. Efter en pivotering fås $x_B^* = (x_2, x_1, s_3) = (4, 1, 2)^T$ och $z^* = -5$.

c) Beräkna dess reducerade kostnad givet den aktuella optimalbasen:

$$\bar{c}_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} \cdot a^3 = -2 - (0, -1, -2) \left(\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right] = 2 > 0.$$

Eftersom det är ett minimeringsproblem tjänar vi inte på att öka x_3 från noll. Den nya aktiviteten påverkar inte optimallösningen.

5. Formulera först Lagrangefunktionen:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}\|y - x\|^2 - \lambda^T (Ax).$$

Lös det obegränsade problemet att minimera denna över x.

Problemet att minimera denna över x:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = x - y - A^T \lambda = \mathbf{0}^n \Rightarrow x = y + A^T \lambda.$$

Eftersom L är strikt konvex i x för varje λ är $x = x(\lambda) = y + A^T \lambda$ den unika lösningen till detta problem. Studera nu den Lagrangeduala målfunktionen:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \min_x L(x, \lambda) = L(x(\lambda), \lambda) = \\ &= \frac{1}{2}\|y - (y + A^T \lambda)\|^2 - \lambda^T A(y + A^T \lambda) = \\ &= -\frac{1}{2}\|A^T \lambda\|^2 - y^T A^T \lambda. \end{aligned}$$

Att maximera $L(\lambda)$ över $\lambda \in \mathbb{R}^m$ är ett konvext problem, och löses sålunda

$$\nabla L(\lambda) = -AA^T \lambda - Ay = \mathbf{0}^m.$$

Eftersom A har full radrag existerar inversen av AA^T. Detta ger att

$$\lambda^* = -(AA^T)^{-1} Ay.$$

Insätter λ^* i uttrycket

$$\begin{aligned} x(\lambda^*) &= y - A^T (AA^T)^{-1} Ay \\ &= [I - A^T (AA^T)^{-1} A] y. \end{aligned}$$

Att visa att $x(\lambda^*)$ är den globala optimala lösningen är nu elementärt: vi kan visa från de ovan gjorda beräkningarna att KKT-villkoren är uppfyllda, och konvexiteten hos problemet ger resultatet.

1. 6 a)]

$$(D) \qquad \begin{aligned} &\text{maximera } b^T y \\ &\text{då} \quad A^T y \le c \\ &\qquad\quad y \ge 0^m \end{aligned}$$

Optimalitetsvillkor: x^* är optimal i (P) omm:

(i) x^* är tillåten i (P);

(ii) det existerar en komplementär dual lösning, dvs ett y^* så att

$$(y^*)^T (Ax^* - b) = 0 \text{ och } (x^*)^T (A^T y^* - c) = 0;$$

(iii) y^* är tillåten i (D).

b)

$$
\text{(D)} \quad
\begin{array}{rl}
\text{maximera} & = b_1^T y_1 + b_2^T y_2 + b_2^T y_3 + \ell_1^T v \\
& A_{11}^T y_1 + A_{21}^T y_2 \qquad\qquad + v \leq c_1 \\
\text{då} & A_{12}^T y_1 + A_{22}^T + A_{32}^T y_3 + \qquad \leq c_2 \\
& \quad y_1 \text{fri}, \quad y_2 \leq \mathbf{0}, \quad y_3 \geq \mathbf{0}, v \leq \mathbf{0}
\end{array}
$$

7 a) Vi vet att $\nabla^2 f(x)$ är positivt semidefinit om och endast om alla egenvärden är icke-negativa. Dessutom är detta ekvivalent med att $p^T \nabla^2 f(x) p \geq 0$ för alla $p \in \mathbb{R}^n$. Alltså har $\nabla^2 f(x)$ minst ett negativt egenvärde om och endast om $p^T \nabla^2 f(x) p < 0$ för något $p \in \mathbb{R}^n$.

b) Antag att $p \in \mathbb{R}^n$ är sådant att $p^T \nabla^2 f(x) p < 0$. Om $\nabla f(x)^T p \leq 0$, låt $\bar{p} = p$; om
$\nabla f(x)^T p > 0$, låt $\bar{p} = -p$. I båda fall gäller:

$$
\begin{aligned}
f(x + \ell \bar{p}) = f(x) = \ell \nabla f(x)^T \bar{p} + (\ell^2/2) \bar{p}^T \nabla^2 f(x) \bar{p} + o(\ell^3) \\
< f(x) \text{ för alla tillräckligt små } \ell > 0.
\end{aligned}
$$

c) Det enklaste är att undersöka om det existerar något negativt egenvärde hos $\nabla^2 f(x^t)$ då x^t närmar sig en stationär punkt. Om vi upptäcker detta, bildar man t.exèn positiv linjärkombination av motsvarande $\bar{p}$-värde enligt (b) och $-\nabla f(x^t)$, vilket är en descentiriktning. Detta leder till (1).