Exempelsamling, tillämpad optimering

Innehåll

1 Konvexitet

1.1 Teori

1.1.1 (Tentamensuppgift 980819)
I fallet obegränsad, konvex optimering vet vi att optimallösningarna kan ges en elegant karakterisering som de vektorer x^* för vilka gradientens värde är lika med noll. Denna uppgift syftar till att visa att en motsvarande slutsats kan dras också för *begränsad*, konvex optimering. I detta mer generella fall visar vi att gradientens värde hos varje optimallösning är lika (men ej troligen lika med noll som fallet är i obegränsad optimering). [Detta innebär bland annat att algoritmer för konvex, begränsad optimering kan utnyttja förändringarna hos gradientens värde mellan successiva iterationer i avbrottskriterier.]
Betrakta optimeringsproblemet

[P]
$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ \text{då} \quad & x \in X, \end{aligned}$$

där $f : \Re^n \mapsto \Re$ är konvex och kontinuerligt differentierbar, och där $X \subseteq \Re^n$ är en icke-tom konvex mängd. Antag att X^* är mängden av globala optimallösningar till [P]. Vi antar att denna mängd är icke-tom (dvs. att problemet [P] har en optimal lösning) och att ett element i X^* är vektorn x^*.
Låt nu
$$\hat{X} := \{\, x \in X \mid \nabla f(x^*)^{\mathrm{T}}(x - x^*) = 0; \quad \nabla f(x) = \nabla f(x^*) \,\}.$$
Visa att $X^* = \hat{X}$.
Tips: utnyttja vad Ni vet om primala optimalitetsvillkor (och förstås ekvivalenta definitioner av konvexitet hos en funktion).

1.1.2 (Tentamensuppgift 980527)

a) **(2p)** Betrakta problemet

[P]
$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ \text{då} \quad & x \in X, \\ & g(x) \le 0, \end{aligned}$$

där $f : \Re^n \mapsto \Re$ och $g : \Re^n \mapsto \Re$ är konvexa och kontinuerliga funktioner, och där $X \subseteq \Re^n$ är en icke-tom konvex mängd. Antag att x^* är en global optimallösning till problemet, och att $g(x^*) < 0$ gäller. Visa att x^* också är en global optimallösning till problemet

[P']
$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ \text{då} \quad & x \in X, \\ & g(x) \le b, \end{aligned}$$

för varje val av $b > 0$. (Speciellt gäller alltså att ett bivillkor som är redundant i optimallösningen till ett konvext optimeringsproblem kan tas bort utan att det påverkar problemets optimallösning.)

b) **(1p)** är kravet att [P] är ett konvext problem *nödvändigt* för att utsagan skall vara sann? Om Ert svar är 'Ja!', motivera då detta med ett motexempel. Om Ert svar är 'Nej!', motivera då detta genom att utvidga resultatet i a) till detta mer generella fall. Diskutera också vad svaret kan tänkas betyda för hur man skulle kunna lösa att begränsat optimeringsproblem.

1.1.3 Låt mängderna $C, D \subseteq R^n$ vara konvexa, funktionen $f : C \to R$ vara konvex och $\alpha \in R$. Visa att följande mängder är konvexa.

a) $\alpha C = \{\alpha x | x \in C\}$

b) $C \cap D$

c) $C + D = \{x + y | x \in C, y \in D\}$

d) $\{x \in C | f(x) \leq \alpha\}$

e) epi $f = \{(x, \mu) \in C \times R | f(x) \leq \mu\}$

1.1.4 Låt mängden $C \subseteq R^n$ och funktionerna $f, g : C \to R$ vara konvexa och låt $\alpha \in R_+$ $(= \{\alpha | \alpha \geq 0\})$. Visa att följande funktioner är konvexa.

a) $f + g$

b) αf

c) $\max\{f, g\}$

1.1.5 Låt $C \subseteq R^n$ vara en konvex mängd och A en ändlig indexmängd. Låt $f_\alpha : C \to R$ vara en konvex funktion för varje $\alpha \in A$. Visa att funktionen $\max\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ är konvex.

1.1.6 Låt $f : I \to R$ vara en icke avtagande konvex funktion på intervallet $I \subseteq R$ och $g : C \to I$ en konvex funktion på den konvexa mängden $C \subseteq R^n$. Visa att den komposita funktionen $fg : C \to R$ är konvex på C.

1.1.7 Låt $f(x) = |x|^p$. För vilka $p \neq 0$ är f en konvex funktion

a) på R_{++} $(= \{x | x > 0\})$?

b) på R?

1.1.8 Vilka av följande funktioner är konvexa för $x > 0$?

a) $\ln x$

b) $-\ln x$

c) $-\ln(1-e^{-ax})$, där $a>0$ är en konstant

d) $\ln(1+e^{ax})$

e) e^{ax}

f) $x\ln x$

1.1.9 Vilka av följande funktioner är konvexa? Vilka är *strikt* konvexa?

a) $\ln(e^{x_1}+e^{x_2})$

b) $\ln\sum_{i=1}^{n} e^{a_i x_i}$, där $a_i,\ i=1,..,n$, är konstanter

c) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

d) x_1^2/x_2 för $x_2>0$

e) $-\sqrt{x_1x_2}$ för $x_1,x_2>0$

f) $-(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n}$ för $x_i>0,\ i=1,..,n$

1.1.10 Visa följande relation mellan aritmetiska och geometriska medelvärdet. För $x_i>0$, $i=1,..,n$, gäller

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

1.1.11 För vilka värden på parametrarna a,b,c och d är nedanstående funktioner konvexa?

a) $\ln(1+e^{ax})$

b) x^2+by^2-2xy

c) x^cy^2, för $x>0$

d) $d(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

1.1.12

a) Låt $x^1,...,x^P\in R^n$ vara givna. Visa att

$$\{x\in R^n|\ \text{det finns } t_i\ge 0,\ i=1,..,P,\ \text{sådana att } \sum_{i=1}^{P} t_i=1 \text{ och } x=\sum_{i=1}^{P} t_i x^i\}$$

är en konvex mängd. (Anmärkning: Denna mängd kallas det *konvexa höljet* av punkterna $x^1,..,x^P$.)

b) Antag att X är en konvex delmängd av R^n och att $x^1, .., x^P \in X$.
Visa att om $t_i \geq 0, i = 1, .., P$ och $\sum_{i=1}^{P} t_i = 1$ så gäller att $\sum_{i=1}^{P} t_i x^i \in X$.

1.1.13 Optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in X \end{array}$$

sägs vara konvext om mängden $X \subseteq R^n$ av tillåtna lösningar är konvex och målfunktionen $f : X \to R$ är konvex på X. Definiera för detta problem begreppen lokalt respektive globalt optimum och visa att ett lokalt optimum även är globalt. Visa vidare att om f är *strikt* konvex så kan problemet inte ha alternativa optimallösningar, dvs att i detta fall är ett optimum *unikt*.

1.1.14

a) Betrakta det generella optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in X. \end{array}$$

Antag att mängden $X \subseteq R^n$ är konvex och att funktionen $f : X \to R$ är konvex på X, varvid även problemet är konvext. Visa att mängden av optimallösningar är konvex och att om problemet har flera optimallösningar så har det oändligt många.

b) Konstruera ett (icke-konvext) problem som har exakt två globala optimallösningar.

1.1.15 Avgör om mängderna nedan är konvexa eller ej. Bevis eller motexempel.

a) $\{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1;\ x_1^2 + x_2^2 \geq 1/4\}$

b) $\{x \in R^n \mid x_j \geq 0,\ j = 1, ..., n\}$

c) $\{x \in R^n \mid x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\}$

d) $\{x \in R^2 \mid x_1 + x_2^2 \leq 5;\ x_1^2 - x_2 \leq 10;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0\}$

e) $\{x \in R^2 \mid x_1 - x_2^2 \geq 1;\ x_1^3 + x_2^2 \leq 10;\ 2x_1 + x_2 \leq 8;\ x_1 \geq 1;\ x_2 \geq 0\}$

1.1.16 Vilka av följande bivillkor definierar konvexa mängder?

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq b$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geq b$

c) $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = b$

1.1.17 En funktion $f : R^n \to R$ sägs vara *kvasi-konvex* om det för varje konstant $c \in R$ gäller att *nivåmängden* $\{x | f(x) \leq c\}$ är konvex. Som benämningen antyder är kvasikonvexitet hos en funktion en svagare egenskap än konvexitet. Visa detta genom att lösa följande två deluppgifter.

a) Visa att varje konvex funktion är kvasi-konvex

b) Ge exempel på en funktion som är kvasi-konvex men *ej* konvex.

1.1.18 Betrakta ett konvext optimeringsproblem på formen

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \leq b_i, \ \ i = 1, ..., m \end{array}$$

a) Låt x^* beteckna en optimallösning. Antag att problemet utökas med bivillkoret $g_{m+1}(x) \leq b_{m+1}$ och att punkten x^* är otillåten i detta bivillkor, dvs att $g_{m+1}(x^*) > b_{m+1}$. Låt x^{**} beteckna en optimallösning till det utökade problemet och antag att $f(x^{**}) > f(x^*)$, dvs att x^{**} *inte* är ett alternativt optimum i det ursprungliga problemet. Visa att $g_{m+1}(x^{**}) = b_{m+1}$ gäller.

b) Visa med ett enkelt numeriskt exempel att slutsatsen i deluppgift a) inte säkert gäller för ett *icke-konvext* problem.

1.1.19 Antag att mängderna $X_i \subseteq R^n, \ i = 1, ..., m$, är konvexa. Visa att även snittmängden

$$X = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

är konvex.
Ovanstående resultat är fundamentalt vid ett studium av egenskaperna hos ett problem på formen

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \leq 0, \ \ i = 1, ..., m. \end{array}$$

Förklara varför!

1.1.20 Vilka av följande funktioner är konvexa och vilka är konkava? (Det är inte säkert att varje funktion är någotdera!) Vilka är differentierbara?

a) $f(x) = |x_1| + \dfrac{1}{x_2}$ för $x_2 > 0$

b) $f(x) = x_1 x_2$

c) $f(x) = -2|x_1| + 5x_1 - 3x_2$

d) $f(x) = \max\,(3x_1 + 2x_2 - 7, x_1 + 2x_2 - 5, x_1 - x_2 - 1)$

e) $f(x) = \min\,(3x_1 + 2x_2 - 7, x_1 + 2x_2 - 5, x_1 - x_2 - 1)$

f) $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

g) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \sqrt{(x_1 - x_1^i)^2 + (x_2 - x_2^i)^2} \right)$, där (x_1^i, x_2^i) är givna punkter och $c_i > 0,\ \forall i$.

1.1.21 Betrakta problemet

$$\begin{array}{lrcl} \max & f(x_1, x_2) & & \\ \text{då} & (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 2)^2 & \leq & 16 \\ & x_1^2 + x_2^2 & \geq & 8. \end{array}$$

a) Är mängden av tillåtna lösningar konvex?

b) För vilka (differentierbara) målfunktioner är punkten (2,2) ett lokalt maximum under de givna villkoren?

1.1.22

a) Avgör om mängden

$$X = \{(x_1, x_2) | 2e^{-x_1 + x_2^2} \leq 4, -x_1^2 + 3x_1 x_2 - 3x_2^2 \geq -1\}$$

är konvex.

b) Ge exempel på två mängder X_1 och X_2, där X_1 är konvex och X_2 icke-konvex, samt sådana att snittet av mängderna utgör en konvex mängd. Mängderna X_1 och X_2 ska anges matematiskt! Figur räcker ej!

1.1.23

a) Avgör om följande funktion är konvex.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 - 3x_1 x_3 + e^{x_2 + x_4} - x_2 x_4$$

b) Visa att följande problem är konvext.

$$\begin{array}{lrcl} \min f(x) = & 4x_1^2 - 5x_2 + x_3^2 + 2x_1 x_3 + e^{x_1^2 - 2x_2} & & \\ \text{då} & -x_1^2 - 3x_2 & \geq & 3 \\ & 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2} & \leq & 4 \\ & -x_2 - x_3 & \leq & -2 \end{array}$$

1.1.24

a) För vilka värden på x_1 och x_2 är $f(x) = 3x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2$ konvex? För vilka värden på x_1 och x_2 är funktionen konkav?

b) Definierar villkoren $3x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 \leq 5$, $x_1 \geq 1$ och $x_2 \geq 1$ en konvex mängd?

1.1.25 Är ett lokalt optimum till problemet nedan också ett globalt optimum?

$$\begin{array}{lrcl} \min & f(x) = \dfrac{1}{x_1+1} + |3x_2 - 5| + 135x_3 & & \\ \text{då} & 2x_1^4 - 5x_1 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 + 3x_2 - 10x_3 + 257x_4 & \leq & 13 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

1.1.26 Givet en strikt konkav funktion h. Är då mängden $\{x|h(x) \leq 0\}$ icke-konvex? Bevis eller motexempel!

1.1.27

Vilka av följande funktioner är konvexa, konkava och vilka är varken konvexa eller konkava?

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ för $x > 0$

c) $f(x) = ln(x)$ för $x > 0$

d) $f(x) = e^{-x^2}$

e) $f(x_1, x_2) = x_1x_2$.

f) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

g) $f(x_1, x_2) = -|x_1| + x_2$.

1.1.28 Vilka av följande bivillkor definierar konvexa mängder?

a) $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$

b) $x_1^2 + x_2^2 = 4$

c) $x_1^2 + x_2^2 \geq 4$

d) $x_1 - |x_2| \leq 0$

e) $x_1 - |x_2| \geq 0$

1.1.29

a) För vilka värden på x är $f(x) = -12x + x^3$ konvex(konkav)?

b) Plotta funktionen på intervallet $-3 \leq x \leq 3$. Identifiera lokala maxima respektive minima.

1.1.30 Betrakta funktionen $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2 + 3x - y$

a) Uttryck funktionen i matris vektorform.

b) Är hessianen singulär?

c) Är $f(x, y)$ konvex?

1.1.31 Avgör om mängden

$$S = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1; x_1^2 + x_2^2 \geq 1/4$$

är konvex. Motivera.

1.1.32

a) Är mängden

$$X_1 = \{x \in R^n | x_j \geq 0, j = 1 \ldots n\}$$

konvex?

b) Är mängden

$$X_2 = \{x \in R^n | x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

konvex? Bevisa eller motbevisa.

1.1.33 Är mängden

$$X = \{x | x_1 + x_2^2 \leq 5, x_1^2 - x_2 \leq 10, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

konvex?

1.1.34 Avgör om mängden

$$S = \{x | x_1 - x_2^2 \geq 1, x_1^3 + x_2^2 \leq 10, 2x_1 + x_2 \leq 8, x_1 \geq 1, x_2 \geq 0\}$$

konvex? Motivera väl.

1.1.35 Ange definitionen av en konvex funktion och tolka den geometriskt (d.v.s förklara i ord och bild innebärden av definitionen).

1.1.36 Använd definitionen av en konvex respektive konkav funktion för att visa att en generell linjär funktion($\sum_{j=1}^{N} a_i x_i$) är både konvex och konkav.

1.1.37 Använd definitionen av en konvex mängd för att visa att

$$S = \{x | x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$$

är konvex. Ledning: använd triangelolikheten.

1.1.38 Show that there is only one hyperplane in $\mathbb{R}^3$ which separates the disjoint closed convex sets A and B defined by the equations

$$A = \{\,(0, x_2, 1)^{\mathrm{T}} \mid x_2 \in \mathbb{R}\,\}, \quad B = \{\,\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}^3,\ x_1x_2 \geq x_3^2\,\}$$

and that this hyperplane meets both A and B.

1.1.39 Show that each closed convex set A in $\mathbb{R}^n$ is the intersection of all the closed halfspaces in $\mathbb{R}^n$ containing A.

2 Linjär optimering

2.1 Modellering

2.1.1 (Tentamensuppgift 980819)
En ny producent av parfym önskar slå sig in på en lukrativ marknad. En exklusiv parfym, Chinelle, skall tillverkas och marknadsföras till maximal intäkt. Med den tillgång till maskiner man har kan man producera varan i två olika slags processer, och man funderar också på att anlita en fotomodell för att lansera den. För att förenkla problemställningen, låt oss anta att parfymen tillverkas med hjälp av två huvudingredienser, ämnet med den hemliga formeln MO och en blandning av allmänt förekommande ämnen. Två processer är tänkbara, med vilka man kan tillverka produkten. Den första ger tre gram parfym av en enhet MO och två enheter av det andra ämnet, medan den andra processen ger fem gram parfym av två respektive tre enheter av de två ämnena. Man disponerar över tillverkningsprocesser som kan tillverka 20,000 enheter MO under planeringshorisonten och 35,000 enheter av den andra blandningen. Varje enhet MO kostar tre FFr (franska francs, vi använder naturligtvis den centrala valutan i sammanhanget) att tillverka, och den andra blandningen två FFr per enhet. Ett gram parfym beräknas kunna säljas för femtio FFr. Utan marknadsföring tror man sig kunna sälja 1,000 gram parfym enbart genom nyhetens behag, men man vill höja efterfrågan med hjälp av en annonskampanj. Därtill finns en fotomodell som ställer upp för fotosessioner för priset 5,000 FFr per halvtimme, och man tror att en kampanj kan höja efterfrågan med motsvarande 200 gram per halvtimme utnyttjad tid, upp till maximalt tre timmar. Formulera problemet att välja den optimala strategin som ett LP-problem.

2.1.2 Ett dataföretag har uppskattat antalet servicetimmar som måste utföras under de närmaste fem månaderna, se tabell 1.

Månad	Antal servicetimmar
Januari	6000
Februari	7000
Mars	8000
April	9500
Maj	11500

Tabell 1: Antalet servicetimmar per månad i uppgift 2.1.2.

Servicen utförs av anställda tekniker som i början av januari är 50 till antalet. Varje tekniker kan arbeta upp till 160 timmar per månad. För att täcka det framtida behovet av tekniker måste nya tekniker (praktikanter) utbildas. Denna utbildning tar en månad och kräver 50 timmars handledning av en utbildad tekniker. En utbildad tekniker har en månadslön på 15000 kr (oavsett antalet arbetstimmar under måna-

den) och en praktikant har en månadslön på 7500 kr. I slutet av varje månad slutar 5% av teknikerna för arbete inom något annat företag.
Formulera ett LP-problem vars lösning kommer att minimera den totala lönekostnaden för den givna perioden, givet att antalet servicetimmar måste tillgodoses.

2.1.3 Snabbmatsföretaget Turkeyco erbjuder till lunch två typer av kalkonkotletter. En kotlett består av både ljust och mörkt kalkonkött. Kotlett I säljs för 16 kr/hg och måste innehålla minst 70% vitt kött. Motsvarande data för kotlett II är 12 kr/hg och minst 60% vitt kött. Som mest kan 15 kg kotlett I och 9 kg kotlett II säljas. Kalkonerna, två olika typer, köps in från kalkonfarmen GobbleGobble. En kalkon av typ A kostar 40 kr och ger 5 hg vitt kött och 2 hg mörkt kött. Motsvarade data för en kalkon av typ B är 32 kr och ger 3hg vitt kött respektive 3 hg mörkt kött.
Formulera problemet att maximera Turkeyco's vinst som ett LP-problem.

2.1.4 Ett oljeraffinaderi står inför uppgiften att tillverka två bensinkvaliteter med följande krav enligt tabell 2.

Bensinsort	Minsta oktantal	Maximalt ångtryck (mbar)	Efterfrågad volym (ton)
Regular	90	10	10
Premium	95	8	25

Tabell 2: Krav på bensinsorterna i uppgift 2.1.4.

Råvarorna som kan användas och deras egenskaper beskrivs i tabell 3.

Råvara	Tillgång (ton)	Oktantal	Ångtryck (mbar)	Kostnad (kr/ton)
Butan	12	120	60	1500
Tung nafta	15	75	4	2400
Katalytiskt reformat	25	100	2,6	3000

Tabell 3: Råvarornas egenskaper i uppgift 2.1.4.

Vid bensintillverkningen gäller att oktantalet och ångtrycket i en bensinsort blir proportionella mot kvantiteten av respektive råvara som används. Detta betyder t ex att om 60% butan och 40% tung nafta blandas till en bensinsort så blir oktantalet $0,60 \times 120 + 0,40 \times 75 = 102$.
Formulera raffinaderiets problem att bestämma de bensinblandningar som minimerar råvarukostnaderna och tillgodoser kundernas krav.

2.1.5 Ett fartyg har J stycken lastrum med både vikt och volymmässiga kapacitetsbegränsningar. Lastrum j har viktkapacitet w_j (ton) och volymkapacitet v_j (m^3). Fartyget kan lasta I olika varor. Vara i karakteriseras av a_i = tillgänglig mängd av vara i (ton), b_i = volym av vara i (m^3/ton) och c_i = förtjänst per lastat ton av vara i.
Av stabilitetsskäl skall den totala mängden som lastas i varje lastrum vara proportionell mot lastrummets kapacitet. Dvs för varje lastrum j_1, j_2 ($j_1 \neq j_2$) gäller

$$\frac{\text{Lastat antal ton i lastrum } j_1}{\text{Kapacitet i ton för lastrum } j_1} = \frac{\text{Lastat antal ton i lastrum } j_2}{\text{Kapacitet i ton för lastrum } j_2}$$

Formulera problemet att bestämma hur varorna skall lastas för att förtjänsten ska bli så stor som möjligt!

2.1.6 En bondefamilj äger en gård på 50 ha och kan använda jorden för att odla soja, majs och vete. Dessutom kan familjen ha mjölkkor och höns. Hönshuset rymmer 3000 hönor och ladugården har plats för 32 kor.
Familjen kan arbeta totalt 3500 persontimmar under vintern (oktober - april) och 4000 persontimmar under sommaren (maj - september). De yngre medlemmarna i familjen kan arbeta totalt högst 200 tim på granngården för 50 kr/tim under vintern och för 60 kr/tim under sommaren istället för att arbeta på familjegården.
Varje mjölkko som familjen har medför en investering på 12 000 kr och kräver 100 persontimmars arbete under vintern och 50 persontimmar under sommaren. Dessutom måste 0,6 ha per ko av jorden användas till betesmark. Nettointäkten för en mjölkko under ett år är 10 000 kr. Varje höna medför en investering på 90 kr och ger en nettointäkt på 50 kr. Arbetsinsatsen per höna och år beräknas till 0,6 och 0,3 persontimmar under vintern respektive sommaren. Totalt kan familjen investera 400 000 kr under det kommande året. Arbetsinsatsen (i persontimmar) samt nettointäkten (1000-tal kr) per ha odlad mark av soja, majs och vete ges av tabell 4.

	Soja	Majs	Vete
Arbetsinsats vinter	50	85	25
Arbetsinsats sommar	125	190	100
Nettointäkt	15	22	11

Tabell 4: Arbetsinsats och nettointäkter i uppgift 2.1.6.

Familjen ska bestämma hur gårdens jord ska utnyttjas för att maximera det kommande årets nettointäkt. Formulera som ett LP-problem. Lös ej!

2.1.7 En möbelfabrikör som tillverkar ett mycket flexibelt hyllsystem har fått en order på ett sådant system till ett större kontor. Ordern omfattar bland annat ett stort antal hyllplan, närmare bestämt 211 hyllplan på 5 dm, 395 hyllplan på 7 dm, 610 hyllplan på 9 dm och 97 hyllplan på 11 dm. Alla hyllplan är lika breda och tjocka. De skall tillverkas genom att kapas ur brädor som är 30 dm långa. Dessa brädor kan kapas enligt fem *kapningsmönster*, vilka ger utbyte av hyllplan av olika längder enligt nedanstående tabell. Några av mönstren ger också ett spill, vilket är värdelöst. Olika brädor kan vid tillverkningen av hyllplan kapas enligt olika mönster, se tabell 5.
De brädor som kapas skall, naturligtvis, ge tillräckligt många hyllplan av de olika längderna för att ordern skall kunna uppfyllas, men för att maximera vinsten vill fabrikören förbruka så få brädor som möjligt. Konstruera en (linjär) optimeringsmodell för fabrikörens problem!

Mönster nr	Antal hyllplan av resp längd 5 dm	7 dm	9 dm	11 dm	Spill
1	2	0	1	1	–
2	1	2	1	0	2 dm
3	1	1	2	0	–
4	1	3	0	0	4 dm
5	2	1	0	1	2 dm

Tabell 5: Kapningsmönster i uppgift 2.1.7.

2.1.8 Göta Lantmän tillverkar många olika fodertyper. Nu skall tre fodersorter för grisar introduceras på marknaden. Behovet av grisfodersorterna beräknas vara 500 ton för Bas, 300 ton för Standard samt 400 ton för Special. Ingredienserna i fodervarianterna ska ligga mellan vissa minimi- och maximinivåer för att rätt näringsinnehåll ska erhållas. Dessa nivåer specificeras i tabell 6 för de olika fodersorterna (siffrorna anger andel av innehållet i viktsprocent).

Ingrediens	Foder Bas		Standard		Special	
	Min	max	Min	Max	Min	Max
Protein	6	–	7	–	9	–
Kolhydrater	35	55	40	60	50	70
Vitamin X	0,5	–	1,0	–	1,2	–

Tabell 6: Minimi och maximinivåer, uppgift 2.1.8.

Dessa ingredienser finns i Göta Lantmäns råvaror vete, råg, korn, havre och majs. Innehållet i respektive råvara anges i tabell 7 (i viktsprocent).

Ingrediens	Vete	Råg	Korn	Havre	Majs
Protein	10	10	6	11	12
Kolhydrater	60	45	40	50	40
Vitamin X	2,0	1,0	0,5	2,2	2,3

Tabell 7: Råvaruinnehåll, uppgift 2.1.8.

Kostnaden för dessa råvaror (per kg) samt tillgänglig mängd (ton) specifieras i tabell 8.
Göta Lantmän önskar minimera råvarukostnaden för produktionen av de önskade fodermängderna. Formulera problemet som ett LP-problem. Använd gärna generella beteckningar. Lös ej!

2.1.9 Den lilla specialiserade säsongsbutiken Julgodis saluför en mångfald av varor, men endast två av dessa har hög omsättning och kräver stort utrymme, nämligen pepparkakor och glögg. Butiken skall söndagen den 10 december planera inköpen och lagerhållningen av dessa två varor för de kommande två veckorna. Butikens problem

Råvara	Kostnad per kg	Tillgång i ton
Vete	1,50	Obegränsat
Råg	1,60	Obegränsat
Korn	1,00	Obegränsat
Havre	1,70	1000
Majs	2,50	500

Tabell 8: Råvarukostnad, uppgift 2.1.8.

är att besluta hur stora kvantiteter av pepparkakor och glögg som skall tas hem från grossisten i början (måndag förmiddag) av vardera av de två veckorna, givet att efterfrågan på pepparkakor och glögg skall tillgodoses och att den totala inköps- och lagerhållningskostnaden skall minimeras.
För tillfället finns 300 burkar pepparkakor och 100 flaskor glögg i lager. Försäljningen förutses bli 2000 respektive 3000 burkar pepparkakor och 500 respektive 1000 flaskor glögg under de kommande två veckorna.
Normalpriserna hos grossisten är 10 kr per burk pepparkakor och 20 kr per flaska glögg. Grossisten vill koncentrera leveranserna till butiken till den första veckan och ger därför för den leveransen 5% rabatt på normalpriserna. De rabatterade priserna gäller dock bara upp till 4000 burkar pepparkakor respektive 1000 flaskor glögg; på överstigande kvantiteter betalas normalpriser. Prissituationen kompliceras också av att butiken fått kännedom om att grossistens normalpriser på pepparkakor och glögg före den andra veckans leveranser kommer att höjas med 4% respektive 2%. Lagerhållningskostnaden från den första veckan till den andra är 0,10 kr per burk pepparkakor och 0,20 kr per flaska glögg.
Butikens möjligheter att utnyttja den första veckans förmånliga inköpspriser begränsas av dess tillgängliga lagringsutrymme. Lagret för pepparkakor och glögg rymmer 15 m^3 varor. Varje pepparkaksburk kräver ett utrymme på 4 dm^3 och varje flaska glögg kräver 1 dm^3.
Formulera butikens beslutsproblem som ett linjärt program.

2.1.10 En hönsfarm med 112 m^2 lokalyta kan under den närmaste 12-veckorsperioden utnyttjas för uppfödning av kycklingar (i enheter om 28), ankor (i enheter om 18) och kalkoner (i enheter om 8). Utrymmes- och arbetskraftsbehovet samt vinsten – exklusive arbetskostnader – som uppkommer vid försäljningen efter 12-veckorsperioden ges i tabell 9.

	Utrymme (m^2/enhet)	Arbetskraftsbehov (h/vecka/enhet)	Vinst exkl. arbetskostn. (kr/enhet)
Kycklingar	1,2	3	1300
Ankor	1	2	860
Kalkoner	0,8	1	440

Tabell 9: Utrymmes- och arbetskraftsbehovet samt vinsten, uppgift 2.1.10.

Uppfödaren har varje vecka tillgång till 200 arbetstimmar till kostnaden 30 kr/h och dessutom 45 övertidstimmar till kostnaden 35 kr/h. Vilken uppfödningsstrategi ska ägaren välja om målet är att maximera nettovinsten (vinst–arbetskostnad) under den aktuella 12-veckorsperioden. Formulera problemet som ett LP-problem. Lös ej!

2.1.11 Ett postkontor kräver olika antal anställda på plats under veckans olika dagar. Antalet som krävs varierar enligt 17, 13, 15, 19, 14, 16 och 11 för perioden måndag–söndag. Enligt fackliga avtal skall varje anställd arbeta fem dagar i sträck och därefter ha två dagar ledigt; till exempel kan en anställd arbeta tisdag–lördag och vara ledig söndag och måndag. Postkontoret önskar uppfylla behovet av personal med enbart heltidsanställda.

a) Formulera en linjär modell för att minimera antalet anställda.

b) Modellen i deluppgift a är kontinuerlig och ger inte säkert en lösning till det verkliga optimeringsproblemet. Varför? Vilken information om det optimala målfunktionsvärdet till det verkliga problemet ger optimum till den kontinuerliga modellen?

2.1.12 (Flermålsoptimering.)
En producent av gödningsmedel önskar finna en optimal produktionsplan för två gödningsmedel. Den första produkten är ett högteknologiskt framställt gödningsmedel med en låg halt av fosfater, medan den andra är en av enklare slag, med en hög fosfathalt. Råvarutillgången och -användningen beskrivs av tabell 10.

	Råvara	1	2	3
Åtgång/ton	Produkt 1	2	1	1
	Produkt 2	1	1	0
Tillgång ton/dag		1500	1200	500

Tabell 10: Åtgång och tillgång, uppgift 2.1.12.

Intäkten vid försäljning av ett ton gödningsmedel är 15 respektive 10 kronor. Producenten, som inte har sett en optimeringsmodell i sitt liv, har *tre* önskemål. Hon önskar att maximera den sammanlagda intäkten. Hon är dessutom intresserad av att maximera sitt företags marknadsandel, dvs av att sälja så mycket gödningsmedel som möjligt. Därutöver vill hon att företaget skall framstå som högteknologiskt, och vill därför maximera försäljningsvolymen av den första produkten.
Vid samtal med en optimeringskonsult blir hon varse att en optimeringsmodell normalt har *en* målfunktion. Konsulten föreslår att använda en s.k. målprogrammeringsansats, och ber därför producenten att ange målsättning för varje målfunktion. För den dagliga intäkten angavs då 13 000 kronor, för den totala försäljningen 1150 ton/dag och för försäljningen av den högteknologiska produkten 400 ton/dag. Konsulten bad dessutom producenten att ange ett mått på "förlusten" per enhets ouppfyllande (understigande) av de olika målsättningarna och fick till svar 0,5, 0,3 respektive 0,2 per enhets negativ avvikelse från målsättningarna. Konsulten kunde därefter sätta upp en LP-modell för att finna en produktionsplan med en minimal totalförlust. Hur såg denna LP-modell ut?

2.1.13 Ett producerande företag har förbundit sig att leverera en viss vara i kvantiteterna $b_1, ..., b_6$ kg under de kommande 6 veckosluten. Produktionskostnaden för företaget är C_1 kronor/kg, förutsatt att man inte producerar mer än K kg under en och samma vecka. För att kunna producera mer än K kg under en och samma vecka måste man betala övertidsersättning, varför kostnaden för produktion utöver K kg kostar C_2 kronor/kg, där $C_2 > C_1$. Till denna högre kostnad kan man producera ytterligare högst 0,4 K kg under veckan.

Företaget kan lagra producerad vara från vecka till vecka. Detta kostar dock p kr per lagrat kg och vecka, och lagret rymmer högst L kg. I början av vecka 1 är lagret tomt, och man vill inte ha något i lager efter vecka 6 (då man fullgjort sina leveranser).

Företaget vill planera sin produktion och lagring under de kommande 6 veckorna på ett sådant sätt att leveransåtaganden uppfylls till lägsta möjliga kostnad. Formulera problemet som ett LP-problem.

2.1.14 (Tentamensuppgift 20020826)

Aktiebolaget Sten & Grus (förkortas S&G) har fått ett kontrakt med Vägverket, enligt vilket de inom en månad skall leverera en viss mängd småflis till två centrallager, där bilar hämtar materialet för att sprida på vägarna under vintern. Den mängd som skall levereras per lager är l_1, l_2 ton, där siffran står för vilket lager som avses. Till sitt förfogande har S&G två grustag där man kan hämta grus och en bergtäkt där man kan hämta sprängsten, samt ett gammalt restlager av flis som ligger på annan ort. I sin anläggning har S&G en sikt och en bergskross. Gruset från grustagen körs genom sikten. För varje ton grus som körs genom sikten produceras a_1 ton småflis, a_2 ton makadam samt a_3 ton sand. För varje ton berg som körs genom krossen produceras k_1 ton småflis, k_2 ton makadam samt k_3 ton sand. Dessutom kan man köra makadam genom krossen varvid den producerar l_1 ton flis samt l_3 ton sand per ton makadam. Sikten har en maximal kapacitet vilket gör att vi kan köra igenom maximalt t_1 ton material på en månad. På samma sätt kan krossen maximalt behandla t_2 ton på den månad vi har till vår förfogande.

Den totala kostnaden för att bryta och köra berg till anläggningen är p_1 kr per ton; motsvarande kostnad för att bryta och transportera grus är p_2, p_3 för de båda grustagen. Makadam och sand är ej värdelöst; de kan säljas för d_2 respektive d_3 kr per ton. Inga transportkostnader uppkommer då kunderna själva hämtar dessa material. Vi antar att vi kan sälja obegränsade mängder makadam och sand. Kostnaden för att transportera flis från anläggningen till lagren är g_1, g_2 kr per ton. S&G har sedan tidigare ett gammalt lager med flis liggande på en annan plats (där man tidigare hade en nu nedlagd anläggning). I detta lager finns q ton flis vilket kan transporteras till vägverkets lager för h_1 respektive h_2 kr per ton.

Formulera en linjärprogrammeringsmodell som hjälper S&G att uppfylla kontraktet till lägsta nettokostnad (efter försäljning av makadam och sand). Vi vill även att ni ritar en bild som visar hur materal flödar genom modellen, där ni även sätter ut era variabler.

Sammanfattning:

l_1, l_2 Mängd flis (i ton) som skall levereras till vägverkets lager.

a_1, a_2, a_3 Ton flis, makadam och sand som produceras av sikten per ton grus in.

k_1,k_2,k_3 Ton flis, makadam och sand som produceras av krossen per ton berg in.

l_1,l_3 Ton flis och sand som produceras av krossen per ton makadam in.

p_1,p_2, p_3 Total kostnad (brytning och transport) för ett ton berg respektive grus från bergtäkt och grustag.

t_1, t_2 Total kapacitet i ton in i sikt respektive kross.

d_2,d_3 Försäljningspris för makadam och sand.

g_1, g_2 Transportkostnad (per ton) för flis från anläggning till Vägverkets lager.

h_1,h_2 Transportkostnad (per ton) för flis från restlager till Vägverkets lager.

q Storlek hos restlager.

2.2 Dualitet

2.2.1 Formulera dualen till nedanstående problem

a)

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min z = & 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & & \\
\text{då} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \geq & -4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & - & 4x_4 & = & 2 \\
 & x_1 & \geq 0 & x_2 & , & x_3 & \text{fria,} & x_4 & \leq & 0
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max z = & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{då} & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\
 & 6x_1 & - & x_2 & = & 4 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

2.2.2 Betrakta nedanstående LP-problem:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max z = & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & = & -4 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & \geq & 1 \\
 & x_1 & \geq 0, & x_2 & \text{fri,} & x_3 & \geq 0, & x_4 & \text{fri} & .
\end{array}$$

a) Transformera problemet så att likhetsbivillkor och ickenegativa variabler erhålls.

b) Teckna dualen till både det transformerade och det ursprungliga problemet samt visa att de är lika.

2.2.3 Lös LP-problemet nedan genom att:

1) Lösa det duala problemet grafiskt.

2) Använda lösningen till det duala problemet till att bestämma icke-basvariablerna i det primala problemet.

3) Lösa ut variablernas värde i det primala problemet.

$$\begin{array}{llcrcrcrcrcl}
\max z = & & & -4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & 8x_5 & & \\
\text{då} & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & = & 3 \\
& x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & - & x_5 & \geq & 2 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

2.2.4 Givet följande problem

$$\begin{array}{rcl}
\min z = & c^T x & \\
\text{då} & Ax & = b \\
l \leq & x & \leq u
\end{array}$$

a) Teckna dualen.

b) Visa att dualen alltid har en tillåten lösning.

c) Vilka slutsatser kan man komma fram till, om primalen har en tillåten lösning?

2.2.5 Problemet nedan har lösts med simplexmetoden.

$$\begin{array}{rcl}
\max x_0 = & c^T x & \\
\text{då} & Ax & \leq b \\
 & x & \geq 0
\end{array}$$

där $c^t = (4, 3, 2), b = (20, 15, 35)^T$ och

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

den resulterande optimala basen är (med $x_4 \ldots x_6$ som slackvariabler) x_1, x_3, x_5. Vi får då basmatrisen och dess invers

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \\ -5/6 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Lös deluppgifterna oberoende av varandra.

a) Ange den primala samt duala optimallösningen till problemet.

b) Ange optimalvärdet på de duala slackvariablerna.

c) Ange basmatrisen som tillhör optimaltablån ovan.

d) För vilka värden på c_2 är den aktuella lösningen fortfarande optimal?

e) För vilka värden på c_1 är den aktuella lösningen fortfarande optimal?

f) För vilka värden på högerledet i bivillkor 1 är den aktuella basen fortfarande optimal?

g) Hur ser den reducerade kostnaden ut om vi inför en ny variabel y med målfunktionskoefficient c_y och bivillkorskoefficienter $(-1, 5, 9)^T$ införs? Hur stor måste c_y vara för att den aktuella lösningen skall bli icke-optimal?

h) Antag att ett nytt bivillkor $5x_1 + 10x_2 + x_3 \leq 15$ tillförs problemet. Bestäm den nya optimallösningen till problemet givet detta nya bivillkor.

2.2.6 För resusrsallokeringsproblemet nedan:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrl}
\max z = & 6x_1 & + & 14x_2 & + & 13x_3 & & & \\
\text{då} & 0.5x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 36 & \text{(Metallbearbetningskapacitet)} \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 60 & \text{(Träbearbetningskapacitet)} \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Har vi fått den optimala basen x_1, x_3. Vi har basmatrisen och dess invers:

$$
B = \begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}
$$

Antag att vi vill addera ett villkor angående inspektion av de tillverkade produkterna.

a) Om lösningen $x = (36, 0, 6)$ till det ursprungliga problemet satisfierar inspektionsvillkoret, är den då nödvändigtvis optimal när inspektionsvillkoret införs i problemet?

b) Använd den duala simplexmetoden för att reoptimera problemet med det nya bivillkoret.

c) Kan denna metod alltid användas för att reoptimera ett LP-problem då man lägger till ett extra bivillkor efter det att problemet har lösts.

2.2.7 Antag att vi har ett primalt problem (P)

$$
\begin{array}{rll}
\max z = & c^T x & \\
\text{då} & Ax & = b \\
 & x & \geq 0
\end{array}
$$

och en optimallösning u^* till det duala problemet

$$\begin{aligned} \min w = \quad & b^T u \\ \text{då} \quad & A^T u \ \geq c \end{aligned}$$

Antag nu att vi formulerar ett nytt primalt problem som är identiskt lika (P) förutom det att bivillkor k har adderats till bivillkor r. Hur påverkas den optimala duallösningen u^*.

2.2.8 Betrakta problemet (P) i n variabler

$$\begin{aligned} \max x_0 = \quad & c^T x + k \\ \text{då} \quad & Ax \quad \leq b \\ & \textstyle\sum_{j=1}^n x_j \ \leq M \\ & x \quad \geq 0 \end{aligned}$$

Formulera dualen till (P) och visa att alla dualt tillåtna lösningar har ett målfunktionsvärde i dualen som är större eller lika med det optimala målfunktionsvärdet i (P).

2.2.9 (Tentamensuppgift 010523)
Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{llccccccccl} \text{minimera} & z = & 1.5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & \\ \text{då} & & x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \geq & 1, \\ & & & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & 0.1, \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

a) **(2p)** Beskriv den polyeder som består av mängden av optimala lösningar genom att lösa det duala problemet grafiskt och använda komplementaritet.

b) **(1p)** Ange samtliga optimala baser till problemet ovan. Antag att vi ersätter målfunktionskoefficienten för x_1 med 1.6. Vad blir då den optimala mängden, och vilka baser är optimala?

2.2.10 (Tentamensuppgift 990827)

a) **(2p)** Betrakta LP-problemet att

(P)

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(x) = c^T x, \\ \text{då} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0^n. \end{aligned}$$

Ange LP-dualen till (P). Ange också optimalitetsvillkoren för (P) med hjälp av denna LP-dual.

b) **(1p)** Ange LP-dualen till följande problem:

$$\begin{array}{rrcrcl}
\text{minimera}\, z = & c_1^T x_1 & + & c_2^T x_2 & & \\
\text{då} & A_{11} x_1 & + & A_{12} x_2 & = & b_1, \\
& A_{21} x_1 & + & A_{22} x_2 & \leq & b_2, \\
& & & A_{32} x_2 & \geq & b_3, \\
& x_1 & & & \leq & \ell_1, \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

Dimensionerna på matriserna A_{ij} och vektorerna c_j, b_i och ℓ_1 antas vara korrekta för att kunna ställa upp problemet.

2.2.11

Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max\, z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & & \\
\text{då} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 500, \\
& 3x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 460, \\
& x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 420, \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

a) **(1p)** Ange dess LP-dual. Utan att lösa vare sig det primala eller det duala problemet, ange ett intervall för det optimala målfunktionsvärdet.

b) **(2p)** Visa, med hjälp av optimalitetsvillkoren för LP, att $y^* = (0, 5/2, 1/2)^{\mathrm{T}}$ är en optimal duallösning.

(Tentamensuppgift 980309)

2.2.12 (Tentamensuppgift 990528)
Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{rl}
v(b) = \max & c^T x, \\
\text{då} & Ax \leq b, \\
& x \geq 0.
\end{array}$$

Antag att problemet har en optimal lösning för högerledsvektorn b. När vi utför känslighetsanalys av optimallösningen och dess målfunktionsvärde för förändringar i vektorn b utnyttjar vi resultatet att skuggpriset för ett bivillkor i (det vill säga för bivillkoret "$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$") är lika med det optimala värdet av dualvariabeln, y_i, för detta bivillkor.

a) **(2p)** Antag att problemet ovan har en *unik* optimal duallösning, y^*. Visa att tekniken beskriven ovan är korrekt, det vill säga att y_i^* är lika med den förändring av v som fås om högerledet ökas med en enhet.

b) **(1p)** Antag att det duala problemet har *multipla* optimala lösningar. (Detta inträffar typiskt när problemet ovan är degenererat i optimum.) är tekniken beskriven ovan fortfarande giltig? Om inte, hur måste den förändras för beräkning av ett korrekt skuggpris?

2.2.13 (Tentamensuppgift 990308)
Lös följande problem på enklaste sätt genom att utnyttja linjär dualitetsteori. Använd *inte* simplexmetoden.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrcl} \max & z & = & 6x_1 & - & 12x_2 & + & 20x_3 & & & & \\ \text{då} & & & 4x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & + & x_4 & \leq & 60 \\ & & & 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & \geq & 20 \\ & & & & & & & & & x_1, x_2, x_4 & \geq & 0 \\ & & & & & & & & & x_3 & \leq & 0 \end{array}$$

2.2.14 (Tentamensuppgift 980819)
Stora M-metoden med en (1) artificiell variabel är en enkel teknik för att snabbt hitta en tillåten baslösning för simplex-metoden, och som undviker lösandet av ett Fas I-problem. För problemet (här är A en $m \times n$-matris)

[P]
$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) := c^{\mathrm{T}}x, \\ \text{då} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0^n, \end{aligned}$$

går det till så att man först finner en godtycklig (och troligen otillåten) baslösning (x_B, x_N), varefter man adderar en och samma artificiella variabel $a \geq 0$ med koefficient -1 på de rader för vilka motsvarande element i $x_B := B^{-1}b$ är negativa. Variabeln a ges en målfunktionskoefficient, M, vars värde är stort nog för att den inte skall kunna ingå i en optimal baslösning till det nya problemet. Pivoteras a in i basen så att den ersätter den mest negativa basvariabeln i x_B blir den nya baslösningen tillåten. Därefter kan vi alltså lösa problemet med simplexmetoden som vanligt.
Vi är nu intresserade av att använda en liknande teknik för den *duala simplexmetoden* (som vi minns som ett sätt att lösa det duala problemet via primala simplexpivoteringar). Er uppgift är att härleda en lika enkel startmetod för denna metod som den vi just har presenterat för den primala simplexmetoden. dvs. beskriva en teknik som enkelt finner en *dualt* tillåten baslösning.
Tips: om man applicerar stora M-metoden på det duala problemet till [P], vilken tolkning kan detta ges i termer av [P] självt?

2.2.15 (Tentamensuppgift 980527)
För ett system av linjära olikheter,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

är ett *surrogatvillkor* ett villkor som bildas genom att man bildar en icke-negativ linjärkombination av bivillkoren, dvs. ett villkor på formen

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i,$$

där $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Betrakta nu ett LP-problem
[P]

$$\begin{array}{rl} \max & f(x) = c^{\mathrm{T}}x, \\ \text{då} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0^n, \end{array}$$

där $x \in \Re^n$, $c \in \Re^n$, $A \in \Re^{m\times n}$ och $b \in \Re^m$. Låt [P] ha en ändlig optimal lösning och f^* vara dess optimala målfunktionsvärde. För en godtycklig icke-negativ vektor β, bilda nu det relaxerade LP-problemet
[P(β)]

$$\begin{array}{rl} \max & f(x) = c^{\mathrm{T}}x, \\ \text{då} & \beta^{\mathrm{T}}Ax \leq \beta^{\mathrm{T}}b, \\ & x \geq 0^n, \end{array}$$

och låt $f^*(\beta)$ vara dess optimala målfunktionsvärde (om det är ändligt).

a) **(1p)** Visa att $f^*(\beta) \geq f^*$ för alla $\beta \geq 0^m$.

b) **(2p)** Vi söker den vektor $\beta \geq 0^m$ som ger det minsta värdet av $f^*(\beta)$. Visa att en sådan vektor ges av en optimal lösning till LP-dualen till [P]. Visa också att med detta val av β, $f^*(\beta) = f^*$ fås.

2.2.16 (Tentamensuppgift 980527)
Betrakta LP-problemet
[P]

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & f(x) = c_1^{\mathrm{T}}x_1 & + & c_2^{\mathrm{T}}x_2, & & \\ \text{då} & A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & \leq & b_1, \\ & A_{21}x_1 & & & \geq & b_2, \\ & & & A_{32}x_2 & = & b_3, \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0, \end{array}$$

där $x_j \in \Re^{n_j}$, $c_j \in \Re^{n_j}$, $A_{ij} \in \Re^{m_i \times n_j}$, och $b_i \in \Re^{m_i}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$.

a) **(2p)** Formulera LP-dualen till [P].

b) **(1p)** Antag att [P] har en begränsad optimallösning, och att det optimala målfunktionsvärdet av [P] är f^*.

Antag nu att värdet av något element i vektorn b_1 ökar från sitt ursprungliga värde, och låt motsvarande LP-problem, [P$_1$], ha ett optimalt målfunktionsvärde f_1^*. Utifrån problemet [P] bildar vi på samma sätt också två andra LP-problem, där värdet hos ett element i b_2 respektive b_3 ökar från sitt ursprungsvärde. Vi kallar dessa [P$_2$] respektive [P$_3$], och deras respektive optimala målfunktionsvärde f_2^* och f_3^*.

Uppgift: utan att anta något ytterligare om problemen [P], [P$_1$], [P$_2$] och [P$_3$] än att de alla har ett begränsat målfunktionsvärde, ange samtliga relationer som säkert alltid gäller mellan f^*, f_1^*, f_2^* och f_3^*.

2.2.17 (Tentamensuppgift 000306)
Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \text{minimera} & z = & 100x_1 & + & 100x_2 & + & 100x_3 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & \geq & 240, \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & \geq & 60, \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

a) **(2p)** Oraklet i Delfi har talat om för Dig att en optimallösning till detta problem är $x_* = (12, 36, 0)^T$. Din uppgift är att verifiera att oraklet talar sanning. *Du får inte lösa LP-problemet från början med simplexmetoden, utan måste utnyttja Dina kunskaper om optimalitet i LP. Om Du av en händelse skulle vilja lösa ett besläktat LP-problem som råkar ha två variabler, så är det tillåtet att lösa detta lilla LP-problem geometriskt.*

b) **(1p)** Bestäm *samtliga* optimala lösningar till LP-problemet ovan. *Du får inte heller här lösa LP-problemet från början med simplexmetoden.*

2.2.18 (Farkas lemma.)
Betrakta följande två system.

$$(A_1) \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (A_2) \begin{cases} u^T b > 0 \\ u^T A \leq 0 \end{cases}$$

(Här är A en $m \times n$-matris och x, u samt b vektorer.)
Farkas lemma säger att exakt ett av systemen (A_1) och (A_2) har en lösning för givna A och b. Använd LP-dualitet för att visa detta.

2.2.19 Lös det linjära problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max z = & 4x_1 & - & x_2 & & & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & \leq & -1 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & -1 \\ & \multicolumn{7}{c}{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0} \end{array}$$

genom att formulera dess duala problem och lösa detta med simplexmetoden.

2.2.20 Betrakta det linjära programmet (P) och dess dual (D).

$$\begin{array}{llrcl} & \max & z = c^T x & & \\ (\text{P}) & \text{då} & Ax & \leq & b \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llrcl} & \min & v = b^T y & & \\ (\text{D}) & \text{då} & A^T y & \geq & c \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

a) Visa svag dualitet, dvs att om $\bar{x}$ är en tillåten lösning till (P) och $\bar{y}$ är en tillåten lösning till (D) så är $c^T \bar{x} \leq b^T \bar{y}$.

b) Visa att om $\bar{x}$ är en tillåten lösning till (P), $\bar{y}$ är en tillåten lösning till (D) och $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ så är $\bar{x}$ och $\bar{y}$ optimala i respektive problem.

c) Visa att om $\bar{x}$ och $\bar{y}$ uppfyller att $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$ och $\bar{x}^T(A^T\bar{y} - c) = 0$ så är $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$.

d) Visa att om $\bar{x}$ är en tillåten lösning till (P), $\bar{y}$ är en tillåten lösning till (D) och $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$, så är $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$ och $\bar{x}^T(A^T\bar{y} - c) = 0$.

2.2.21 Givet det linjära programmet

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax \;=\; b \\ & \;\;x \;\geq\; 0 \end{array}$$

där matrisen $A \in R^{m \times n}$, med $n > m$, har full rang. Antag att problemet har en tillåten lösning och att dess optimala målfunktionsvärde är begränsat.
Visa att det duala problemet har samma optimala målfunktionsvärde (stark dualitet). Beviset skall baseras på att det primala problemet kan lösas med simplexmetoden och utnyttja den optimala partitionering av problemet som simplexmetoden resulterar i. Definiera alla införda beteckningar.

2.2.22 Givet LP-problemet

$$\begin{array}{llrcrcrcrcr} \text{(P)} & \min z = & & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & & \\ & \text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & \multicolumn{9}{c}{x_1, x_3 \leq 0; x_2, x_4 \geq 0.} \end{array}$$

a) Formulera det duala problemet.

b) Lös det grafiskt.

c) Utnyttja komplementaritet för att bestämma optimallösningen till (P).

2.2.23 Betrakta problemet

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \min z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & & & & \\ \text{då} & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & & = & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0. \end{array}$$

Baslösningen där x_2, x_4 och x_5 är basvariabler har basinversen

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Är baslösningen tillåten?

b) Ange tillhörande duala lösning och avgör om den är tillåten.

c) Är baslösningen optimal?

2.2.24 För ett linjärt maximeringsproblem med två $\leq$-villkor (s_1 och s_2 är slackvariabel i respektive villkor) och icke-negativa variabler ger simplexmetoden följande information i optimum:

$$z = 16,\ x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix},\ x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ s_1 \end{pmatrix},\ \bar{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ge dualvariablernas värden.

b) Påverkas optimaliteten om variabel x_2 får målfunktionskoefficient som är $\delta_2 =$ 4 enheter större än den gamla?

c) Om du fick välja att öka tillgången (högerledet) för de två villkoren, vilket villkor skulle du välja? Varför?

d) Antag att en ny aktivitet x_4 föreslås med målfunktionskoefficient $c_4 = 4$ och bivillkorsvektor $a_4 = (1, 2)^T$. Påverkas optimaliteten? Om så är fallet, vad blir den nya lösningen?

2.2.25 Betrakta problemet

$$\begin{array}{llrcrcrcr}
(\mathrm{P}) & \max z = & 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & \\
 & \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 5 \\
 & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

a) Antag att i en viss iteration av simplexalgoritmen har de ursprungliga variablerna följande värden $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Vi vet att

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Bestäm partitioneringen, baslösningen och målfunktionsvärdet samt avgör om motsvarande hörnpunkt är optimal. Om inte, identifiera inkommande och utgående basvariabler.

b) Ange dualen till (P).

c) Avgör med hjälp av LP-dualitet om punkten $x_1 = 1/5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 8/5$ är optimal i (P).

2.2.26 Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & \leq 8 \\ & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 4 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq 6 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Antag att vi har tillgång till en primal tillåten baslösning $\bar{x} = (0,0,4)^T$ och en dual tillåten lösning $\bar{\pi} = (0,1,1)^T$.

a) Starta från lösningen $\bar{x}$ och utför *en* simplex iteration. Nedan anges inversen till startbasmatrisen.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Ange den nya primallösningen. Är denna optimal? Motivera!

c) Ge ett uttryck för alla optimala lösningar i primalen.

2.2.27 Nedanstående problem

$$\begin{array}{rrcl} \min z = & c^T x & & \\ \text{då} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

kan omformuleras enligt

$$\begin{array}{rrcl} \min z = & w & & \\ \text{då} & w - c^T x & = & 0 \\ & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Bestäm det optimala värdet på den dualvariabel som är associerad med det första bivillkoret.

2.2.28

a) Lös nedanstående problem med simplexmetoden.

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max z = & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

b) Teckna det LP-duala problemet.

c) Utnyttja LP-dualitet för att verifiera att den i deluppgift a) beräknade optimallösningen är korrekt. Motivera noga!

d) Betrakta nu det problem som fås om målfunktionen i problemet i deluppgift a) ersätts med

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

där c_1, c_2 och c_3 är parametrar. Utnyttja LP-dualitet för att avgöra för vilka värden på dessa parametrar som den i deluppgift a) funna lösningen är optimal i det nya problemet.

2.2.29 Bestäm det duala problemet till följande linjära styrproblem.

$$\begin{array}{lrcl} \min & \displaystyle\sum_{k=1}^{N}(c_k^T x_k + d_k^T u_k) & & \\ \text{då} & x_{k+1} & = & Ax_k + u_k \\ & x_0 & = & a \\ & u_k & \geq & 0 \end{array}$$

Här är $x_k, u_k \in R^n$ variabla medan c_k, d_k, A, a är konstanter av passande dimensioner.

2.3 Simplex

2.3.1 (Tentamensuppgift 010319)
Betrakta följande LP-problem:

$$\begin{array}{rrcrcl} \text{minimera } z = & cx_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 1, \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1, \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

a) **(2p)** Lös problemet med simplexmetoden (fax I och fas II), givet att konstanten c har värdet $c = -1$.

b) **(1p)** Tag fram det intervall $a \leq c \leq b$ där den erhållna basen i föregående deluppgift är optimal.

Nedan står listat några matrisinverser vilka kan vara till hjälp vid lösandet.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Studera följande bivillkor

$$
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\
x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\
 & & x_2 & \leq & 2 \\
x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Rita upp det tillåtna området.

b) Identifiera alla extrempunkterna och bestäm bas- och icke basvariabler i varje sådan punkt.

c) Antag att man gör en förflyttning från extrempunkten $(4, 0)$ till den nya punkten $(14/3, 2/3)$ i (x_1, x_2)-planet. Specificera vilka variabler som blir inkommande respektive utgående basvariabler.

2.3.3 Studera följande problem

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{minimera}\, z = & 10x_4 & + & 32 & & \\
\text{då} & x_1 & + & 2x_4 & = & 8, \\
 & x_2 & + & 3x_4 & = & 6, \\
 & x_3 & + & 8x_4 & = & 24, \\
 & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & \geq\ 0.
\end{array}
$$

a) Bestäm optimallösningen till problemet

b) Ändra koefficienten för x_4 i målfunktionen till -3. Vad blir optimallösningen

c) Byt tecken på alla x_4 koeficcienter. Vad blir optimallösningen?

2.3.4 Lös uppgifterna a) till g) för nedanstående problem.

$$
\begin{array}{rcl}
\max z = & 9x_2 + x_3 - 2x_5 - x_6 & \\
\text{då} & 5x_2 + 50x_3 + x_4 + x_5 & = 10 \\
 & x_1 - 15x_2 + 2x_3 & = 2 \\
 & x_2 + x_3 + x_5 + x_6 & = 6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0
\end{array}
$$

a) Hitta en startbaslösning, specificera värdet av beslutsvariablerna, samt ange vilka som är basvariabler.

b) Transformera ekvationssystemet till kanonisk form så att simplexalgoritmen kan tillämpas.

c) Är din startbaslösning optimal? Varför?

d) Hur skulle du välja en inkommande variabel?

e) Efter val av inkommande görs val av utgående. Hur görs valet? Varför garanterar denna regel att den nya baslösningen är tillåten? Kan det hända att ingen rad uppfyller regelns kriterier? Om detta inträffar, vad säger detta om det ursprungliga problemet?

f) Tag fram den nya baslösningen.

g) Är lösningen optimal? Varför?

2.3.5 Formulera ett LP-problem för att avgöra om det existerar en tillåten lösning till följande ekvationssystem. LÖS EJ.

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ -2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &\geq 3 \\ 3x_1 - 2x_3 + 4x_4 &= -1 \\ x_1, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

2.3.6 Formulera ett FAS1 LP-problem för att hitta en tillåten lösning till följande system.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq -3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq -1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Visa m.h.a målfunktionen att ingen tillåten lösning existerar (ingen pivotering krävs).

2.3.7 Bestäm en tillåten lösning till systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 12 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

2.3.8 Visa att

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 3 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 9 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 16 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

medför att

$$7x_1 + 5x_2 \quad \leq 53$$

genom att formulera och lösa ett lämpligt LP-problem.

2.3.9 Lös nedanstående problem med simplexmetoden (Båda faserna)

$$\begin{array}{rll} \max z = & 2x_1 + x_2 + x_3 & \\ \text{då} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 & \leq 9 \\ & 2x_2 + x_3 & \geq 4 \\ & x_1 + x_3 & = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

är optimallösningen unik?

2.3.10 Betrakta LP-problemet nedan.

$$\begin{array}{rll} \max z = & -3x_1 + 6x_2 & \\ \text{då} & 5x_1 + 7x_2 & \leq 35 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq 2 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. Finns alternativa optimallösningar? Hur kan detta avgöras efter den sista simplexiterationen?

b) Lös problemet grafiskt och verifiera svaret från a).

2.3.11 Betrakta LP-problemet nedan.

$$\begin{array}{rll} \max z = & x_1 + 3x_2 & \\ \text{då} & x_1 + x_2 & \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & \leq 6 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

a) Bestäm genom grafisk lösning

   1) optimallösningen.

   2) skuggpriserna för de tre bivillkoren

   3) Variationera i målfunktionskoefficienterna (en i taget) som kan göras utan att optimallösningen från uppgift 1) ändras

4) Variationerna i högerledskoefficienter som kan göras så att skuggpriserna från uppgift 2) fortfarande är optimala

b) Besvara samma frågor som ovan givet den optimala basen, basmatrisen samt dess invers.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.12

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max z = & 28x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 & & \\ \text{då} & 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & \leq & 3.5 \\ & 4x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & \geq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

löses med simplex och vi får basen x_2, x_3, x_5 (x_4, x_5, x_6 är slackvariabler). Vi får basmatrisen och dess invers som

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 5/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & -1 & 17/4 \end{bmatrix}$$

OBS lägg märke till tecknen hos olikhetsvillkoren! Lös deluppgifterna nedan oberoende av varandra.

a) Bestäm skuggprisernas värden i optimum.

b) För vilka värden på målfunktionskoefficienten till x_1 är lösningen ovan optimal?

c) För vilka värden på målfunktionskoefficienten till x_3 är lösningen ovan optimal?

2.3.13 Betrakta problemet:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max z = & 5x_1 & + & 6x_2 & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Problemet har lösts med simplexmetoden. Slackvariablerna x_3, x_4 och x_5 har införts i bivillkoren. Vi har den optimala basen x_1, x_2x_5, med basmatris och dess invers som

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

a) För vilka värden på målfunktionskoefficienten för variabel x_1 är den optimala baslösningen oförändrad?

b) För vilka värden på högerledet i bivillkor 2 förblir x_2, x_1 och x_5 optimala basvariabler?

c) En ny variabel x_6 med målfunktionskoefficient $c_6 = 1$ och bivillkorskolumn $a_3 = (1, -1, 3)^T$ införs. Kommer detta att förändra den nuvarande optimallösningen?

d) Ett nytt bivillkor, $2x_1 - 2x_2 \leq 2$ läggs till problemet. Vad blir den nya optimallösningen?

2.3.14 Betrakta problemet:

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcr}
\max z = & x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & & \\
\text{då} & 3x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & & & \leq & 10 \\
 & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 1 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 23 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Om x_5, x_6 och x_7 är slackvariabler och problemet löses med simplexmetoden får vi basen x_3, x_4, x_7 med basmatris och dess invers

$$
B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

a) För vilka värden på målfunktionskoefficienten för variabel x_2 är den optimala baslösningen oförändrad?

b) Samma fast för x_3

c) Antag att vi till det ursprungliga problemet vill lägga till bivillkoret

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 9$$

Vilken blir det modifierade problemets optimallösning?

2.3.15 (Tentamensuppgift 990827)
Betrakta LP-problemet att

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\text{minimera}\, z = & -x_1 & - & 2x_2 & & \\
\text{då} & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7, \\
 & x_1 & & & \leq & 3, \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Vi löser problemet och får den optimala basen x_1, x_2, s_1, med basmatris och dess invers

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 01 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Den optimala lösningen till problemet motsvaras av följande tablå:

Basvar	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
$-z$	1	0	0	0	1	2	13
x_2	0	0	1	0	1/2	1/2	5
x_1	0	1	0	0	0	1	3
s_1	0	0	0	1	−1/2	3/2	3

Följande deluppgifter skall lösas oberoende av varandra, dvs. de förändringar som anges gäller relativt det ursprungliga problemet.
Vid lösning av uppgifterna skall Ni *inte* lösa det förändrade problemet från början med simplexmetoden.

a) **(1p)** Antag att $b_3 = 3$ byts mot $b_3^{\mathrm{NY}} = 4$. Vad händer med den optimala lösningen x^* och dess funktionsvärde z^*? Vad är skuggpriset för bivillkor 3? Förklara kopplingen mellan dessa frågor.

b) **(1p)** Antag att $c_1 = -1$ ersätts med $c_1^{\mathrm{NY}} = 3$. Hur förändras x^*?

c) **(1p)** Antag att en ny icke-negativ aktivitet, x_3, tillkommer, med bidrag $c_3 = -2$ till målfunktionen och bivillkorskoefficienter 2, 0, och 1. Påverkar denna nya aktivitet optimallösningen till problemet?

2.3.16 Motivera varför antalet tillåtna baslösningar är högst 210 till ett LP-problem på formen

$$\begin{aligned} \min x_0 = \quad & c^T x \\ \text{då} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

där c är (6×1), x är (6×1), A är (4×6) och b är (4×1).

2.3.17 (Tentamensuppgift 990827)
Lös följande LP-problem med simplexmetoden (tvåfasmetoden).

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximera } z = & -2x_1 & - & x_2 & & \\ \text{då} & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3, \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 5, \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

2.3.18 (Tentamensuppgift 990528)
Betrakta problemet

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{min} & -\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{då} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 7 \\
 & -\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \geq & 3 \\
 & x_1 & & x_2 & & x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

a) **(2p)** Lös problemet med användande av simplexmetodens båda faser.

b) **(1p)** Antag att problemets andra högerled ersätts med $3 + \epsilon$, där ϵ är ett litet (positivt eller negativt) tal. Hur förändrar detta det optimala målfunktionsvärdet? (Frågan skall besvaras utan att problemet löses om från början!) Förklara hur information om denna förändring kan fås ur lösningen till a).

2.3.19 (Tentamensuppgift 990308)

a) **(2p)** Lös följande LP-problem med simplexmetoden (tvåfasmetoden).

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\min z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{då} & 2x_1 & & & + & x_3 & \geq & 3, \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5, \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

b) **(1p)** Har problemet en unik optimal lösning?

2.3.20 (Tentamensuppgift 980527)
Antag att följande problem har lösts med simplex-metoden:
[P]

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max & f(x) = x_1 & + & 2x_2, & & \\
\text{då} & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7, \\
 & x_1 & & & \leq & 3, \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0,
\end{array}$$

och att vi har fått basen x_1, x_2, s_1 med basmatris och dess invers

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 01 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

a) **(1p)** Vad är skuggpriset för det andra bivillkoret? För vilka högerled är det giltigt?

b) **(1p)** Antag att högerledet i det andra bivillkoret ändras från 7 till 15. Beräkna den resulterande förändringen i det optimala målfunktionsvärdet på lämpligt sätt. (Obs! Lös ej det förändrade problemet från början!)

c) **(1p)** Utgå åter från det ursprungliga problemet och dess optimala tablå, och antag att en ny variabel, x_3, med bivillkorskoefficienter $(1, 1, 1)^T$, tillkommer. Hur stor måste dess målfunktionskoefficient vara för att det optimala målfunktionsvärde skall bli högre än det ursprungliga (13)?

2.3.21 (Tentamensuppgift 000306)
Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{minimera } z = & -4x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & & \\
\text{då} & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 20, \\
& x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 20, \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

a) **(2p)** Lös problemet på *korrekt* sätt med hjälp av simplexmetoden, dvs. med hjälp av både Fas I och Fas II.

b) **(1p)** Beskriv utförligt, *algebraiskt*, de beräkningar som utförs vid den första pivoteringen med avseende på z. *Observera: det är inte alla de beräkningar som utfördes för denna pivotering i a) som behövs!* Ange motsvarande, komplementära, duala punkt som nås efter denna pivotering och visa att den är otillåten i det duala problemet.

2.3.22 (Tentamensuppgift 000524)
Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{rrcrcl}
\text{minimera } z = & 2x_1 & + & x_2, & & \\
\text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 3, \\
& & & x_2 & \leq & 1, \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

a) **(2p)** Lös detta problem med hjälp av Fas I och II av simplexmetoden.

b) **(1p)** Antag att högerledsvektorn $b = (3,1)^T$ ändras till $b(\alpha) := (3,1)^T + \alpha(1,2)^T$, för $\alpha \in \Re$. För vilka värden på $\alpha \in \Re$ existerar en tillåten lösning till det resulterande problemet? Uttryck det optimala målfunktionsvärdet för det parametriskt givna problemet, som en funktion av α. (*Lös, om så önskas, LP-problemen som uppstår i denna deluppgift geometriskt.*)

2.3.23 (Tentamesuppgift 980309)
Lös följande LP-problem med simplexmetoden (tvåfasmetoden).

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max z = & x_1 & - & 3x_2 & & \\
\text{då} & x_1 & - & x_2 & \leq & 2, \\
& x_1 & + & x_2 & \geq & 4, \\
& 2x_1 & - & 2x_2 & \geq & 3, \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

2.3.24 Avgör om det finns någon punkt som satisfierar villkoren

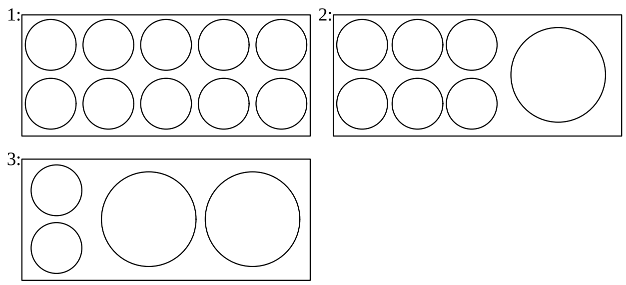
$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 4 \\
2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
-x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 0
\end{array}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Använd standardmetod.

2.3.25 Lös följande maximeringsproblem genom att successivt välja ut basvariabler och lösa motsvarande ekvationssystem. Förändra baserna mellan varje steg enligt inkommande- och utgåendekriterierna i simplexmetoden.

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
\max z = & 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{då} & 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 8 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

2.3.26 En tillverkare av konservburkar erhåller locken till burkarna från rektangulära metallstycken. Storleken på varje stycke är 4,5 × 11,5 l e. Två olika storlekar av lock behövs och dessa har diametern 2 l e respektive 4 l e. En viss dags produktion kräver 24000 lock av den mindre storleken och 6 000 lock av den större storleken. Problemet för tillverkaren är att bestämma hur man skall stansa dessa lock så att det totala antalet använda rektangulära metallstycken minimeras.
I figur 1 framgår hur många lock av de olika typerna som de olika mönstren ger.



Figur 1: Möjliga stansningsmönster i uppgift 2.3.26.

Formulera och lös problemet (med simplexmetoden).

2.3.27 Avgör med hjälp av simplexmetoden om följande ekvationssystem har en icke-negativ lösning.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 & = & 3 \end{cases}$$

2.3.28

a) Lös följande linjära optimeringsproblem med simplexmetoden.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr}
\max z = & 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leq & 10 \\
 & & & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \geq & 5 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

b) Använd linjärprogrammeringsdualitet för att verifiera att resultatet som uppnåtts i deluppgift a) är korrekt.

2.3.29 Avgör med hjälp av fas I i simplexmetoden om någon punkt i R^3 satisfierar nedanstående villkor.

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 \leq -4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

2.3.30 Lös linjärprogrammeringsproblemet

$$\begin{array}{rrcrcl} \max z = & 2x_1 & - & x_2 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

med simplexmetoden.

2.3.31 Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max z = & 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & \\ \text{då} & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Bestäm med hjälp av simplexmetoden en tillåten lösning som har målfunktionsvärdet $z = 7$.

b) Bestäm, om möjligt, ytterligare en tillåten lösning där $z = 7$.

2.3.32 Betrakta linjärprogrammeringsproblemet

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \min z = & 3x_1 & + & 30x_2 & + & 8x_3 & & \\ \text{då} & & & 5x_2 & + & x_3 & \geq & 40 \\ & x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & \geq & 85 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Om slackvariabler x_4 och x_5 införs och problemet löses med simplexmetod fås basen x_1, x_3 med bas och basinvers enligt

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Antag att högerleden i de två bivillkoren ändras till 44 respektive 80. Finn optimum till det förändrade problemet med hjälp av reoptimering, dvs genom att utgå från den givna basen ovan. Beräkna först hur förändringen av de ursprungliga högerleden fortplantar sig till $\hat{b}$, och använd sedan en lämplig metod för att finna en ny optimal bas.

2.3.33 Då det linjära programmet

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
\max z = & 6x_1 & + & 5x_2 & & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (1) \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 & (2) \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

löses med simplexmetoden efter införande av slackvariabler s_1, s_2 fås den optimala basen x_1, x_2 med basmatris och invers

$$
B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \; B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}
$$

a) Ge skuggpriset för bivillkoret (1) och dess giltighetsområde.

b) Utöka problemet med bivillkoret $4x_1 + 3x_2 \leq 16$. Finn samtliga optimallösningar till det utökade problemet genom att reoptimera utifrån tablån som är given ovan.

c) Antag att det ursprungliga problemet utökas med en variabel x_3 med $c_3 = 11$ och $a_3 = (2, 5)^T$. Finn samtliga optimallösningar till det utökade problemet genom att reoptimera utifrån den givna basen.

2.3.34 (Tentamensuppgift 20020826)
Betrakta LP-problemet (OBS! max-problem) att

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\text{maximera} \quad z = & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{då} & x_1 & - & x_2 & \geq & 1, \\
& x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

a) Lös problemet på *korrekt* sätt med hjälp av simplexmetoden, dvs. med hjälp av både Fas I och Fas II.

b) Är den erhållna lösningen unik? Motivera algebraiskt utgående från Din lösning. Grafiska motiveringar accepteras *inte*, då dessa bara fungerar i låga dimensioner.

2.3.35 (Tentamensuppgift 20020529)
Betrakta LP-problemet

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\text{maximera} \quad z = & 2x_1 & + & x_2, & & \\
\text{då} & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 1, \\
& -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Observera att problemet är ett maximeringsproblem.

a) Lös detta problem med hjälp av Fas I och II av simplexmetoden.

b) Givet svaret i uppgift a), vad blir den optimala duala lösningen?

2.3.36 (Tentamensuppgift 20020311)
Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximera} \;\; z = & 2x_1 & + & x_2, & & \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 1, \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Observera att problemet är ett maximeringsproblem.

a) Lös detta problem med hjälp av Fas I och II av simplexmetoden.

b) Givet svaret i uppgift a), vad blir den optimala duala lösningen?

2.4 Övrigt

2.4.1 Ett företag har överkapacitet i lagerutrymme och lagerpersonal. Man funderar nu på att åta sig externa uppdrag omfattande fysisk lagring och plockning. Företaget kan avsätta 150 kvadratmeter lageryta och 10 anställda till detta projekt. 4 möjliga uppdrag finns tillgängliga. Data för dessa framgår av tabell 11

Uppdrag	1	2	3	4
Krav på lageryta	16	15	20	30
Krav på personal	1	9	1	2
Intäkt per enhet	1	9	1	2

Tabell 11: Resursåtgång olika uppdrag uppgift 2.4.1.

Hur många enheter av varje uppdrag skall företaget åta sig för att tjäna maximalt med pengar.

2.4.2 Ett företag skall fastlägga en produktionsplan på kort sikt. Man förfogar över två olika produktionsprocesser. För varje råämne man startar i process 1 får man ut 3 enheter av slutprodukten, medan man för varje råämne som startas i process 2 erhåller 6 enheter av slutprodukten. I processerna krävs ett antal olika råvaror som framgår av tabell 12. Det är tillgången på dessa råvaror som är flaskhalsen i produktionen. Formulera problemet att maximera antalet producerade enheter och lös med simplex-metoden.

2.4.3 Betrakta problemet:

$$\begin{array}{rll} \max z = & -x_1 + 18x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 & \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \leq 3 \\ & -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 & \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{array}$$

Råvara	A	B	C	D
Förbrukning i process 1	2	3	3	4
Förbrukning i process 2	4	3	6	1
Tillgång	24	27	24	20

Tabell 12: Förbrukning och tillgång uppgift2.4.2.

Antag att x_1 och x_2 är basvariabler i problemets optimallösning. Vilka värden har x_1, x_2 och z i denna optimallösning? Finn de största värdena på c_3 och c_4 för vilka antagandet ovan är sant.

2.4.4 Finn alla extrempunkter till det område som definieras av följande olikheter.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2.4.5 Avgör grafiskt huruvida nedanstående LP-problem har en tillåten lösning. Bestäm optimallösningen grafiskt, eller visa att lösning saknas.

a)

$$\begin{array}{lcccccccc} \max & z & = & x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{då} & & & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lcccccccc} \min & z & = & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & & & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_1 & - & x_2 & \geq & -2 \\ & & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

c) Lös uppgift b med målfunktion max $z = x_1 + x_2$.

d)

$$\begin{array}{lcccccccc} \max & z & = & 3x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{då} & & & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 4 \\ & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

2.4.6 Betrakta följande LP-problem

$$
\begin{array}{lrrcrcr}
\max & z & = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{då} & & & 12x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\
& & & -3x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
& & & & & x_2 & \leq & 10 \\
& & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Avbilda bivillkoren geometriskt och markera det tillåtna området. Markera hörnpunkterna i det tillåtna området med dess koordinater.

b) Använd figuren från uppgift a) och bestäm optimallösningen samt det optimala målfunktionsvärdet.

c) Hur stora är slacken i bivillkoren.

d) Bestäm skuggpriserna för vart och ett av bivillkoren.

e) Bestäm variationen i målfunktionskoefficienterna som kan göras (en i taget) utan att optimallösningen förändras.

f) Bestäm variationen i högerledskoefficienterna som kan göras utan att bivillkoren som bestämmer optimallösningen förändras.

2.4.7 Studera följande problem

$$
\begin{array}{lrrcrcrr}
\max & z & = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{då} & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
& & & 4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 9 \\
& & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Rita upp det tillåtna området.

b) Finn två alternativa optimala extrempunkter.

c) Beskriv en oändlig klass av optimallösningar.

2.4.8 Studera följande problem

$$
\begin{array}{lrrcrcrr}
\max & z & = & 3x_1 & + & x_2 & & \\
\text{då} & & - & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\
& & & & & x_2 & \leq & 4 \\
& & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Rita upp det tillåtna området.

b) Verifiera att problemet har en obegränsad lösning.

2.4.9 Betrakta följande olikhetssystem.

$$
\begin{array}{rcrcr}
3x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
-x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Ange en målfunktion samt en problemtyp (max eller min) som ger $x = (1/2, 3/2)$ som optimallösning.

b) Ange en målfunktion samt en problemtyp (max eller min) som ger $y = (0, 1/2, -1/2)$ som dual optimallösning. Motivera!

2.4.10 (Tentamensuppgift 010305)

a) **(2p)** Antag att den optimala lösningen till ett LP-problem *inte* är unik. (Detta upptäcker vi genom att den reducerade kostnaden är 0 för någon eller några icke-basvariabler i en optimal baslösning, och att någon av dessa kan inkluderas i basen med ett värde som är större än noll.) Exempelvis gäller detta i optimallösningen till LP-problemet som modellerar Mexicos stålproduktion, där det finns flera alternativa sätt att transportera råvaror och färdiga produkter till samma kostnad. I detta problem var målet att minimera den totala kostnaden. På grund av att det finns flera optimala lösningar kan vi emellertid välja, bland dem, så att ett annat mål optimeras, till exempel så att den totala transportsträckan minimeras. För ett allmänt LP-problem (formulerat som i uppgiften nedan) med multipla optimallösningar, hur skulle Du göra för att utföra denna “sekundära” optimering? Låt den sekundära målfunktionen vara att minimera $d^T x$.

b) **(1p)** Ange och motivera med ett bevis de nödvändiga och tillräckliga villkoren för att x ska vara en optimallösning i ett LP-problem på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & c^T x, \\ \text{då} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0^n. \end{aligned}$$

2.4.11 (Tentamensuppgift 000823)
Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{llrcrcl} \text{minimera} & z = & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2, \\ & & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

a) **(2p)** Lös problemet på *korrekt* sätt med hjälp av simplexmetoden, dvs. med hjälp av både Fas I och Fas II.

b) **(1p)** När problemet är löst kommer den reducerade kostnaden för slackvariabeln tillhörande bivillkor 1 att anta värdet av skuggpriset för bivillkor 1 (möjligen så när som på tecken). Förklara varför.

2.4.12 (Tentamensuppgift 980819)

Ibland är beslutsfattare omedvetna om begränsningarna hos optimeringsmodeller. Ett exempel på något som en beslutsfattare ofta vill göra är att optimera flera mål samtidigt. Det är därför inte förvånande att ett flertal tekniker inom flermålsoptimering har utvecklats, och vi skall titta på en interaktiv sådan inom linjär optimering. Antag att en beslutsfattare är intresserad av att lösa ett LP-problem med två olika målfunktioner. Vi vet dock att han/hon har en inneboende preferens (som kanske inte kan uttryckas i klartext), vilken vi simulerar genom att generera flera lösningalternativ. Dessa skapas som "kompromisslösningar", där de två funktionerna vägs samman i en konvexkombination, som varieras över alla möjliga värden. Optimallösningarna presenteras sedan för beslutsfattaren, som sedan kan välja bland dem enligt sin preferens.
Betrakta alltså polyedern $X := \{ x \in \Re^n \mid Ax = b; \quad x \geq 0^n \}$, och två målfunktioner, $f^1(x) := (c^1)^{\mathrm{T}}x$ och $f^2(x) := (c^2)^{\mathrm{T}}x$, som skall maximeras över X. Kompromisslösningar fås genom att maximera funktionen $\lambda f^1(x) + (1-\lambda)f^2(x)$, dvs. $[\lambda c^1 + (1-\lambda)c^2]^{\mathrm{T}}x$, över $x \in X$, där λ varieras kontinuerligt inom intervallet $[0, 1]$.

a) **(2p)** Beskriv hur samtliga kompromisslösningar kan genereras med hjälp av simplexmetoden.

   Tips: utnyttja Era kunskaper i känslighetsanalys.

b) **(1p)** Illustrera tekniken på följande data:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad c^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad c^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Notera: här är det tillåtet att använda geometrisk lösning för den som så önskar.

2.4.13 (Tentamensuppgift 980819)
Betrakta LP-problemet (A är en $m \times n$ matris)
[P]
$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) := c^{\mathrm{T}}x, \\ \text{då} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0^n. \end{aligned}$$

Betrakta en tillåten baslösning (x_B, x_N) till [P]. Från denna punkt i $\Re^n$ utgår $n-m$ halvlinjer motsvarande den förflyttning som sker då de $n-m$ icke-basvariablerna i den aktuella basen ökar sina respektive värden från noll. [Om baslösningen (x_B, x_N) är icke-degenererad beskriver dessa halvlinjer precis de $n-m$ kantlinjerna till polyedern som utgår från extrempunkten som motsvaras av (x_B, x_N), och ger alltså en koppling mellan kantlinje (geometri) och icke-basvariabel (algebra); i en degenererad baslösning är inte alla halvlinjer kantlinjer till polyedern, några leder omedelbart ut ur polyedern.] Dessa halvlinjer har riktningarna $p_i \in \Re^n$ ($i = 1, \ldots, n-m$).

a) **(1p)** Visa att det traditionella kriteriet vid valet av den inkommande basvariabeln motsvarar precis att välja den halvlinje som lutar brantast, dvs. att välja det i i $\{1, 2, \ldots, n-m\}$ som ger lägst värde $c^{\mathrm{T}}p_i$.

b) **(2p)** Med ledning av denna geometriska tolkning, ange minst en nackdel med det traditionella kriteriet och föreslå ett alternativt kriterium för valet av den inkommande basvariabeln som eliminerar denna nackdel.

2.4.14 (Tentamensuppgift 980309)

a) **(1p)** Formulera och bevisa svaga dualsatsen för linjärprogrammering.

b) **(1p)** Beskriv de ekvationssystem som löses i en iteration av den reviderade simplexmetoden, och ange iterationens totala komplexitet.

c) **(1p)** Visa att ekvationssystemet

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \;=\; b_i, \qquad i = 1, \ldots, m$$

är ekvivalent med de $m+1$ olikhetsvillkoren

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \;&\leq\; b_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \;&\geq\; \sum_{i=1}^{m} b_i. \end{aligned}$$

2.4.15

Betrakta följande approximationsproblem. Givet är en mängd T i R^k, samt kontinuerliga funktioner f och f_j, $j = 1, ..., n$, på T, vill man approximera f så bra som möjligt med en linjärkombination av funktionerna f_j. Man vill alltså lösa optimeringsproblemet

$$(P) \qquad \min_x \max_{t \in T} |f(t) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t)|,$$

där $x = (x_1, .., x_n)^T$. För numerisk lösning av (P) väljer man ut ett antal element, $t_1, ..., t_m$, i T och löser approximationen

$$(P') \qquad \min_x \max_{i=1,\ldots,m} |f(t_i) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t_i)|.$$

a) Vad kan man dra för slutsats om (P):s optimalvärde från en optimallösning till (P')?

b) (P') har en komplex struktur, med en inre maximering och en yttre minimering. Formulera om (P') som ett optimeringsproblem på traditionell form.

c) Teckna det duala problemet till det i b) erhållna problemet och förenkla detta så långt som möjligt.

d) Diskutera hur man kan använda kolumngenerering för att generera ytterligare ett element i T, säg t_{m+1}, som kan utnyttjas för att beräkna en förbättrad approximation. Tolka kolumngenereringen med anseende på problemet (P).

2.4.16 När man löser ett optimeringsproblem (manuellt) kan ett slarvfel leda till mer eller mindre allvarliga följdfel. Ett exempel på ett allvarligt följdfel är att man hamnar i en punkt som är otillåten i en metod som alltid kräver tillåtenhet. Avgör för vart och ett av nedanstående fall om felet *kan* leda till att en otillåten punkt uppnås. Motivera!

a) Felaktig steglängsbestämning i brantastelutningsmetoden.

b) Fel val av inkommande variabel i simplexmetoden (fas II).

c) Fel val av utgående variabel i simplexmetoden (fas II).

d) Infört en slackvariabel i ett likhetsvillkor vid lösning med simplexmetoden.

e) Löst LP-problemet felaktigt i Frank-Wolfe metoden.

2.4.17 Betrakta följande LP-problem. Härled LP-dualen med hjälp av Lagrangedualitet.

a)

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ \text{då} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & c_1^T x_1 & + & c_2^T x_2 & & \\ \text{då} & A_{11} x_1 & + & A_{12} x_2 & \geq & b_1 \\ & A_{21} x_1 & + & A_{22} x_2 & = & b_2 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \end{array}$$

2.4.18 Visa att

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & \geq & 9 \\ -x_1 & + & 4x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x_1 + 5x_2 \leq 53$$

genom att formulera och lösa ett lämpligt LP-problem.

2.4.19 Betrakta problemet

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\min z = & x_1 & - & x_2 & & \\
\text{då} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 5 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\
 & -x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Nedan ges tio punkter i R^2.

$(-3,0)$; $(0,3)$; $(1,4)$; $(2,2)$; $(6.5,1.5)$; $(8,0)$; $(4,-1)$; $(0,0)$; $(1,1)$; $(4,4)$

a) Vilken/vilka punkter är tillåtna lösningar till problemet?
b) Vilken/vilka punkter kan definieras av en baslösning?
c) Vilken/vilka punkter kan definieras av en tillåten baslösning?
d) Vilken/vilka punkter kan definieras av en degenererad baslösning?
e) Vilken/vilka punkter är optimala till problemet ovan?

2.4.20 Ett företag tillverkar 3 olika sorters bildäck. Diagonaldäcken ger 600 kr i vinst per däck, radialdäcken 400 kr och stålradialdäcken 800 kr. Varje däcksort passerar 3 tillverkningssteg i produktionsprocessen. Kapaciteten i dessa tillverkningssteg uttryckt i produktionstid per dag ges i tabell 13.

Process	Antal timmar
Blandning	12
Formning	9
Montering	16

Tabell 13: Tillverkningsstegens kapaciteter i uppgift 2.4.20.

Tiden som krävs i varje tillverkningssteg för att tillverka 100 däck av varje sort ges i tabell 14.

	Antal timmar per 100 däck		
Däck	Blandning	Formning	Montering
Diagonal	2	3	2
Radial	2	2	1
Stålradial	2	1	3

Tabell 14: Tiden i respektive tillverkningssteg, uppgift 2.4.20.

Bestäm den optimala produktmixen för varje dags produktion under antagandet att allt som tillverkas kan säljas.

2.4.21 Formulera problemet

$$\begin{array}{rrcrcl} \max\limits_{x_1,x_2} & \{ \min\{x_1+x_2 \; ; \; 2x_1-x_2\} \} \\ \text{då} & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

som ett ekvivalent LP-problem.

2.4.22

a) Avgör på *lämpligt* sätt om det existerar en tillåten lösning till nedanstående system.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ x_1 & & & + & x_3 & \leq & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \geq & 2 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

b) Om en ursprunglig (dvs icke-artificiell) variabel har en positiv reducerad kostnad i en icke-degenererad optimalbas till ett fas I problem så kommer den att vara lika med noll i varje tillåten lösning till det ursprungliga systemet av bivillkor. Förklara varför så är fallet!

2.4.23

Inom vissa optimeringstillämpningar är det av intresse att avgöra huruvida ett givet bivillkor (t.ex. en resursbegränsning) är redundant eller ej, dvs om bivillkoret begränsar det tillåtna området eller om det kan strykas utan att det tillåtna området förändras.
Om det tillåtna området beskrivs av linjära bivillkor så kan problemet att avgöra om ett *givet* bivillkor är redundant eller ej formuleras och lösas som ett linjärt program. Betrakta till exempel bivillkorssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 5x_1 & + & 4x_2 & \leq & 35 & \quad (0) \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 3 & \quad (1) \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 & \quad (2) \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 11 & \quad (3) \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0. & \quad (4) \end{array} \right.$$

Formulera ett linjärt maximeringsproblem som kan användas för att avgöra om bivillkoret (0) är redundant, dvs om det gäller att *varje* punkt i R^2 som uppfyller restriktionerna (1) - (4) *också* uppfyller bivillkoret (0). Lös det linjära programmet med simplexmetoden och avgör huruvida redundans föreligger eller ej. (Som en *kontroll* av resultatet kan bivillkorssystemet lämpligen studeras grafiskt.)

2.4.24

Givet problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min z = & -x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 6 \quad (1) \\
& 3x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 6 \\
& -x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 2 \\
& & & & & x_3 & - & x_4 & \leq & 2 \\
& & & & & x_3 & + & x_4 & \leq & 3 \\
& & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

Lagrangerelaxera det övergripande villkoret (1) med multiplikatorn y. Formulera det Lagrangeduala problemet och bestäm den duala funktionens värde för $y = 2$. Det relaxerade problemet löses lättast grafiskt. Inom vilka gränser ligger det optimala målfunktionsvärdet för det givna problemet?

2.4.25

Betrakta det linjära programmet

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max z = & 400x_1 & + & 200x_2 & + & 250x_3 & & \\
\text{då} & 6x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 2000 \\
& 8x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 3000 \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 625 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

Avgör utan att använda simplexmetoden om lösningen $x^* = (187\frac{1}{2}, 437\frac{1}{2}, 0)^T$ är optimal.

2.4.26 Givet LP-problemet

$$\begin{array}{lrll}
\text{(P)} & z^* = \min & c^T x & \\
& \text{då} & Ax & \leq b \\
& & x & \geq 0
\end{array}$$

Antag att (P) modifieras och att det modifierade problemet ger ett optimalt målfunktionsvärde z^*_{NY}. Ange relationen ($\leq, \geq, =$,ingen) mellan z^* och z^*_{NY} för nedanstående modifieringar av (P):

a) ytterligare ett bivillkor tillkommer

b) slackvariabler införs i bivillkoren $Ax \leq b$

c) ytterligare en icke-negativ variabel införs

d) man byter tecken på alla målfunktionskoefficienter

e) villkoren $x \geq 0$ utgår

f) man ersätter $x \geq 0$ med $x \geq 1$ (ett vektorn).

(Om en tillåten lösning till (P) *ej* existerar så defineras $z^*_{NY} = +\infty$.)

2.4.27 Antag att det linjära programmet

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

har en tillåten lösning och begränsat optimum för varje $b \in R^m$, och betrakta optimalvärdesfunktionen $v : R^m \to R$ med värdet

$$v(b) = \begin{array}{rl} \min & c^T x \\ \text{då} & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

a) Visa att v är styckvis linjär.

b) Visa att v är konvex på R^m.

2.4.28 Givet två mängder i R^n:

$$X_1 = \{x \in R^n | a_i^T x \leq b_i \ , \ i = 1, ..., m_1\}$$

och

$$X_2 = \{x \in R^n | d_i^T x \geq e_i \ , \ i = 1, ..., m_2\}$$

där $a_i, d_i \in R^n$, $b_i \in R_+$, och $e_i \in R_+$, $i = 1, 2, ..$ är givna indata. Formulera ett optimeringsproblem som avgör om $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

2.4.29 Betrakta följande LP-problem, där $x \in R^n$.

$$\begin{array}{rcl} z(c) = & \min c^T x & \\ Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Antag att problemet har en tillåten lösning och, för enkelhets skull, att det har begränsat optimum för varje val av c.

a) Visa att funktionen $z : R^n \to R$ är konkav.

b) Antag att x^* är en optimallösning för $c = c^1$ och $c = c^2$. Visa att x^* är optimal för alla $c = \lambda c^1 + (1 - \lambda)c^2, 0 \leq \lambda \leq 1$.

2.4.30 Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \min z = & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 10 \\ & x_1 & & & - & x_3 & - & 2x_4 & \geq & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Givet att x_1 och x_5 är optimala basvariabler (x_5 och x_6 är slackvariabel i respektive bivillkor)

a) För vilka värden på målfunktionskoefficienten till variabeln x_1 förblir x_1 och x_5 optimala basvariabler?

b) Kommer x_1 och x_5 att vara optimala basvariabler om problemet löses med högerledsvektorn $b = (3, 1)^T$?

c) Skulle en ny icke-negativ variabel x_7 påverka optimallösningen om $c_7 = 2$ och $a_7^T = (-1, 1)$?

2.4.31 Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcrl} \min z = & -x_1 & + & x_2 & & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & 5x_2 & \geq & 10 & (1) \\ & 4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 12 & (2) \\ & 2x_1 & & & \leq & 3 & (3) \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Besvara nedanstående frågor med hjälp av grafisk lösning.

a) Hur stort är skuggpriset för bivillkor (3) i optimum?

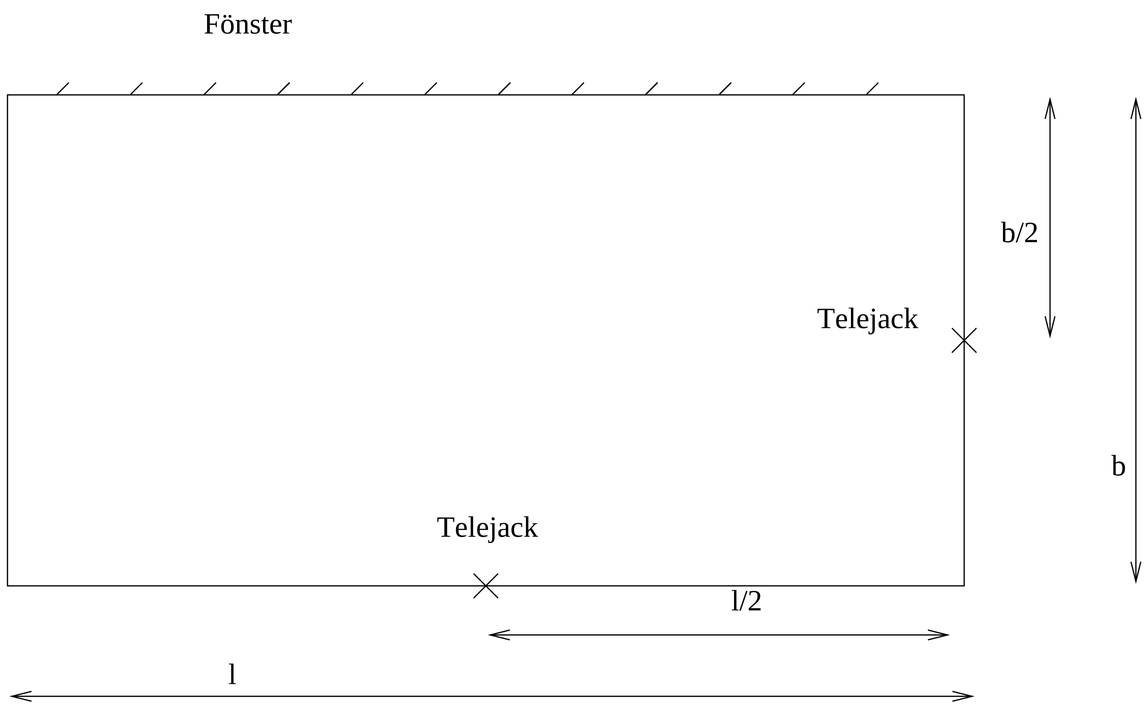
b) För vilka värden på högerledet i bivillkor (1) är skuggpriset för villkoret oförändrat i optimum.

c) För vilka värden på målfunktionskoefficienten framför variabeln x_1, erhålles samma optimallösning?

3 Icke-linjär optimering

3.1 Modellering

3.1.1 (Tentamensuppgift 010821)
Reklambyrån ZAP (Zetterström, Anderson och Petterson) skall inreda sitt nya kontor med en öppen planlösning. Den nya lokalen består av ett fyrkantigt rum som är l meter långt och b meter brett. Lite förenklat kan vi anta att det utrymme varje arbetsplats kräver är en cirkel med diametern d och arbetsplatserna måste placeras så att de inte överlappar. Dessutom skall varje arbetsplats anslutas till telenätet i en av två kopplingspunkter. Då de tre telefonerna har en begränsad sladdlängd av $a_i, i = 1 \ldots 3$, meter måste arbetsplatserna placeras i närheten av telejacken (alla firmans pengar gick till lokalen så de kan inte köpa mera kabel). För enkelhets skull antar vi att telefonen placeras i arbetsplatsens mitt. Ett av kontorets långväggar är ett stort panoramafönster, och alla de tre delägarna vill sitta så nära fönstret som möjligt. De tre delägarna bestämmer sig därför för att försöka minimera avståndet till fönstret för den arbetsplats som har den sämsta placeringen.
Formulera problemet att placera de tre arbetsplatserna så att det maximala avståndet till fönstret minimeras, under uppfyllande av samtliga bivillkor.



Figur 2: Bild på kontor

3.1.2 (Tentamensuppgift 000528)

En maskinist reducerar överflödig metall från en rund maskindel genom att låta 42 cm av maskindelens längd passera ett skärverktyg i en svarv. För en svarv som roterar med N varv per minut och med ett verktyg som avancerar med hastigheten f cm per varv har man empiriskt beräknat verktygets livslängd till

$$L(N, f) = \left(\frac{5}{N \cdot f^{0.60}}\right)^{6.667}$$

minuter. Varje gång ett verktyg blir utslitet måste ett nytt installeras, vilket tar 6 minuter. Ingenjörer i verkstadsföretaget vill bestämma en maskinmässig tillverkningsplan som minimerar den totala kostnaden, då en timmes maskinisttid kostar 520 kronor, och ett verktyg kostar 870 kronor. Rotationshastigheten måste vara mellan 200 och 600 varv per minut och hastigheten hos skärverktyget mellan 0.001 och 0.005 cm per varv.

a) **(2p)** Beskriv optimeringsproblemet med hjälp av en olinjär optimeringsmodell.

b) **(1p)** Uppfyller den tillåtna planen $(N, f) := (200, 0.001)$ KKT-villkoren?

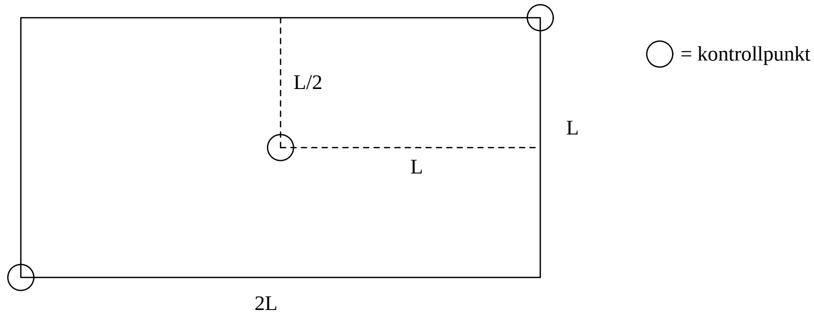
3.1.3 Ett företag vill anlita en optimerare för att göra en produktionsplan som minimerar kostnaderna för tillverkning och lagerhållning av två specialprodukter. Produktionsplanen skall tillgodose kundernas efterfrågan på 10, 12, 20 respektive 15 enheter av produkt 1 de fyra nästkommande veckorna, samt 20, 24, 40 respektive 30 enheter av produkt 2. I början av period ett finns 4 respektive 8 enheter i lager av de båda produkterna.
Tillverkningstiden är 0,9 timmar/enhet för produkt 1 och 0,8 timmar/enhet för produkt 2. Den tillgängliga kapaciteten i produktionsavdelningen är 40 timmar per vecka. Varje vecka finns det möjlighet att använda upp till 4 timmars övertid till en kostnad av 250 kr/timme. Tillverkningskostnaden varje vecka (i kr) är en funktion av den använda tillverkningstiden enligt:

$$100P + 600\left(\frac{P}{40}\right)^4$$

där P = total tillverkningstid i veckan för de båda produkterna.
Anledningen till detta utseende på kostnaden är att det uppstår trängsel och köer bland jobben i avdelningen när man närmar sig kapacitetsutnyttjandet 40 timmar.
Lagerhållningskostnaderna är 15 respektive 14 kr per enhet och vecka.
Formulera företagets optimeringsproblem.

3.1.4 I ett rum skall två lampor placeras ut så att man får en intensitet på minst T (w/m^2) i tre kontrollpunkter (se figur 3).
Varje lampa kan ha en effekt (watt) som är högst M (watt). Eftersom effekten kostar pengar (kostnaden är direkt proportionell mot effekten) vill man minimera effektåtgången (och därmed kostnaden). Intensiteten på avståndet l från en lampa kan beräknas mha formeln

$$P_{belysning} = \frac{k}{l^2} P_{lampa}$$



Figur 3: Kontrollpunkterna i rummet i uppgift 3.1.4.

där k är en konstant och P_{lampa} effekten på lampan. Intensiteterna från lamporna adderas till varandra.
Formulera problemet att under givna förutsättningar minimera totala kostnaden för att belysa rummet som ett optimeringsproblem. Är problemet konvext?

3.1.5 Lastalätt AB skall bestämma var man skall placera en ny lagerlokal. Positionerna (koordinaterna i km) för deras fyra kunder och antalet varusändningar per år till varje kund ges i tabell 15. Lastalätt AB vill placera lagret så att man minimerar det totala avståndet företagets lastbil måste köra från lagret till kunderna varje år. (För enkelhets skull räknar man med fågelvägsavstånd.)

Kund	x-koordinat	y-koordinat	Antal sändningar
1	5	10	200
2	10	5	150
3	0	12	200
4	12	0	300

Tabell 15: Kunddata för Lastalätt AB, uppgift 3.1.5.

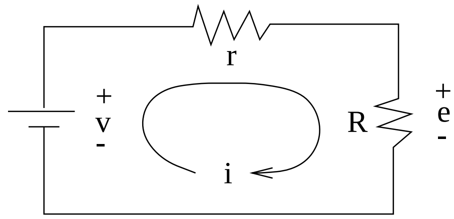
a) Formulera ett optimeringsproblem som finner den bästa placeringen.

b) Ett standardprogram ger lösningen att man skall placera lagret i punkten $x = 9,31$ och $y = 5,03$. Den totala tillryggalagda sträckan blir då 5456,54 km per år. Rita in denna placering tillsammans med kunderna geografiskt. Denna placering är ett lokalt optimum. Är den säkert även ett globalt optimum?

3.1.6

Kretsschemat i figur 4 beskriver en spänningskälla kopplad till en yttre last. Spänningskällan ger v Volt och har en inre resistans på r Ohm. Den yttre lasten är på R Ohm och spänningen över denna last betecknas med e. Strömmen i kretsen är i Ampere. Notera att e och i beror av storleken på den yttre lasten, dvs av R.

a) Antag att vi vill finna det värde på R som maximerar effekten som utvecklas över den yttre lasten. Formulera detta problem som ett endimensionellt icke-linjärt program.



Figur 4: Kretsschema uppgift 3.1.6.

b) Gör en noggrann studie av målfunktionen och bestäm den optimala yttre lasten.

3.1.7 Då de årliga studentmästerskapen i gyttjebrottning skall anordnas så har det fallit på din lott att ansvara för leveransen av de 10 m^3 gyttja som behövs. På grund av din något begränsade budget har du beslutat dig för att anlita ett cykelbud för transport av gyttjan. Då cykelbudet inte har någon lämplig förvaringslåda för gyttjan måste du stå för byggkostnaden för en sådan. Budets kärra, på vilken lådan naturligtvis skall få plats, är 2 m lång och 1.5 m bred. Cyklisten vill inte frakta en låda som är högre än 1 m. Till lådans sidor och lock används ett byggnadsmaterial som kostar 10 kr/m^2. Tillgången på detta material är begränsad till 8 m^2. Till bottenplattan används ett speciellt material som kostar 25 kr/m^2. Dessutom säger cykelbudet att han inte hinner fler än 10 vändor, dvs lådan måste rymma minst 1 m^3 gyttja. För att inte få för hög tyngdpunkt skall höjden på lådan vara högst 1/10 av bottenplattans omkrets. Lådan behöver också förstärkas med ett krysstag som fästs på undersidan. Detta byggs av virke som du har 4 m av. (Lådans höjd påverkas försumbart av krysstaget.)

a) Formulera problemet att minimera byggkostnaden som ett icke-linjärt program.

b) Visa att den erhållna målfunktionen *inte* är konvex för samtliga icke-negativa variabelvärden.

3.1.8 Vi har 1 Mkr som kan investeras i två olika värdepapper (pengarna kan även hållas i madrassen). Genom noggranna studier av rörelser på börsen, utdelningar, framtidsutsikter mm har vi funnit att en satsad krona i respektive värdepapper kan förväntas vara värd 2 respektive 1,5 kr efter en viss tidsrymd. Denna uppskattning har en kovariansmatris Q. Vi kräver en minsta förväntad återbäring på 1,2 Mkr men investerar i övrigt så att vi minimerar riskmomentet (variansen, mätt som $x^T Qx$). Formulera problemet som ett optimeringsproblem där

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

3.2 Descent

3.2.1 Betrakta funktionen

$$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 10$$

Avgör om riktningen $d = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ är en avtaganderiktning (descentriktning) i punkten $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.2.2 (Tentamensuppgift 990827)
Betrakta problemet att

$$\underset{x \in \Re^n}{\text{minimera}} \quad f(x),$$

där f är två gånger kontinuerligt differentierbar.
En vektor $p \in \Re^n$ sägs beskriva en riktning med *negativ kurvatur* för f i x om $p^T \nabla^2 f(x) p < 0$ gäller.

a) **(1p)** Visa att en sådan riktning existerar om och endast om matrisen $\nabla^2 f(x)$ har minst ett negativt egenvärde.

b) **(1p)** Visa att om en riktning med negativ kurvatur existerar så existerar också en sådan riktning som samtidigt är en descentriktning till f från x.

c) **(1p)** Antag att vi löser problemet ovan med någon descentmetod (t.ex. brantaste lutningsmetoden), och att vi är intresserade av att finna en stationär punkt x^* som uppfyller andra ordningens nödvändiga villkor, dvs. en punkt x^* som uppfyller

$$\nabla f(x^*) = 0^n \qquad \text{och} \qquad p^T \nabla^2 f(x^*) p \geq 0, \ \forall p \in \Re^n. \tag{1}$$

Beskriv hur metoden som vi använder kan enkelt modifieras för att se till att vi uppfyller (1).

3.2.3 Betrakta funktionen

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 10.$$

Avgör om $d = (2, -1)^T$ är en *descentriktning* i punkten $x = (1, 1)^T$.

3.2.4 En kontinuerligt deriverbar funktion $f(x_1, x_2)$ har lokalt maximum i origo under bivillkoren $x_1 - 2x_2 \geq 0$ och $3x_1 - x_2 \geq 0$. Ge samtliga möjliga gradienter till $f(x_1, x_2)$ i origo. Illustrera grafiskt!

3.2.5 Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & f(x_1, x_2) = (x_1 - 11)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \\ \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 17 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Teckna matematiskt de tillåtna riktningarna i (den tillåtna) punkten $\bar{x} = (8,1)^T$.

b) Teckna samtliga descent-riktningar i punkten $\bar{x}$.

c) Visa utifrån resultaten i deluppgifterna a) och b) att den studerade punkten inte är optimal. Ge en grafisk illustration av motiveringen.

d) Finn en brantaste tillåten descent-riktning i punkten $\bar{x}$. Illustrera resultatet grafiskt.

e) Studera nu istället punkten $\hat{x} = (6,5)^T$. Teckna de tillåtna riktningarna och samtliga descent-riktningar, samt visa att punkten $\hat{x}$ är ett lokalt minimum. Illustrera grafiskt. Är punkten $\hat{x}$ även ett globalt minimum? Varför (inte)?

3.2.6 Betrakta problemet

$$\max f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_3.$$

a) Visa att riktningen $d = (1,0,1)^T$ från punkten $x = (1,1,1)^T$ ger ascent.

b) Bestäm optimal steglängd.

3.2.7 (Tentamensuppgift 000306) (Obegränsad optimering)
Antag att Du vill lösa det obegränsade optimeringsproblemet att

$$\underset{x \in \Re^n}{\text{minimera}}\ f(x),$$

där f är en två gånger kontinuerligt differentierbar funktion. Du är intresserad av att lösa problemet med hjälp av Newtons metod (med linjesökningar).

a) **(1p)** I en given iteration k får du felutskriften "Steglängden är noll". Vilken/vilka möjliga orsaker kan det finnas till detta?

b) **(1p)** I en given iteration k får du felutskriften "Sökriktning saknas". Vilken/vilka möjliga orsaker kan det finnas till detta?

c) **(1p)** Beskriv minst ett sätt att modifiera Newtons metod så att ingen felutskrift av de typer som beskrivs i a) och b) kan förekomma.

3.2.8 (Tentamensuppgift 20020826)

a) Betrakta optimeringsproblemet att

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimera}}\ f(x) = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) + (1+a)x_1x_2 - (x_1 + x_2) + b, \qquad (1)$$

där a och b är reella parametrar.

Finn alla möjliga värden på a och b sådana att problemet (1) har en unik global optimallösning. Ange den också (i termer av värdena på parametrarna).

b) Betrakta problemet att

$$\underset{x \in \Re}{\text{minimera}}\; f(x) = x^{\frac{4}{3}} \quad \left(= \sqrt[3]{x^4}\right), \tag{2}$$

som har $x^* = 0$ som sin unika globala optimala lösning.

Beskriv hur Newtons metod (med en konstant steglängd 1) ser ut för problem i en variabel och applicera den på detta problem. Visa att algoritmen divergerar oavsett valet av startpunkt x_0, så länge $x_0 \neq 0$. Förklara varför detta händer.

c) I numeriska implementeringar av optimeringsalgoritmer, beroende på olika typer av numeriska fel, kommer beräkningen av gradienten till funktionen $f : \Re^n \mapsto \Re$ i $x \in \Re^n$ vanligen resultera i $(I + \mathcal{E}(x))\nabla f(x)$, där $\nabla f(x)$ är det korrekta värdet och $\mathcal{E}(x)$ är en matris av feltermer. (Både I och $\mathcal{E}(x)$ är $n \times n$-matriser.)

Ange villkor på matrisen $\mathcal{E}(x)$ som medför att vi kan garantera att riktningen $-(I + \mathcal{E}(x))\nabla f(x)$ är en descentriktning i en punkt x där $\nabla f(x) \neq 0^n$.

Observera: det villkor Ni ger skall inte innehålla värdet av $\nabla f(x)$, eftersom villkoret inte har ett sådant beroende.

3.3 Descentmetoder

3.3.1 Använd taylorutvecklingen för en funktion av flera variabler för att härleda brantaste lutningsriktningen.

3.3.2 Kan optimum till problemet $\min f(x) = (x_1 - 2)^2 + 5(x_2 + 6)^2$ erhållas efter endast en iteration med brantaste lutningsmetoden om man utför en variablesubstitution och startar i origo. Motivera och utför en iteration.

3.3.3 Betrakta problemet

$$\min f(x) = (2x_1^2 - x_2)^2 + 3x_1^2 - x_2$$

a) Utför en iteration med brantaste lutningsmetoden. Starta i $x^{(0)} = (1/2, 5/4)$.

b) Är funktionen konvex i en liten omgivning kring lösningspunkten $x^{(1)}$? Motivera.

c) Kommer metoden att konvergera mot ett globalt optimum? Motivera.

3.3.4 Minimera $c(x) = (x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2$ Starta sökningen i origo, genomför två iterationer med

a) brantaste lutningsmetoden

b) Newtons modifierade metod

3.3.5 Kan punktföljden

	x_1	x_2
$x^{(0)}$	1	1
$x^{(1)}$	1/2	1
$x^{(2)}$	1/2	5/4
$x^{(3)}$	3/8	5/4

härröra från användandet av brantaste lutningsmetoden med optimal steglängd på en funktion vars gradient är

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4 - 4x_1 - 2x_2 \\ 6 - 2x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$$

3.3.6

a) Utför en iteration av brantaste lutningsmetoden för problemet

$$\min f(x,y) = x^2 - 2xy + 4y^2 + x - 3y - 7$$

Starta i punkten $(1,1)$.

b) När en kvadratisk konvex funktion minimeras är den optimala steglängden till problemet

$$\min_{t \geq 0} f(x^{(k)} + td^{(k)})$$

lika med

$$t_k = -\frac{d^{(k)^T} \nabla f(x^{(k)})}{d^{(k)^T} \nabla^2 f(x^{(k)}) d^{(k)}}$$

visa detta.

3.3.7 Härled sökriktningen i Newtons modifierade metod.

3.3.8 Lös problemet $\min f(x) = x_1^2 - 6x_1 + 2x_2^2 - 8x_2$ med användande av

a) brantaste lutningsmetoden (utför högst två iterationer). Starta i origo.

b) Newtons modifierade gradientmetod (utför högst två iterationer). Starta i $x = (3,0)$. Vad kan man säga om den uppnådda punkten?

3.3.9 Betrakta problemet

$$\max f(x) = -x_1^2 + 2x_1 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_3$$

a) Avgör om riktningen $d = (1,0,1)$ från punkten $x = (1,1,1)$ är en ascentriktning. Motivera.

b) Funktionen ovan är konkav. Vad händer om man söker minimum till denna med newtons modifierade metod. Motivera.

3.3.10 Lös problemet

$$\min f(x) = -\ln(x_1) + 0.5x_1^2 + (x_2 - 1)^2, x1 > 0$$

m.h.a Newtons modifierade metod, med start i $(2, 1)$. Är punkten ett globalt optimum?

3.3.11 (Tentamensuppgift 990528)
Betrakta problemet att minimera funktionen f över $\Re^2$, där

$$f(x) := (x_1 + 2x_2 - 3)^2 + (x_1 - 2)^2.$$

a) **(2p)** Utför en iteration med brantaste lutningsmetoden, med start i $x_0 = (0, 0)^T$. I den uppnådda punkten, x_1, ange vilka riktningar som är avtagande. är x_1 en optimal lösning till problemet? Varför/varför inte?

b) **(1p)** Utför en iteration med Newtons metod (inklusive linjesökning), med start i $x_0 = (0, 0)^T$. I den uppnådda punkten, x_1, ange vilka riktningar som är avtagande. är x_1 en optimal lösning till problemet? Varför/varför inte?

3.3.12 (Tentamensuppgift 990308)
Betrakta följande system av linjära ekvationer:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Detta system är överbestämt och saknar lösning.

a) **(1p)** Formulera ett obegränsat optimeringsproblem för att bestämma en lösning som minimerar kvadratavvikelsen från en lösning.

b) **(1p)** Beskriv (generellt) det iterativa förfarandet hos Newtons metod, och lös problemet i a) med dess hjälp. Starta i origo.

c) **(1p)** Beskriv (generellt) det iterativa förfarandet hos brantaste lutningsmetoden, och lös problemet i a) med dess hjälp. Starta i origo och utför två iterationer.

3.3.13 (Tentamensuppgift 980527)
Betrakta problemet

$$\min f(x) := \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2)^2 + x_1^4.$$

Vi tänker oss att angripa detta obegränsade optimeringsproblem med en Newtonmetod, där vi använder en inexakt linjesökning. Vi använder då Armijos steglängdsregel, dvs. om x är en aktuell iterationspunkt och d är en sökriktning accepteras steget $\ell > 0$ om

$$f(x + \ell d) - f(x) \leq \alpha \ell \nabla f(x)^{\mathrm{T}} d, \tag{1}$$

för en given acceptansparameter α i intervallet $(0,1)$; om inte så minskas steget på ett väldefinierat sätt. [Vanligen väljs $\ell := 1$ som startvärde och om inte olikheten (1) uppfylls för detta värde av ℓ omdefineras det som $\ell := \ell/2$ och olikheten (1) undersöks på nytt.]

a) **(2p)** Med start i punkten $x^0 := (2,1)^{\mathrm{T}}$ och med acceptansparameter $\alpha := 0.3$, applicera denna metod en (1) iteration.

b) **(1p)** För vilka val av parametern α accepterar Armijos steglängdsregel ett enhetssteg i iterationen ovan?

3.3.14 Angrip problemet

$$\min f(x_1,x_2) = x_1^2 - 6x_1 + 2x_2^2 - 8x_2$$

med

a) brantaste lutningsmetoden

b) Newtons metod

Starta i punkten $(3,0)^T$ och utför högst två iterationer av vardera metoden. Är någon av de uppnådda punkterna optimal?

3.3.15 Betrakta det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min f(x) = ax_1^2 + (a^2-1)x_2^3 + \frac{a}{2}x_2^2$$

a) Beräkna sökriktningarna i brantaste lutningsmetoden och Newtons metod, från punkten $(-1,-1)^T$, för $a = -1, 0$ och 1. Vilka av de beräknade riktningarna utgör en descentriktning?

b) För vilka värden på a ger Newtons metod ett globalt optimum på *en* iteration oberoende av startpunkt?

3.3.16 Betrakta problemet

$$\min f(x) = x_1^3 + x_1x_2 + (1+x_2)^2.$$

a) Bestäm sökriktningen för Newtons metod från punkten $\left(\frac{1}{2},-1\right)^T$. Ge definitionen för en descent-riktning och visa att den beräknade Newton-riktningen uppfyller kravet för en sådan.

b) I vilka punkter i R^2 är Newton-riktningen inte väldefinierad för detta problem?

3.3.17 Betrakta problemet

$$\max\ f(x) = -x_1^2 + x_2^3$$

a) Bestäm en Newtonriktning i punkten $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) I riktningen framtagen i a) finns två lokala optima. Karakterisera dessa. Definierar någon av dem ett optimalt steglängdsval?

3.3.18 Härled sökriktningarna i brantaste lutningsmetoden och Newtons metod.

3.3.19 Antag att funktionen $F : R^n \to R^n$ är kontinuerligt differentierbar och betrakta det icke-linjära ekvationssystemet

$$F(x) = 0.$$

Newtons metod för obegränsad optimering har sin motsvarighet i en metod för lösning av detta problem. Givet ett iterat x^k görs i denna metod en linjärapproximation av den icke-linjära funktionen, vilket resulterar i ett approximerande *linjärt* ekvationssystem på formen

$$F(x^k) + \nabla F(x^k)(x - x^k) = 0,$$

eller ekvivalent

$$\nabla F(x^k)x = \nabla F(x^k)x^k - F(x^k),$$

där

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x)^T \\ \nabla F_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla F_n(x)^T \end{pmatrix}$$

är Jakobianen för funktionen F. Under förutsättning att Jakobianen i x^k är icke-singulär så har det linjära ekvationssystemet en entydig lösning, vilken utgör det nya iteratet, x^{k+1}, dvs

$$x^{k+1} = x^k - \nabla F(x^k)^{-1} F(x^k).$$

(Man kan visa att om funktionen F uppfyller vissa krav så kommer sekvensen av iterat att konvergera till en lösning till det ursprungliga ekvationssystemet.)

a) Betrakta det icke-linjära ekvationssystemet

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2)^3 + x_1 - 2x_2 \\ 4x_2 - 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gör en iteration med den ovan beskrivna metoden från $x^0 = (1, 0)^T$. Beräkna värdet på

$$\|F(x_1, x_2)\| = \sqrt{F_1(x_1, x_2)^2 + F_2(x_1, x_2)^2}$$

i x^0 och x^1. (Observera att $\|F(x)\| = 0$ om och endast om $F(x) = 0$, varför värdena $\|F(x^k)\|, k = 1, 2, ...,$ kan användas som mått på iteratens kvalite.)

b) Förklara varför den ovan beskrivna metoden *generaliserar* Newtons metod för obegränsad optimering till en *större* problemklass.

3.3.20

Givet det obegränsade icke-linjära optimeringsproblemet

$$\min f(x) = x_1^3 + x_2^2 + x_1 x_2 - 2x_1 - 4x_2.$$

a) Beräkna den brantaste avtaganderiktningen i punkten $(1,1)^T$.

b) Beräkna Newton-riktningen i samma punkt.

c) Visa att Newton-riktningen i $\bar{x}$ är en avtaganderiktning.

3.3.21
Betrakta det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in \Re^n} f(x) = c^{\mathrm{T}} x + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} C x,$$

där C är en symmetrisk och positivt definit matris. Härled en variabeltransformation som gör att *ett* steg i brantaste lutnings-metoden finner den unika optimallösningen oavsett val av startpunkt.

3.3.22 (Tentamensuppgift 20020311)
Betrakta följande minsta kvadrat-problem:

$$\min_{x \in \Re^n} \sum_{i=1}^{N} \left(f_i(x)\right)^2.$$

Problemet kan ibland effektivt lösas med en *inkrementell gradient-metod*:

1. Välj en initial punkt x_0 och en steglängd $\alpha > 0$.
2. För $k = 0, 1, 2, \ldots$:
   (a) låt $x_k^{(0)} = x_k$,
   (b) för $i = 0, \ldots, N-1$, låt $x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} - 2\alpha f_{i+1}(x_k^{(i)}) \nabla f_{i+1}(x_k^{(i)})$,
   (c) låt $x_{k+1} = x_k^{(N)}$.

Vi ska studera beteendet hos algoritmen på följande exempel (här är $N = 2$):

$$\min_{x \in \Re} (x+1)^2 + (x-1)^2. \tag{1}$$

För enkelhets skull låter vi $y_k := x_k^{(1)}$. Då har vi att $y_k = x_k - 2\alpha f_1(x_k) \nabla f_1(x_k)$, $x_{k+1} = y_k - 2\alpha f_2(y_k) \nabla f_2(y_k)$. Antag att α väljs i intervallet $(0,1)$. Låt $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (x^*, y^*)$. Beräkna gränsvärdet $(x^*, y^*) = (x^*(\alpha), y^*(\alpha))$. (*Ledning*: om $(x_k, y_k) \to (x^*, y^*)$, $g(x_k, y_k) = 0$ och g är en kontinuerlig funktion, gäller att $g(x^*, y^*) = 0$.) Vad kan du säga om $\lim_{\alpha\to 0} x^*(\alpha)$?

3.4 Lagrangedualitet

3.4.1 Lös problemet nedan genom att lösa Lagrangedualen och sedan bestämma motsvarande primala lösning.

$$\begin{aligned} \min f(x) = \quad & x_1^2 + 3x_2^2 \\ \text{då} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

3.4.2 Betrakta ett optimeringsproblem på formen

$$\begin{aligned} z^* = \ & \min\ f(x) \\ & \text{då } g_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m \\ & \qquad x \in X, \end{aligned}$$

där funktionerna $f, g_i : R^n \to R$ är kontinuerliga och mängden $X \subseteq R^n$ är sluten och begränsad. Problemet antas ha en tillåten lösning. Låt $u_i \geq 0, i = 1, ..., m$, vara givna parametrar och låt

$$\begin{aligned} s(u) = \min\ & f(x) \\ \text{då } & \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \leq 0 \\ & \qquad x \in X. \end{aligned}$$

Visa att detta problem är en *relaxation* av det ursprungliga, så att $s(u) \leq z^*$ alltid gäller. Motivera också varför $max_{u \geq 0}\ s(u) \leq z^*$ måste gälla. Förklara den potentiella nyttan av dessa resultat!

3.4.3 (Tentamensuppgift 990827)
I många sammanhang är det av intresse att beräkna projektionen av en vektor på ett underrum. Speciellt, betrakta problemet att finna den euklidiska projektionen av en godtycklig vektor, $y \in \Re^n$, på nollrummet till en matris, $A \in \Re^{m \times n}$, dvs. att finna ett $x \in \Re^n$ som

$$\begin{aligned} \text{minimerar } & \frac{1}{2}\|y - x\|^2, \\ \text{då } & Ax = 0. \end{aligned}$$

Lösningen till detta problem är klassisk: om matrisen A har full radrang ges denna projektion av

$$x^* = y - A^T(AA^T)^{-1}Ay.$$

Låter vi $P := I^n - A^T(AA^T)^{-1}A$, där $I^n \in \Re^{n \times n}$ är enhetsmatrisen, vara den så kallade *projektionsmatrisen*, kan vi alltså beräkna projektionen med formeln $x^* = Py$.
Er uppgift är att härleda denna formel, genom att utnyttja Lagrangedualitet! Motivera väl alla steg som utförs, genom att påvisa att nödvändiga förutsättningar är uppfyllda.

3.4.4 (Tentamensuppgift 000306)

Betrakta LP-problemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(x) := x_1 + x_2, \\ \text{då} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 4, \qquad (1) \\ & 0 \leq x_1 \leq 1, \\ & 0 \leq x_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Bilda det Lagrangeduala problemet genom att Lagrangerelaxera det övergripande bivillkoret (1). Ange det Lagrangeduala problemets målfunktion explicit, gärna med en graf som stöd. Lös det Lagrangeduala problemet. Använd den optimala Lagrangeduala lösningen för att härleda den optimala lösningen till det ursprungliga LP-problemet.

3.4.5 Betrakta optimeringsproblemet

$$(\text{P}) \quad \begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{då} \quad & g(x) \leq 0 \\ & x \in X \end{aligned}$$

a) Teckna det Lagrangerelaxerade problemet.

b) Teckna det Lagrange-duala problemet. (Låt h vara den duala målfunktionen.)

c) Visa att $h(\lambda) \leq f(x)$ gäller för alla λ och x som är tillåtna lösningar till (P) respektive Lagrange-dualen.

3.4.6 Bestäm lämpligt Lagrange-dualt problem till

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ln x_{ij} \\ \text{då} \quad & \sum_{i} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, ..., n \\ & \sum_{j} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, ..., m \\ & x_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

3.4.7 Lagrange-relaxera villkoret (1) i nedanstående problem och bestäm en optimallösning genom att formulera och lösa det Lagrangeduala problemet.

$$\begin{aligned} \min \quad & 6x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 \\ \text{då} \quad & 24x_1 + 24x_2 = 360 \qquad (1) \\ & x_3 \geq 1 \end{aligned}$$

3.4.8 Betrakta problemet

$$\begin{aligned} \min f(x) = \; & 2x_1^3 + \tfrac{1}{2}x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 = 2 \qquad (1) \\ & x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Lagrangerelaxera bivillkor (1) med multiplikator λ. Formulera det Lagrangeduala problemet och bestäm den duala funktionens värde i punkterna $\lambda = 1$ och $\lambda = 2$. Ange om möjligt ett intervall inom vilket det optimala målfunktionsvärdet ligger.

3.4.9 Använd Lagrangedualitet för att lösa följande problem.

a)

$$\begin{array}{llcll} \min & f(x) = x_1^2 & + & 3x_2^2 & \\ \text{då} & x_1 & + & 2x_2 & \geq 1 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{llcll} \min & f(x) = x_1^2 & + & 2x_2^2 & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq 2 \\ & x_1^2 & + & x_2^2 & \leq 5 \end{array}$$

3.4.10 Givet problemet

$$\begin{array}{llcccccl} \min & f(x) = 2x_1^2 & + & x_2^2 & + & x_1 & - & 3x_2 \\ \\ \text{då} & x_1^2 & + & x_2 & \geq & 8 & & (1) \\ & 1 \leq x_1 \leq 3 & & & & & & \\ & 2 \leq x_2 \leq 5 & & & & & & \end{array}$$

Lagrange-relaxera villkoret (1) med multiplikator λ. Formulera det duala problemet och bestäm den duala funktionen för $\lambda = 1,\ \lambda = 2$ och $\lambda = 3$. Inom vilket intervall ligger f^*. Skissa den duala funktionen.

3.4.11 Givet problemet

$$\begin{array}{llcccc} \min & f(x) = 2x_1^2 & + & x_2^2 & - & 2x_1 \\ \\ \text{då} & 4x_1 & + & 2x_2 & \geq & 6. \end{array}$$

Formulera och lös det Lagrangeduala problemet. Vilken relation gäller mellan optimalvärdena för primal och dual?

3.4.12 Givet problemet

$$\begin{array}{llcccc} \min & f(x) = 2x_1^2 & + & 5x_2^2 & - & 6x_1 \\ \\ \text{då} & 3x_1^2 & - & 2x_2 & \leq & 6. \end{array}$$

Teckna den Lagrangeduala funktionen och bestäm funktionens värde för multiplikatorvärdena 0 och 1. Inom vilket intervall ligger f^*?

3.4.13 Givet problemet

$$\begin{array}{llcccccl} \min & f(x) = x_1^2 & + & 2x_2^2 & + & 3x_3^2 & & \\ \\ \text{då} & 2x_1^2 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 10 \quad (1) \\ & \multicolumn{7}{l}{0 \leq x_1 \leq 2, \quad x_2 \geq 1} \end{array}$$

Lagrangerelaxera villkor (1) med multiplikator λ och formulera det duala problemet. Bestäm den duala funktionens värde för $\lambda = 0,\ \lambda = 1$ och $\lambda = 2$. I vilket intervall ligger f^*?

3.4.14

Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \min f(x) = & 2x_1^2 & - & 4x_1 & + & x_2^2 & +2x_2 \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 1 & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 3. & \end{array}$$

Lagrangerelaxera båda villkoren och formulera det Lagrangeduala problemet. Beräkna de relaxerade lösningarna samt värdena av den duala funktionen för multiplikatorvärdena $(0,0)^T$ och $(1,1)^T$. Inom vilket intervall ligger f^*?

3.4.15 (Lagrange-duala tillräckliga optimalitetsvillkor.)

Betrakta ett problem på formen

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \leq 0 \\ & x \in X \subseteq R^n, \end{array}$$

där funktionerna $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$ är kontinuerliga och mängden X är sluten, och det Lagrange-duala problemet

$$\max_{u \geq 0} h(u)$$

där

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x),$$

det vill säga optimalvärdet för det problem som fås då de explicita villkoren $g(x) \leq 0$ Lagrange-relaxeras med multiplikatorer $u \geq 0$.

a) (Globala optimalitetsvillkoren medför primal optimalitet.) Det primala problemet kan angripas med en två-stegs procedur. Lös först det Lagrange-duala problemet. Låt u^* beteckna ett dualt optimum. Bestäm därefter, om möjligt, ett $x^* \in R^n$ vilket uppfyller de *globala optimalitetsvillkoren*, det vill säga med egenskaperna

$$\begin{cases} x^* \text{ löser } \min_{x \in X} f(x) + u^{*\mathrm{T}} g(x) & (i) \\ u^{*\mathrm{T}} g(x^*) = 0 & (ii) \\ g(x^*) \leq 0. & (iii) \end{cases}$$

Visa att ett sådant x^* löser det primala problemet. (Notera att det första villkoret implicerar att $x^* \in X$.)

(Anmärkning: De globala optimalitetsvillkoren innebär: (i) optimalitet i det Lagrange-relaxerade problemet, (ii) komplementaritet, och (iii) tillåtenhet.)

b) (Exempel.) Om det primala problemet är konvext (och har en optimallösning) så kan de tre villkoren ovan alltid uppfyllas, varför det primala problemet alltid kan lösas med den beskrivna proceduren. Använd den för att lösa det linjära (och därför konvexa) problemet

$$\begin{array}{lrcrcl} \min\ z = & x_1 & - & 3x_2 & & \\ \text{då} & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Lagrange-dualisera det första bivillkoret.

c) (Ett specialfall.) Antag att det Lagrange-relaxerade problemet

$$\min_{x \in X} f(x) + u^{*\mathrm{T}} g(x)$$

har ett *unikt* optimum, betecknat $x(u^*)$. Hur förenklas i detta fall det resultat som visades i deluppgift a)? Ge villkor på f, g och X som är tillräckliga för att det Lagrange-relaxerade problemet skall ha ett unikt optimum för *varje* $u \geq 0$, så att detta speciellt gäller även i (ett *a priori* okänt) optimum u^*.

[Anmärkning: Om $u^* \geq 0$ och $g(x^*) \leq 0$ så gäller att $u^{*\mathrm{T}} g(x^*) = 0$ om och endast om $u_i^* g_i(x^*) = 0$ för $i = 1, \ldots, m$. De globala optimalitetsvillkoren kan alltså ekvivalent uttryckas som

$$\begin{cases} x^* \text{ löser } \min\limits_{x \in X} f(x) + u^{*\mathrm{T}} g(x) \\ u_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ g(x^*) \leq 0. \end{cases}$$

För att finna ett $x^* \in R^n$ som uppfyller de globala optimalitetsvillkoren, givet ett känt dualt optimum, u^*, är det vanligen lämpligast att utnyttja denna ekvivalenta form. Detta beror på att de separata komplementvillkoren $u_i^* g_i(x^*) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, direkt ger information om vilka av villkoren $g_i(x) \leq 0$, $i = 1 \ldots, m$, som ett sökt x^* måste uppfylla med likhet; det aggregerade komplementvillkoret $u^{*\mathrm{T}} g(x^*) = 0$ ensamt ger inte denna information.
Noteras kan också att om det ursprungliga problemet har formen

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) = 0 \\ & x \in X \subseteq R^n, \end{array}$$

så reduceras de globala optimalitetsvillkoren till

$$\begin{cases} x^* \text{ löser } \min\limits_{x \in X} f(x) + u^{*\mathrm{T}} g(x) \\ g(x^*) = 0, \end{cases}$$

eftersom komplementvillkoren då alltid blir uppfyllda.]

3.4.16 (Numeriskt exempel på Lagrange-dualitet.)
Betrakta det konvexa problemet

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

a) Lagrange-relaxera det övergripande bivillkoret, teckna den resulterande *implicita* duala målfunktionen och det duala problemet. Motivera varför det relaxerade problemet alltid har ett unikt optimum, varigenom den duala målfunktionen är differentierbar överallt.

b) Lös det implicita Lagrange-duala problemet genom att utnyttja att gradienten till en differentierbar dual målfunktionen kan uttryckas med de funktioner som ingår i de Lagrange-relaxerade villkoren och den unika lösningen till det relaxerade problemet.

c) Teckna nu istället ett *explicit* Lagrange-dualt problem (dvs ett dualt problem som är uttryckt i *endast* dualvariabeln). Lös det explicita duala problemet och bekräfta resultatet ovan.

d) Finn det primala problemets optimum.

e) Visa att stark dualitet gäller. *Varför* gäller den?

3.4.17 (Härledning av formel för Euklidisk projektion med Lagrange-dualitet.)

a) (Exempel.) Betrakta problemet att finna den punkt på linjen $x_1 + 2x_2 = 0$ som ligger närmast punkten (7,1), det vill säga

$$\begin{aligned} \min \quad & \tfrac{1}{2}(x_1 - 7)^2 + \tfrac{1}{2}(x_2 - 1)^2 \\ \text{då} \quad & x_1 + 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Teckna ett *implicit* Lagrange-dualt problem. Vilka egenskaper har det? Lös det dual problemet och finn därigenom optimum till det ursprungliga problemet. Illustrera resultatet grafiskt.

b) (Allmänt.) Betrakta nu det generella problemet att finna den Euklidiska projektionen av en given punkt $\bar{x} \in R^n$ på nollrummet till en given matris $A \in R^{m \times n}$ med $m \leq n$ och $\text{rang}(A) = m$, det vill säga

$$\begin{aligned} \min \quad & \tfrac{1}{2}\|x - \bar{x}\|_2^2 \\ \text{då} \quad & Ax = 0. \end{aligned}$$

Använd samma metodik som i deluppgift a för att visa att projektionen ges av

$$x^* = (I - A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}A)\bar{x},$$

där I är enhetsmatrisen av dimension $n \times n$. Motivera noga!

(Anmärkning: Detta resultat, och dess släktingar, har en mångfald tillämpningar. Det är, till exempel, besläktat med de så kallade normalekvationerna som används inom statistisk analys för att skatta en multipel linjär regression för ett antal observationer.)

[Ledning: Utnyttja att gradienten till en differentierbar Lagrange-dual målfunktionen kan uttryckas med de funktioner som ingår i de Lagrange-relaxerade bivillkoren och den (unika) lösningen till det relaxerade problemet.]

3.4.18 (Ytterligare egenskaper hos Lagrange-duala problem.)
Betrakta det primala problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \leq 0 \\ & \quad x \in X, \end{array}$$

där $X \subseteq R^n$, $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$. Om restriktionerna $g(x) \leq 0$ utgör komplicerande sidovillkor vilka Lagrange-relaxeras fås det Lagrange-duala problemet

$$\max_{u \geq 0} h(u),$$

där

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x).$$

a) Antag att mängden X är ändlig (dvs att den består av ändligt många element; till exempel ett ändligt antal heltalspunkter). Beteckna elementen i X med x^p, $p = 1, \ldots, P$. Visa att den duala målfunktionen h då är styckvis linjär. Hur många linjära segment kan funktionen som mest vara uppbyggd av? Varför är den *inte alltid* uppbyggd av detta antal segment?

(Anmärkning: Notera att detta resultat gäller oavsett vilka egenskaper som funktionerna f och g har.)

b) Illustrera resultatet i deluppgift a) med hjälp av det linjära 0/1-problemet

$$\begin{array}{rlrcrcrcrcl} z^* = & \max\ z = & 5x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & & \\ & \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 5 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1, \end{array}$$

där det första villkoret betraktas såsom varande komplicerande.

c) Antag att funktionen f och alla komponentfunktioner i g är linjära, samt att mängden X är en polytop (dvs en begränsad mängd som kan beskrivas med ett ändligt antal linjära likhets- och olikhets-villkor). Visa att den duala målfunktionen även i detta fall är styckvis linjär. Hur många linjära segment kan funktionen som mest vara uppbyggd av?

3.4.19 (Lagrange-dualisering och konvexifiering.)
För problemet

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \leq 0 \\ & x \in X \subseteq R^n, \end{array}$$

där funktionerna $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$ är kontinuerliga och mängden X är sluten, gäller att om det finns ett $x^* \in R^n$ och ett $u^* \in R^m_+$ som uppfyller de *globala optimalitetsvillkoren*, det vill säga sådana att

$$\begin{cases} x^* \text{ löser } \min\limits_{x \in X} f(x) + {u^*}^{\mathrm{T}} g(x) \\ {u^*}^{\mathrm{T}} g(x^*) = 0 \\ g(x^*) \leq 0, \end{cases}$$

så är x^* en optimallösning. (Notera att det första villkoret implicerar att $x^* \in X$.) För konvexa optimeringsproblem kan detta resultat användas för att finna en optimallösning genom att man först löser det Lagrange-duala problemet

$$\max_{u \geq 0} h(u),$$

där

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x),$$

för att finna u^*, varefter ett x^* kan beräknas.

a) (Icke-konvext exempel.) För icke-konvexa optimeringsproblem kan det ej garanteras att man finner en primal optimallösning med den ovan beskrivna duala strategin. Illustrera detta faktum med hjälp av problemet

$$\begin{array}{rrl} f^* & = \min & f(x) = -2x_1 + x_2 \\ & \text{då} & g(x) = x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ & & (x_1, x_2) \in X = \{(0,0), (0,4), (4,4), (4,0), (1,2), (2,1)\}. \end{array}$$

Vilket eller vilka av de tre tillräckliga optimalitetsvillkoren kan ej uppfyllas? Beräkna dualitets-gapets storlek, det vill säga $f^* - h^*$, där h^* är det Lagrange-duala problemets optimalvärde.

b) (Konvexifierad version.) Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrl} f_c^* & = \min & f(x) = -2x_1 + x_2 \\ & \text{då} & g(x) = x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\ & & (x_1, x_2) \in X^c = \{(x_1, x_2) |\ 4 \geq x_1 \geq 0,\ 4 \geq x_2 \geq 0\}, \end{array}$$

vilket är en *konvexifierad* version av problemet i deluppgift a). Lös problemet och beräkna f_c^*. Vilken relation gäller i detta exempel mellan optimalvärdena för det Lagrange-duala respektive det konvexifierade problemet (dvs mellan h^* och f_c^*).

(Anmärkning: Denna relationen kan visas vara allmängiltig.)

3.4.20 (Subgradienter och optimalitet för begränsade Lagrange-dualer.)
Betrakta det primala problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g(x) \leq 0 \\ & \quad x \in X, \end{array}$$

och det Lagrange-duala problemet

$$\max_{u \geq 0} h(u),$$

där

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x),$$

det vill säga optimalvärdet för det Lagrange-relaxerade problemet. Antag att mängden $X \subset R^n$ är kompakt och att funktionerna $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$ är kontinuerliga på X. Den duala målfunktionen är då ändlig, konkav och kontinuerlig på det duala rummet, varför Lagrange-dualen är ett konvext problem.

a) Låt $u^* \geq 0$. Visa att om det finns en subgradient γ^* till h i u^* som är komplementär till u^* (dvs ${u^*}^{\mathrm{T}} \gamma^* = 0$ gäller) och icke-positiv ($\gamma^* \leq 0$) så är u^* ett dualt optimum.

b) Betrakta det linjära problemet

$$\begin{array}{lrcrcrl} \min\ z = & x_1 & - & 3x_2 & & & \\ \text{då} & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 & \quad (1) \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -7 & \quad (2) \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0, & \end{array}$$

där villkoren (1) och (2) anses vara komplicerande och därför Lagrange-dualiseras, med multiplikatorer u_1 och u_2. I punkten $u^* = (4/3, 0)$ finns exakt *två* extrema subgradienter till den Lagrange-duala målfunktionen; finn dessa. Teckna subdifferentialen $\partial h(u^*)$. Finn en subgradient, γ^*, till h i u^* som verifierar att denna punkt är ett optimum till det duala problemet.

Gör en grafisk illustration i R^2 innehållande u^*, det två extrema subgradienterna i u^*, $\partial h(u^*)$ och γ^*.

3.4.21 (Everetts teorem.)
För problemet

$$\begin{array}{lll} \min & f(x) & \\ \text{då} & g(x) \leq 0 & \qquad (P) \\ & x \in X \subseteq R^n, & \end{array}$$

där funktionerna $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$ är kontinuerliga och mängden X är sluten, gäller att om $x^* \in R^n$ och $u^* \in R^m_+$ uppfyller de *globala optimalitetsvillkoren*, det vill säga har egenskaperna

$$\begin{cases} x^* \text{ löser } \min_{x \in X} f(x) + u^{*\mathrm{T}} g(x) \\ u_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ g(x^*) \leq 0, \end{cases}$$

så är x^* en optimallösning till (P). (Dessutom är u^* en optimallösning till det Lagrange-duala problemet.)

a) (Teoremet.) Låt $\bar{u} \geq 0$. Använd resultatet ovan för att visa att om $\bar{x} \in X$ löser Lagrange-relaxationen

$$\min_{x \in X} f(x) + \bar{u}^{\mathrm{T}} g(x)$$

så är $\bar{x}$ en optimallösning till problemet

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & g_i(x) \leq \bar{y}_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x \in X \end{array}$$

där de ursprungliga bivillkorshögerleden störts till

$$\bar{y}_i \begin{cases} = g_i(\bar{x}) \text{ för } \bar{u}_i > 0 \\ \\ \geq g_i(\bar{x}) \text{ för } \bar{u}_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, \ldots, m.$$

(Detta resultat är känt som Everetts teorem.)

b) (Exempel.) Betrakta heltalsproblemet

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl} \max\ z = & 11x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 15x_4 & + & 5x_5 & + & 4x_6 & & \\ \text{då} & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & + & 3x_5 & + & 4x_6 & \leq & b \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 1 \\ & & & & & & & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & = & 0/1, \end{array}$$

där b är en parameter som får anta icke-negativa heltalsvärden. Lagrange-relaxera kappsäcksvillkoret (med multiplikator $u \geq 0$) och utnyttja resultatet i deluppgift a) för att finna heltalsoptimum för så många värden på parametern b som möjligt. Kan man på *detta* sätt finna optimum för $b = 10$? (Ledning: Den Lagrange-duala målfunktionen har brytpunkter i $u = 5/2$ och $u = 10/3$.)

c) (En tillämpning.) Betrakta heltalsproblemet ovan med valet $b = 8$. Antag att kappsäcksvillkoret är ett *mjukt* resursvillkor, det vill säga att det behöver ej nödvändigtvis bli strikt uppfyllt, utan kan eventuellt överskridas lite. (Denna typ av bivillkor uppkommer till exempel då det på grund av osäkerhet i indata inte är meningsfullt att kräva att restriktioner uppfylls exakt.) Antag att vi här tillåter att villkoret överskrids med ett par enheter. Använd resultatet i deluppgift b) för att finna en rimlig lösning till detta problem.

(Anmärkning: många verkliga optimeringsproblem innehåller bivillkor som till sin natur är mjuka; sådana modellerar ofta till exempel resursbegränsningar eller målsättningar. Motsatsen till mjuka villkor är, naturligtvis, *hårda* villkor. Dessa måste bli exakt uppfyllda, och beskriver ofta konstitutiva eller logiska samband.)

[Anmärkning: Enligt Everetts teorem är en optimallösning till en Lagrange-relaxation av ett givet problem *också* är en optimallösning till en version av det ursprungliga problemet i vilket bivillkorshögerleden har störts. Genom att variera värdena på multiplikatorerna som används vid Lagrange-relaxeringen kan man (normalt) dessutom få optimallösningar till primala problem med *olika* störningar av bivillkorshögerleden. Dock kan man oftast *inte* på detta sätt generera *alla* möjliga störningar av högerleden, och speciellt finns det oftast inte några multiplikatorvärden som resulterar i en noll-störning (dvs $\bar{y} = 0$), vilket skulle svara mot att det ursprungliga problemet lösts. (Ett undantag är, till exempel, konvexa problem med strikt konvex målfunktion; för sådana problem fås alltid ett primalt optimum om multiplikatorvärdena löser det Lagrange-duala problemet.) Dock blir störningen i viss mening mindre då multiplikatorvärdena närmar sig ett optimum till det Lagrange-duala problemet. Sammanfattningsvis gäller alltså att man genom att lösa Lagrange-relaxationer (vilka normalt är mindre beräkningskrävande än det ursprungliga problemet) kan finna exakta optima till *vissa* högerledsstörda primala problem, men oftast *inte* till det ursprungliga problemet.]

3.4.22 (Surrogat-relaxering.)
Betrakta ett optimeringsproblem på formen

$$\begin{aligned} z^* = \ \min \ & f(x) \\ \text{då } & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \qquad (P) \\ & x \in X, \end{aligned}$$

där funktionerna $f, g_i : R^n \to R$ är kontinuerliga och mängden $X \subseteq R^n$ är sluten och begränsad. Problemet antas ha en optimallösning, x^*. Introducera parametrar $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, och definiera

$$\begin{aligned} s(u) = \min \ & f(x) \\ \text{då } & \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) \leq 0 \qquad (S) \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Detta problem har alltså endast *ett* explicit bivillkor.

a) (Svag dualitet.) Visa att x^* är en tillåten lösning till problemet (S) och att $s(u) \leq z^*$ därför alltid gäller, det vill säga att problemet (S) är en *relaxation* av det ursprungliga. Motivera också varför $max_{u \geq 0} \ s(u) \leq z^*$ måste gälla. Förklara den potentiella nyttan av dessa resultat!

b) (Exempel.) Betrakta det linjära 0/1-problemet

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrl} z^* = & \max\ z = & 5x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & & & \\ & \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \leq & 6 & (1) \\ & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 5 & (2) \\ & & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 & \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1. & \end{array}$$

Surrogat-relaxera villkoren (1) och (2) med multiplikatorer $u_1, u_2 \geq 0$ och formulera problemet (S). Låt $\bar{u} = (1, 2)$. Beräkna $s(\bar{u})$.

Betrakta åter det ursprungliga problemet och Lagrange-relaxera villkoren (1) och (2) med multiplikatorer $u_1, u_2 \geq 0$. Beräkna det Lagrange-duala målfunktionsvärdet för $u = \bar{u}$.

Jämför de uppnådda resultaten.

c) (Jämförelse med Lagrange-dualitet.) Låt $u \geq 0$ och

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x).$$

Visa att $h(u) \leq s(u)$, samt att

$$\max_{u \geq 0} h(u) \leq \max_{u \geq 0} s(u) \leq z^*.$$

3.4.23 (Tentamensuppgift 010305)
Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrrrrl} \text{minimera } z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 5, \\ & x_1 & & & \leq & 4, \\ & & & x_2 & \leq & 4, \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0, \text{heltal.} \end{array}$$

Lagrangerelaxera det övergripande bivillkoret. Beskriv Lagrangefunktionen och ge ett uttryck för den Lagrangeduala funktionen och det duala problemet. Beräkna den Lagrangeduala funktionen i följande fyra punkter: $\lambda = 0, 1, 2, 3$. Ange den bästa övre och den bästa undre gränsen för det optimala målfunktionsvärdet till det ursprungliga problemet som Du finner.

3.4.24 (Tentamensuppgift 20020529)

a) Betrakta problemen

$$\begin{aligned} f^* := \text{minimum } & f(x), \\ \text{då } & x \in X, \end{aligned} \tag{P}$$

och

$$
\begin{aligned}
l^* := \text{minimum } & l(x), \\
\text{då } & x \in G.
\end{aligned}
\tag{R}
$$

Om $X \subseteq G$ och $l(x) \leq f(x)$ för alla $x \in X$ sägs (R) vara en *relaxering* av (P). Omvänt är då (P) en *restrifiering* av (R).

Visa att $l^* \leq f^*$.

b) Betrakta ett problem på formen

$$
\begin{aligned}
f^* := \text{minimum } & f(x), \\
\text{då } & g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

där $x \in \Re^n$ och f och g_i, $i = 1, \ldots, m$, är kontinuerliga funktioner på $\Re^n$. Låt u_i, $i = 1, \ldots, m$, vara reella multiplikatorer (dualvariabler) för bivillkoren och låt $P : \Re^m \mapsto \Re_+$ vara en kontinuerlig *yttre straffunktion*, dvs. en funktion sådan att

$$
P(y) \begin{cases} = 0, & \text{då } y = 0^m, \\ > 0, & \text{då } y \neq 0^m. \end{cases}
$$

Betrakta det straffade problemet

$$
\theta^* = \underset{x \in \Re^n}{\text{minimum}} \; \theta(x) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) + \rho P(g(x)),
$$

där $g(x)$ är m-vektorn av g_i och där $\rho > 0$. Visa att detta problem är en relaxering av det ursprungliga.

3.4.25 (Tentamensuppgift 20020311)

a) Betrakta optimeringsproblemet:

$$
\begin{aligned}
\underset{x \in \Re}{\text{minimera}} \; & x^2, \\
\text{då } & \sin(x) \leq -1.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Finn varje lokal och varje global optimallösning till problemet. Ange KKT-villkoren. Är de nödvändiga och/eller tillräckliga för problemet?

b) Trippeln (x_0, α, λ) sägs uppfylla *Fritz-Johns* (FJ) optimalitetsvillkor för problemet

$$
\begin{aligned}
\underset{x \in \Re^n}{\text{minimera}} \; & f(x), \\
\text{då } & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

definierat av differentierbara funktioner f, g_i, $i = 1, \ldots, m$, om

$$
\begin{aligned}
& g_i(x_0) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, && \text{(primal tillåtenhet)} \\
& (\alpha, \lambda) \geq 0, (\alpha, \lambda) \neq 0, && \\
& \alpha \nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = 0, && \text{(dual tillåtenhet)} \\
& \lambda_i g_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, && \text{(komplementaritet)}
\end{aligned}
$$

Uppfyller lokala/globala optimala lösningar till problemet (1) FJ-villkoren?

c) Undersök användbarheten av FJ-villkoren genom att finna en punkt (x, y) som uppfyller dessa för problemet

$$
\begin{aligned}
& \underset{(x,y)}{\text{minimera}}\ y, \\
& \text{då} \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ \quad\quad x^3 \geq y^4, \end{cases}
\end{aligned}
$$

men som trots detta varken är lokalt eller globalt optimal för problemet.

3.5 Karush-Kuhn-Tucker

3.5.1 Avgör om punkten $x = (1, 0)$ är optimallösning till problemet nedan.

$$
\begin{aligned}
\min f(x_1, x_2) = \quad & x_1^2 + 3x_2^2 - x_1 \\
\text{då} \quad & x_1^2 - x_2 \leq 1 \\
& x_1 + x_2 \geq 1
\end{aligned}
$$

3.5.2 Formulera Karush-Kuhn-Tucker villkoren för problemet

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f(x) \\
\text{då} \quad & g_i(x) \leq b_i \quad , i = 1, \ldots, k \\
& g_i(x) = b_i \quad , 1 = k+1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 \quad , j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

där alla funktioner är kontinuerliga och differentierbara i n variabler.

3.5.3 Undersök om punkten $x = (1, 2)$ satisfierar Karush-Kuhn-Tucker-villkoren hörande till problemet

$$\begin{aligned} \min f(x) = \quad & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ \text{då} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

Är punkten optimal?

3.5.4 Bestäm med Karush-Kuhn-Tucker-teori globalt maximum till

$$\begin{aligned} f(x,y) = \quad & 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x \\ \text{då} \quad & x + y \leq 13 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

3.5.5 Bestäm med Karush-Kuhn-Tucker-teori globalt minimum till

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) = \quad & x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 5x_2 \\ \text{då} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 1 - x_1^2 \end{aligned}$$

3.5.6 Använd Karush-Kuhn-Tucker-villkoren för att bestämma de värden på parametern c för vilka punkten $(x,y) = (4,3)$ utgör optimallösning till problemet.

$$\begin{array}{rcl} \min & cx + y & \\ \text{då} & x^2 + y^2 & \leq 25 \\ & x - y & \leq 1 \end{array}$$

3.5.7 (Tentamensuppgift 000306)

a) **(2p)** Betrakta det olinjära optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(x) := 4x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2 + x_1, \\ \text{då} \quad & -2x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ & 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ & x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Avgör huruvida punkten $x = (0, \frac{1}{2})^T$ uppfyller KKT-villkoren. *Obs! Lös inte problemet med någon algoritm för att avgöra saken.*

b) **(1p)** Avgör huruvida punkten $x = (0, \frac{1}{2})^T$ är ett globalt minimum. Om svaret är "Ja", motivera detta väl. Om svaret är "Nej", motivera detta med ett motexempel.

3.5.8 (Tentamensuppgift 990308)
Studera problemet

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \qquad\qquad \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq 1, && (1) \\
& x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n. && (2)
\end{aligned}
$$

a) **(1p)** Visa att (P) är ett konvext problem.

b) **(1p)** Antag att $\min_{j \in \{1,\ldots,n\}} \{c_j\} < 0$ och låt $\lambda \leq 0$ och $\mu_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, vara Lagrange-multiplikatorer för bivillkoren (1) respektive (2). Vidare, låt

$$\overline{\lambda} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} (\min\{0; c_j\})^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \overline{x}_j = \frac{\min\{0; c_j\}}{2\overline{\lambda}}$$

$$\overline{\mu}_j = \max\{0; c_j\}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Visa att punkten $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$ är en KKT-punkt för problemet (P).

c) **(1p)** Visa att punkten $\overline{x}$ är den *enda* optimallösningen till problemet (P).

3.5.9 (Tentamensuppgift 980309)

a) **(2p)** Betrakta optimeringsproblemet

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x), \\
\text{då} \quad & g_i(x) \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

där samtliga funktioner är kontinuerligt differentierbara på $\Re^n$. Ange KKT-villkoren för problemet och beskriv deras geometriska betydelse. Ange egenskaper hos problemet under vilket de är *nödvändiga* för lokal optimalitet hos en punkt, och (oberoende av föregående) egenskaper hos problemet under vilket de är *tillräckliga* för global optimalitet hos en punkt. Bevisa det sistnämnda.

b) **(1p)** Betrakta optimeringsproblemet ovan. Antag att f är konvex på $\Re^n$, och att samtliga funktioner g_i är konkava på $\Re^n$. Beskriv den logaritmiska barriärfunktionen till detta problem, och visa att funktionen är strikt konvex på det inre av mängden av tillåtna lösningar. (Vi antar att den mängden inte är tom.) Varför är den egenskapen av intresse?

3.5.10 Antag att $\bar{x}$ är ett lokalt optimum till problemet

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & Ax = b, \qquad (A \sim m \times n) \end{array}$$

där f är differentierbar. Visa att det då finns $\lambda \in R^m$ så att $\nabla f(\bar{x}) + \lambda^T A = 0$.

3.5.11 Lös följande problem, där samtliga konstanter är reella och positiva.

$$\begin{array}{rrcll} \min & \sum_{j=1}^{n} x_j \ln x_j & & & \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} b_j x_j & = & b_0 & \\ & x_j & > & 0 & j = 1, .., n. \end{array}$$

Global optimalitet skall motiveras.

3.5.12 Lös följande problem, där samtliga konstanter är reella och positiva.

$$\begin{array}{rrcll} \min & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j & & & \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} b_j / x_j & \leq & b_0 & \\ & x_j & > & 0 & j = 1, .., n. \end{array}$$

Motivera global optimalitet.

3.5.13 Givet det icke-linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{l} \min\ f(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ \begin{array}{rrcl} \text{då} & x^2 - ay & \leq & 0 \\ & x + y - 2 & \leq & 0, \end{array} \end{array}$$

där a är reell parameter. Använd Karush-Kuhn-Tucker teori för att avgöra för vilka värden på a som det första bivillkoret är uppfyllt med likhet i det globala optimalt.

3.5.14

Betrakta det konvexa optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rl} \min\ f(x) = & (x_1 - 14)^2 + (x_2 - 11)^2 \\ \text{då } g_1(x) = & (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 13)^2 - 11^2 \leq 0 \\ g_2(x) = & x_1 + x_2 - 19 \leq 0. \end{array}$$

a) Teckna Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

b) Studera problemet grafiskt för att bestämma vilka bivillkor som är bindande (aktiva) i optimum. Utnyttja denna information och Karush-Kuhn-Tucker villkoren för att beräkna optimum.

3.5.15 Betrakta problemet

$$\begin{aligned} \min f(x) = \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j(c_j + x_j) \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq b \\ & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq d. \end{aligned}$$

a) Formulera Karush-Kuhn-Tucker villkoren till problemet. Använd givna beteckningar.

b) Antag att $n = 3$, $c = (10, 2, -1)^T$ $a = (4, 2, 2)^T$, $b = 5$ och $d = 6$. Avgör om någon av följande punkter är ett globalt minimum: $(2, -1, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$, $(0, 1, 2)^T$.

3.5.16

Givet problemet

$$\begin{aligned} \min\ f(x_1, x_2) = \quad & \tfrac{1}{2}x_1^2 - 10x_1x_2 + 10x_2^2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + x_2^2 \leq 5 \\ & x_1^2 - 2x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

a) Avgör om punkten $x = (2, 1)$ uppfyller Karush-Kuhn-Tucker villkoren till problemet.

b) Är Karush-Kuhn-Tucker villkoren tillräckliga för optimalitet i detta problem?

3.5.17

Givet det icke-linjära optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} &\min f(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &\text{då} \quad x^2 - 4.5y \leq 0 \\ &\qquad 4.5x + y - 11 \leq 0, \end{aligned}$$

Formulera Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

3.5.18 Tag fram optimalitetsvillkoren för LP-problemet

$$\begin{aligned} \max z = \quad & c^T x \\ \text{då} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

med hjälp av Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

3.5.19 Betrakta problemet

$$
\begin{array}{rrcl}
\min f(x_1,x_2) = & (3x_1-x_2)^2+4x_2^2-x_1 & & \\
\text{då} & x_1^3+x_2^2 & \leq & 37 \\
& -4x_1+x_2 & = & 2 \\
& x_1,x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Undersök om punkten $(1,6)^T$ uppfyller Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

3.5.20 Betrakta problemet

$$
\begin{array}{rl}
\min f(x_1,x_2) & = -x_1x_2 \\
\text{då} & x_1+x_2 \leq 1
\end{array}
$$

a) Visa att punkten $(0,0)^T$ satisfierar Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

b) Visa att denna punkt *inte* är lokalt minimum.

3.5.21 Betrakta det icke-linjära optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & x_1^3 & - & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 & & \\
& -x_1 & + & 4x_2 & \geq & 2 & & \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

och den tillåtna lösningen $\bar{x} = (1,3)^T$.

a) Är $\bar{x}$ en Karush-Kuhn-Tucker punkt?

b) Är $\bar{x}$ ett globalt optimum?

3.5.22 Betrakta optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{lll}
\text{(ILP)} & \min & f(x) \\
& \text{då} & x \in X
\end{array}
$$

där mängden $X \subseteq R^n$ är icke-tom, sluten och konvex, och funktionen $f: R^n \to R$ är kontinuerligt differentierbar och konvex på X. Låt $x^* \in X$.

a) Visa att om x^* är en optimallösning till problemet

$$
\begin{array}{rl}
\min & \nabla f(x^*)^T x \\
\text{då} & x \in X
\end{array}
$$

så gäller för alla $x \in X$ att

$$\nabla f(x^*)^T(x-x^*) \geq 0.$$

Visa vidare att detta resultat medför att x^* är en optimallösning till (ILP).

Illustrera resultatet på problemet

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\min f(x) = & \multicolumn{5}{l}{2(x_1-3)^2+(x_2-1)^2} \\
\text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
& x_1 & & & \leq & 2 \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

b) Visa att om $X = R^n_+$ så reduceras det nödvändiga optimalitetsvillkoret i deluppgift a) till $\nabla f(x^*) \geq 0$ *och* $\nabla f(x^*)x^* = 0$.

c) Visa att då istället $X = \{x \in R^n | Ax = b\}$ så fås att x^* är optimal endast om $\nabla f(x^*)$ ligger i nollrummet till A.

3.5.23 Givet en konvex funktion f.

a) Ange mängden av alla descentriktningar till f i punkten $\bar{x}$.

b) Antag att d är en descentriktning till f i punkten $\bar{x}$. Är det då möjligt att avgöra om $\bar{d}$ är en ascentriktning eller descentriktning i punkten $\bar{x}$ utifrån att $d^T\bar{d} = 0$, dvs att d och $\bar{d}$ är vinkelräta mot varandra?

c) Antag att man vill söka optimum till problemet

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & Ax \leq b. \end{array}$$

Antag vidare att man löst LP-problemet

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x + c_0 \\ \text{s.t.} & Ax \leq b. \end{array}$$

Kan man utnyttja informationen ovan för att ta fram en övre gräns för det optimala målfunktionsvärdet till (P)? Hur kan man med ett lämpligt val av c och c_0 generera en undre gräns?

3.5.24 Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcl} \min f(x_1, \ldots, x_n) = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{c_j} & & \\ \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j & = & D \\ & x_j & \geq & 0 \quad j = 1, \ldots, n, \end{array}$$

där $c_j > 0, \ \forall j$, och $D > 0$. Visa att optimallösningen och det optimala målfunktionsvärdet ges av

$$x_j^* = \frac{Dc_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \text{ och } \qquad f^* = \frac{D^2}{\sum_{j=1}^{n} c_j}.$$

3.5.25 (Tentamensuppgift 20020826)
funktioner, genom att flera viktiga egenskaper som konvexa funktioner har också innehas av dessa. Så till exempel är de tillräckliga villkoren för global optimalitet

som uppfylls av konvexa funktioner också tillräckliga för pseudokonvexa funktioner. Eftersom det existerar intressanta optimeringsproblem där målfunktionen är pseudokonvex men inte konvex är vikten av dessa egenskaper självklar. Målet med uppgiften är att utreda just dessa egenskaper.

a) En funktion $f : \Re^n \mapsto \Re$ som är en gång kontinuerligt differentierbar sägs vara pseudokonvex om

$$\nabla f(x)^{\mathrm{T}}(y - x) \geq 0 \implies f(y) \geq f(x), \qquad x, y \in \Re^n.$$

(Definitionen säger i princip att om det i x lutar uppåt mot punkten y så är målfunktionsvärdet i y större än i x.) Visa att en konvex funktion är pseudokonvex. Visa också att omvändningen inte gäller, alltså att det finns pseudokonvexa funktioner som inte är konvexa. Ge gärna ett motexempel.

b) För konvexa problem gäller följande nödvändiga och tillräckliga villkor för att $x^* \in X$ skall vara ett globalt minimum för problemet att

$$\begin{aligned} &\underset{x \in \Re^n}{\text{minimera}}\ f(x), \\ &\text{då}\ x \in X, \end{aligned}$$

där $X \subseteq \Re^n$ är en sluten och konvex mängd:

$$\nabla f(x^*)^{\mathrm{T}}(y - x^*) \geq 0, \qquad y \in X.$$

Visa att detta villkor är både nödvändigt och tillräckligt även om f "bara" är pseudokonvex.

3.6 Frank-Wolfe

3.6.1 Betrakta problemet

$$\begin{array}{rcccl} \min f(x) = & (x_1 + 2x_2 - 6)^2 + (2x_1 - x_2 - 2)^2 & & & \\ \text{då} & 2x_1 \ + \ 3x_2 & \leq & 9 & \\ & x_1 & \leq & 3 & \\ & x_1 \quad , \quad x_2 & \geq & 0. & \end{array}$$

a) Visa att problemet är konvext.

b) Utför *en* iteration av en lämplig metod för problemet, med start i origo. Ange ett intervall inom vilket det optimala målfunktionsvärdet ligger.

3.6.2 Betrakta nedanstående problem

$$\begin{array}{rc} \min f(x_1, x_2) = & (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 - 6x_1 \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Lös problemet med Frank-Wolfe algoritmen (max 2 iterationer, startpunkt $(0, 2)$).

b) Är funktionen konvex i det tillåtna området? Motivera.

3.6.3 Betrakta problemet

$$
\begin{array}{rll}
\max f(x_1, x_2) = & -x_1^2 - 4x_2^2 + 16x_1 + 24x_2 & \\
\text{då} & x_1 + x_2 & \leq 6 \\
& x_1 - x_2 & \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Lös problemet med Frank-Wolfe algoritmen.

3.6.4 Betrakta problemet

$$
\begin{array}{rll}
\min f(x_1, x_2) = & (x_1 - 3x_2)^2 + 2x_1 - 4x_2 & \\
\text{då} & 3x_1 + 2x_2 & \geq 6 \\
& 2x_1 + 5x_2 & \leq 10 \\
& x_1 & \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

a) Är problemet konvext? Motivera.

b) Genomför en iteration med Frank-Wolfe algoritmen. Starta i $x^0 = (2, 1)$.

3.6.5 Lös problemet

$$
\begin{array}{rll}
\min f(x_1, x_2) = & x_1^2 + 6x_2^2 + x_1 - 2x_2 & \\
\text{då} & x_1 + x_2 & \geq 2 \\
& -2x_1 + 3x_2 & \leq 6 \\
& 3x_1 - 2x_2 & \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

med Frank-Wolfe algoritmen. Starta i $x^0 = (2, 0)$ och genomför högst 3 iterationer.

3.6.6 (Tentamensuppgift 980309)
Betrakta problemet

$$
\begin{array}{ll}
\max & f(x) := 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2, \\
\text{då} & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Med start i $x_0 = (1/2, 1/2)^{\mathrm{T}}$, lös problemet med Frank–Wolfe-algoritmen. Ange i varje iteration ett intervall däri det optimala målfunktionsvärdet ligger. Varför är uppskattningarna giltiga för detta problem?

3.6.7 Lös problemet

$$\begin{array}{rrcrcr} \min f(x) = & \multicolumn{5}{l}{2(x_1-3)^2+(x_2-1)^2} \\ \text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

med Frank-Wolfe algoritmen. Starta i origo.

3.6.8 Givet problemet

$$\begin{array}{rrcl} \min f(x) = & \multicolumn{3}{l}{2x_1^2+4x_1x_2+6x_2^3} \\ \text{då} & x_1+4x_2 & \leq & 7 \\ & x_2 & \geq & 1 \\ & x_1 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Genomför en iteration med Frank-Wolfe metoden från punkten $(1,1)^T$.

b) Jämfört med målfunktionsvärdet i punkten erhållen i a), hur mycket avviker det optimala målfunktionsvärdet högst?

3.6.9 Lös problemet

$$\begin{array}{rc} \min f(x) = & 2x_1^2 \ + \ x_2^2 \ - \ 2x_1x_2 \ + \ x_1 \ - \ 3x_2 \\ \text{då} & x_1 \geq 0 \\ & 0 \leq x_2 \leq 1 \end{array}$$

med Frank-Wolfe metoden. Starta i origo och gör högst 2 iterationer.

3.6.10 Betrakta det konvexa problemet

$$\begin{array}{rrcrcr} f^* = \min f(x) = & \multicolumn{5}{l}{\frac{1}{2}(x_1-3)^2+(x_2-2)^2} \\ \text{då} & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

och den icke-optimala tillåtna lösningen $\bar{x} = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})^T$. Beräkna på lämpligaste sätt en icke-trivial övre gräns för differensen $f(\bar{x}) - f^*$. (En övre gräns baserad på optimalvärdet för det obegränsade problemet betraktas här såsom varande trivial.)

3.6.11 Lös problemet

$$\begin{array}{rrcrcr} \min f(x) = & \multicolumn{5}{l}{(x_1-1)^2+(x_2+1)^2} \\ \text{då} & x_1 & - & x_2 & \geq & 1 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

med Frank-Wolfe metoden. Starta i punkten $(3,0)^T$.

3.7 Övrigt

3.7.1 (Tentamensuppgift 010523)
Betrakta det olinjära optimeringsproblemet att

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(x), && (1) \\ \text{då} \quad & g_i(x) \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m, && (2) \end{aligned}$$

där $f : \Re^n \mapsto \Re$ och $g_i : \Re^n \mapsto \Re$, $i = 1, \ldots, m$, samtliga är kontinuerligt differentierbara funktioner på $\Re^n$.

a) **(1p)** För den *logaritmiska* barriärfunktionen, beskriv inre punktsalgoritmen för att lösa detta problem.

b) **(1p)** Beskriv första ordningens optimalitetsvillkor för barriärsubproblemet för ett godtyckligt positivt värde på barriärparametern. Beskriv skillnaden mot KKT-villkoren till det ursprungliga problemet. Med ledning av denna, ge formeln för det naturliga estimatet av Lagrangemultiplikatorerna för bivillkoren (2) till ursprungsproblemet.

c) **(1p)** Antag att sekvensen av KKT-punkter till barriärsubproblemet är konvergent, med gränsvärde x^*. Visa att om x^* är en reguljär punkt (dvs. att bivillkorsnormalerna till de bindande bivillkoren i x^* är linjärt oberoende), så kommer också sekvensen av multiplikatorestimat att konvergera, och detta mot en vektor av KKT-multiplikatorer som tillsammans med x^* uppfyller KKT-villkoren för ursprungsproblemet.

3.7.2 (Tentamensuppgift 000823)
(Sekventiell Kvadratisk Programmering, SQP)
Betrakta optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(x) := -2x_1 + x_1^2 - x_2 + 2x_2^2 \\ \text{då} \quad & 3x_1^2 + 2x_2^2 \leq 3, \\ & 2 \geq x_1 \geq 0, \quad 2 \geq x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Starta i punkten $x^0 = (0,0)^T$ och genomför en iteration med sekventiell kvadratisk programmering. Redovisa alla stegen noga. Välj en lämplig straffunktion och en lämplig metod för linjesökningen.

3.7.3 (Tentamensuppgift 980309)

a) **(2p)** Betrakta optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ \text{då} \quad & x \in X, \end{aligned}$$

där f är kontinuerligt differentierbar och där

$$X = \left\{ x \in \Re^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j = r; \quad x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \right\},$$

där $r > 0$. Antag att x_* är ett lokalt minimum till detta problem. Visa att

$$x_{*j} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f(x_*)}{\partial x_j} \leq \frac{\partial f(x_*)}{\partial x_i}, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

dvs. att nollskilda variabler har samma (och lägsta) partiella derivata.

b) **(1p)** Betrakta ett olinjärt optimeringsproblem, där målfunktionen inte är känd explicit, utan måste beräknas för varje variabelvektor genom att utföra någon numerisk beräkning. Denna beräkning är dyr, för övrigt. Antag också att inget är känt om denna målfunktion i form av dess deriverbarhet eller konvexitet, annat än att den (troligen) är kontinuerlig i variabelvektorn, som är av storleken 100, och att den förväntas ha ett litet antal lokala minima. Vidare är problemet begränsat av ett fåtal (c:a 10) olinjära bivillkor, som ger upphov till en icke-konvex mängd. Vi är intresserade av att lösa problemet approximativt; speciellt kan det tolereras att man bryter något mot bivillkoren. Diskutera hur Du skulle angripa problemet.

3.7.4 (Tentamensuppgift 990827)
Betrakta problemet att

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2, \\ \text{då} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 10. \end{aligned}$$

Angrip detta problem med en logaritmisk barriärmetod. Beskriv explicit den trajektoria som metoden följer, som funktion av barriärparametern.

3.7.5 (Tentamensuppgift 990528)
I Ert första uppdrag som optimerare ställs Ni inför problemet att modellera och lösa ett problem åt ett företag inom stålindustrin. Det handlar om att tillverka en syreproduktionsenhet som skall användas i en masugn. De fyra variabler $x_1, \ldots, x_4$ Ni deklarerar definierar produktionshastigheten av syre, trycket i tanken, kompressorstyrkan och tankens volym. Enligt företagets ekonomer och ingenjörer kan kostnaden för operationen av denna maskin under en produktionscykel beskrivas med uttrycket

$$f(x) := 61.8 + 5.72x_1 + 0.0175(x_3)^{0.85} + 0.0094(x_4)^{0.75} + 0.006t_1x_3, \tag{1}$$

där t_1 (som här kan sättas lika med 0.6) är tiden för den första delen av produktionscykeln. Bivillkoren som deklareras i samarbete med ingenjörerna är följande fyra:

$$t_2x_1 \geq d_1t_1 + d_2(t_2 - t_1), \tag{2a}$$

som uttrycker syreefterfrågan, där $t_2 = 1.0$ är längden av den andra delen av produktionscykeln och $d_1 = 2.5$ och $d_2 = 40$ är efterfrågan av syre i respektive del av produktionscykeln;

$$x_2 \geq p_0 \tag{2b}$$

uttrycker kravet på ett minsta tryck (här kan $p_0 = 200$ sättas);

$$x_3 = 36.25 \frac{(d_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{t_1} \ln\left(\frac{x_2}{p_0}\right) \tag{2c}$$

beskriver den fysikaliska relationen mellan kompressorns effekt och trycket i tanken den genererar;

$$x_4 = 348{,}300 \frac{(d_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{x_2} \tag{2d}$$

beskriver slutligen relationen mellan volymen hos tanken och trycket som måste vidmakthållas i den för att kunna behålla den mängd syre som maximalt kan behövas. Vi har sedan naturligtvis de fysikaliska villkoren

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \tag{2e}$$

Problemet att minimera funktionen f beskriven i (1) under bivillkoren beskriva i (2) matar Ni in i en kommersiell programvara, som ger följande utskrift:

```
Optimal solution:

x1 = 17.5   x2 = 473.7   x3 = 468.8   x4 = 6618

Optimal cost:

f = 173.7
```

Programmet som har använts skriver alltid ut att den lösning som nås är optimal, men det kontrollerar inte att ett problem som matas in är snällt nog; om numeriska problem uppstår har också programmet ibland en tendens att avbryta sökningen i förtid och ändå skriva att resultatet är optimalt. Er viktiga uppgift är att verifiera huruvida programmet gav en rimlig lösning. Motivera Er slutsats.

3.7.6 (Tentamensuppgift 990308)
Betrakta det obegränsade optimeringsproblemet
[P]

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) := q^{\mathrm{T}}x + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx, \\ \text{då} \quad & x \in \Re^n, \end{aligned}$$

där Q är positivt semidefinit men inte positivt definit. Vi angriper problemet med en Levenberg–Marquardt-strategi, dvs. vi använder en Newton-liknande metod där vi i det kvadratiska subproblemet adderar en multipel $\gamma > 0$ av enhetsmatrisen till Hessianen av f (dvs. till matrisen Q) för att garantera att systemet blir lösbart. Det betyder att, givet en iterationspunkt x_t, sökriktningen p_t bestäms genom att lösa det linjära systemet

$$[\nabla^2 f(x_t) + \gamma I]p = -\nabla f(x_t), \tag{1}$$

dvs.

$$[Q + \gamma I]p = -(Qx_t + q).$$

a) **(1p)** Betrakta den algoritmiska formeln

$$x_{t+1} := x_t + p_t, \qquad t = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

dvs. den algoritm som fås då man använder den Newtonliknande sökriktningen p_t från (1) och steglängden 1 i alla iterationer. Visa att det är ekvivalent med att låta x_{t+1} ges av lösningen till problemet

[P'(x_t)]

$$\begin{aligned} \min \quad & f(y) + \frac{\gamma}{2}\|y - x_t\|_2^2, \\ \text{då} \quad & y \in \Re^n. \end{aligned}$$

b) **(2p)** Antag att en optimal lösning existerar till problemet [P]. Antag också att sekvensen $\{x_t\}$ som genereras av algoritmen (2) konvergerar mot en punkt x_∞. (Detta kan visas.) Visa att x_∞ är en optimal lösning till [P].

3.7.7 (Tentamensuppgift 980819)
Betrakta optimeringsproblemet

[P]

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ \text{då} \quad & x \in \Re^n, \end{aligned}$$

där $f : \Re^n \mapsto \Re$ är två gånger kontinuerligt differentierbar.

a) **(1p)** Låt $x^t \in \Re^n$ och betrakta följande två riktningsbestämmande problem (Δ och γ är positiva konstanter och $\|\cdot\|$ betecknar Euklidisk norm):

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^t)^{\mathrm{T}} p, \\ \text{då} \quad & \|p\| \leq \Delta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^t)^{\mathrm{T}} p + 1/(2\gamma)\|p\|^2, \\ \text{då} \quad & p \in \Re^n. \end{aligned}$$

Visa att dessa är ekvivalenta i den meningen att optimallösningarna p har samma riktning, oavsett valet av $\Delta > 0$ och $\gamma > 0$. Vilken metod bygger på dessa riktningsbestämmande problem?

b) **(2p)** Ett alternativ till "sökmetoder" (där man alternerar mellan lösandet av riktningsbestämmande problem, á lá det andra alternativet ovan, och lösandet av endimensionella minimeringsproblem) är en "trust region"-ansats, á lá det andra alternativet ovan. Där använder man "modeller" av f (dock inte linjära som ovan) som minimeras över en (enkel) begränsad mängd, oftast en boll, där modellen anses som "tillförlitlig". Beroende på hur stor förbättring i målfunktionsvärdet som lösningen ger jämfört med en given iterationspunkt används lösningen för att definiera en ny iterationspunkt, och bollen görs större eller mindre beroende på modellens tillförlitlighet. Ett exempel på en sådan metod, baserad på en modell á lá Newtons metod, ges nedan.

0. (*Initialisering*): Välj en startpunkt $x^0 \in \Re^n$. Välj $\Delta_0 > 0$, $0 < \mu < \nu < 1$. Sätt $t := 0$.
1. (*Minimering av modellen*): Lös problemet

$$\begin{aligned} \min \quad & \psi_t(p) := f(x^t) + \nabla f(x^t)^{\mathrm{T}} p + (1/2) p^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x^t) p, \\ \text{då} \quad & \|p\| \leq \Delta_t. \end{aligned}$$

   Låt p^t beteckna en optimallösning till detta problem.
2. (*Test av modellens tillförlitlighet*): Beräkna

$$r_t := \frac{f(x^t) - f(x^t + p^t)}{f(x^t) - \psi_t(p^t)},$$

   dvs. kvoten mellan den verkliga och modellens predikterade förbättring av målfunktionsvärdet. Låt

$$x^{t+1} := \begin{cases} x^t, & \text{om } r_t \leq \mu \text{ (misslyckad iteration)}, \\ x^t + p^t, & \text{om } r_t > \mu \text{ (lyckad iteration)} . \end{cases}$$

3. (*Uppdatering av bollens storlek*): Låt

$$\Delta_{t+1} := \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta_t, & \text{om } r_t \leq \mu \text{ (liten tillförlitlighet)}, \\ \Delta_t, & \text{om } \mu < r_t < \nu \text{ (hyfsad tillförlitlighet)}, \\ 2\Delta_t, & \text{om } r_t \geq \nu \text{ (stor tillförlitlighet)}. \end{cases}$$

   Låt $t := t + 1$ och gå till Steg 1.

Visa att p^t löser det linjära ekvationssystemet (I^n är enhetsmatrisen i $\Re^{n \times n}$)

$$[\nabla^2 f(x^t) + \lambda I^n] p = -\nabla f(x^t)$$

för något $\lambda \geq 0$ där $\nabla^2 f(x^t) + \lambda I^n$ är positivt semidefinit.

Antag nu att $\nabla^2 f(x^t)$ är positivt definit, och utred hur p varierar då λ varierar mellan 0 och $+\infty$. Med ledning av detta, tolka metoden ovan i termer av sökmetoder och ange en motivering till när den är att föredra framför sökmetoder.

3.7.8 (Tentamensuppgift 980819)
Betrakta optimeringsproblemet
[P]

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ \text{då} \quad & x \in \Re^n, \end{aligned}$$

där $f : \Re^n \mapsto \Re$ är kontinuerligt differentierbar.
Låt $\{x^t\}$ vara en sekvens av iterationspunkter som genererats av någon algoritm för lösandet av [P], och antag att för denna sekvens gäller att $\{\nabla f(x^t)\} \to 0^n$, alltså att gradienten konvergerar mot noll (vilket är ett önskvärt beteende). Den aktuella frågan är vad det betyder för den eventuella konvergensen hos $\{x^t\}$.
Betrakta alltså sekvensen $\{x^t\}$ och också sekvensen $\{f(x^t)\}$ av målfunktionsvärden. Givet antagandet att $\{\nabla f(x^t)\} \to 0^n$, gäller det att $\{x^t\}$ eller $\{f(x^t)\}$ konvergerar eller ens är begränsade? Nämn samtliga fall som kan förekomma när det gäller

konvergensen hos dessa sekvenser. Ange ett exempel, gärna för $n = 1$, för varje fall.

3.7.9 (Tentamensuppgift 980527)
Betrakta problemet
[P]

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x), \\ \text{då} \quad & g_j(x) \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \\ & h_i(x) = 0, \qquad i = 1, \ldots, r, \end{aligned}$$

där $f : \Re^n \mapsto \Re$, $g_j : \Re^n \mapsto \Re$ och $h_i : \Re^n \mapsto \Re$är kontinuerligt differentierbara funktioner. Vi betraktar två specialfall av problemet, [P$_1$] där $m = 0$ (dvs. ett problem med enbart likhetsvillkor) och [P$_2$] där $r = 0$ (dvs. ett problem med enbart olikhetsvillkor).

a) **(1p)** Formulera för [P$_1$] det traditionella straffproblemet, som vi här kallar [P$_1(\mu)$], och för [P$_2$] det logaritmiska barriärproblemet, som vi här kallar [P$_2(\rho)$].

b) **(2p)** Ange optimalitetsvillkoren för de två problemen [P$_1(\mu)$] och [P$_2(\rho)$]. Från dessa optimalitetsvillkor, härled de estimat av KKT-multiplikatorer (Lagrange-multiplikatorer) till [P$_1$] respektive [P$_2$] som man automatiskt kan beräkna. För vart och ett av de två problemen, studera slutligen hur multiplikatorestimaten förändras med respektive straff- och barriärparameter då de växer respektive avtar, och visa att om lösningarna till respektive problem [P$_1(\mu)$] och [P$_2(\rho)$] konvergerar mot KKT-punkter till [P$_1$] respektive [P$_2$] så kommer estimaten att konvergera mot KKT-multiplikatorer för dem.

3.7.10 (Tentamensuppgift 000306)
Betrakta det linjärt begränsade olinjära optimeringsproblemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & f(x), \\ \text{då} \quad & Ax \geq b, \end{aligned}$$

där f är kontinuerligt differentierbar (*en* gång) på $\Re^n$ och där A och b tillhör $\Re^{m\times n}$ respektive $\Re^m$.

a) **(1p)** Antag att x_* är en tillåten punkt i problemet där ingen tillåten descent-riktning existerar. Beskriv algebraiskt vad det betyder för detta problem. Vi antar också att f inte är differentierbar två gånger i x_*. Ange de nödvändiga optimalitetsvillkoren för att x_* skall kunna vara en lokalt optimal lösning till problemet.

b) **(2p)** Härled optimalitetsvillkoren Du beskrev i a) med hjälp av *Farkas Lemma*, som uttrycks som följer: precis ett av följande två linjära system har en lösning:

$$\begin{aligned} (I) \quad & Bx \geq 0 \\ & c^T x < 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(II) \quad B^T y &= c \\
y &\geq 0.
\end{aligned}
$$

3.7.11 Betrakta problemet

$$\min f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + ax_2^2 - 4x_1 + 3x_2$$

a) För vilka värden på a är $f(x_1, x_2)$ en strikt konvex funktion?

b) Är riktningen $d = (1, 1)^T$ en descentriktning i punkten $x = (3, 0)^T$?

c) För vilka värden på a konvergerar Newtons sökmetod till globalt minimum på en iteration?

4 Nätverksproblem

4.1 Modellering

4.1.1 (Tentamensuppgift 990528)

a) **(1p)** Givet är ett nätverk med noder i i en nodmängd $\mathcal{N}$ och riktade bågar (i,j) i en bågmängd $\mathcal{E}$, vardera bågar med flödeskapaciteter $u_{ij} \geq 0$. Formulera problemet att skicka ett maximalt flöde från en nod s i $\mathcal{N}$ till en annan nod t i $\mathcal{N}$ genom nätverket $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$.

b) **(2p)** Formulera LP-dualen till problemet formulerat i deluppgift a). Beskriv maxflödes-minsnittsteoremet, både generellt och med ett illustrativt (icke-trivialt) eget exempel.

4.1.2 (Tentamensuppgift 990308)
Sju sorters paket skall levereras med hjälp av fem bilar. Det finns tre paket av varje sort. Bilarna har kapacitet att leverera 6, 4, 5, 4 respektive 3 paket. I varje bil kan lastas högst ett paket av vardera sort.

a) **(2p)** Formulera en optimeringsmodell som beskriver problemet att avgöra huruvida det är möjligt att utföra hela leveransen. Vilken typ av nätverksmodell har du formulerat? Lös ej!!

b) **(1p)** Antag att inte alla bilar kan transportera alla sorters paket. Låt $\times$ på plats (i,j) markera att bil i *inte* kan leverera paket av typ j:

Pakettyp	1	2	3	4	5	6	7
Bil 1		$\times$			$\times$		
Bil 2		$\times$		$\times$			
Bil 3	$\times$		$\times$				
Bil 4							
Bil 5				$\times$		$\times$	

Genomför de ändringar som krävs i din modell. Av vilken typ är den nya modellen? Lös ej!!

4.1.3 Betrakta följande optimeringsmodell, vilken beskriver problemet att till lägsta kostnad skicka flöde av flera produkter genom ett nätverk.

$$
\begin{aligned}
\min z = \sum_{k\in K} \sum_{(i,j)\in B} c_{ij}^k x_{ij}^k & & & \\
\text{då} \qquad A x^k &= d^k & & k \in K \\
\sum_{k\in K} x_{ij}^k &\leq u_{ij} & & (i,j) \in B \\
x_{ij}^k &\geq 0 & & k \in K,\ (i,j) \in B
\end{aligned}
$$

Här är:

$$\begin{array}{lcl} K & = & \text{mängden av produkter} \\ B & = & \text{mängden av bågar} \\ A & = & \text{anslutningsmatrisen för nätverket} \\ x_{ij}^k & = & \text{flöde av produkt } k \text{ på båge } (i,j) \\ x^k & = & \text{vektor med alla bågflöden av produkt } k \\ c_{ij}^k & = & \text{kostnad per flödesenhet av produkt } k \text{ på båge } (i,j) \\ d^k & = & \text{vektor med nodstyrkor (tillgång/efterfrågan) för produkt } k \\ u_{ij} & = & \text{kapacitet på båge } (i,j). \end{array}$$

Beskriv hur Lagrangerelaxation kan användas för att angripa problemet. Hur ser de relaxerade problemen ut och hur löser man dem? Hur uppdateras multiplikatorerna?

4.1.4 Det generaliserade tillordningsproblemet kan formuleras som

$$\begin{array}{llcll} \min z = & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} & \leq & b_i & i = 1,..,m \quad (1) \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & 1 & j = 1,..,n \quad (2) \\ & x_{ij} & \in & \{0,1\} & i = 1,..,m; j = 1,..,n. \end{array}$$

Om problemet ska lösas genom att utnyttja Lagrangerelaxation kan antingen villkoren (1) eller (2) relaxeras. Formulera de relaxerade problemen i de båda fallen. Vilka problemtyper erhålls och hur löses de? Vilket Lagrangedualt optimalvärde ger den starkaste optimistiska uppskattningen av det givna problemets optimalvärde?

4.1.5 Ett företag tillverkar fyra olika sorters lådor av olika volym. Efterfrågan som måste uppfyllas och storlek på lådorna framgår av tabell 16. Den rörliga kostnaden för att tillverka en låda är lika med lådans volym. En fast kostnad på 1000 kr uppstår för respektive lådtyp om någon låda av den storleken tillverkas. Om företaget vill så kan man tillfredsställa efterfrågan av en viss lådtyp med en större låda. Formulera ett billigaste vägproblem för att minimera företagets kostnad för lådtillverkning.

Låda	1	2	3	4
Storlek (dm^3)	33	30	26	24
Efterfrågan	400	300	500	700

Tabell 16: Storlek och efterfrågan på lådor i uppgift 4.1.5.

4.1.6 I ett produktions-distributionssystem ingår två fabriker och två varuhus. Problemet är att bestämma ett minsta kostnadsprogram för två månader, inkluderande tillverkning och (eventuell) lagring vid tillverkningsställena samt transport till varuhusen. Tabellerna 17 och 18 presenterar relevanta data.

Formulera som ett nätverksproblem.

	Tillverkn.kostn. (tkr)		Kapacitet (st)		Lagerkostnad (tkr/mån, st)
Fabrik	Mån 1	Mån 2	Mån 1	Mån 2	
1	6	7	73	66	1
2	7	8	29	24	2

Tabell 17: Kostnader och kapaciteter för fabrikerna, uppgift 4.1.6.

Transp.kostn. (tkr/st)	Varuhus 1	2
Fabrik 1	1	0
Fabrik 2	2	4

	Efterfrågan (st)	
Varuhus	Mån 1	Mån 2
1	62	65
2	14	44

Tabell 18: Transportkostnader och efterfrågan, uppgift 4.1.6.

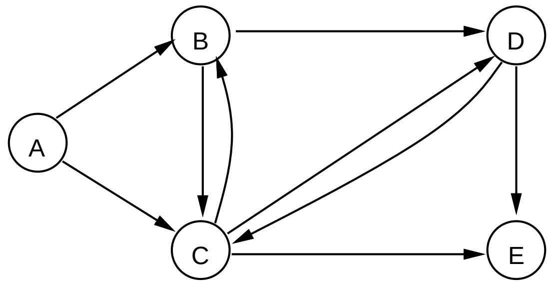
4.1.7 Ett företag har följande optimeringsproblem. Företaget har k st fabriker. Varje fabrik har en maximal produktionskapacitet på $s_i, i = 1, 2, ..., k$, enheter. Produktionskostnaden ges av den icke-separabla funktionen $g(y) = g(y_1, y_2, ..., y_k)$, där y_k = antal producerade enheter vid fabrik k. Det finns m st kunder, med efterfrågan $b_j, j = 1, 2, ..., m$, enheter. Att transportera en enhet vara från fabrik i till kund j kostar c_{ij} kronor.
Formulera företagets problem att bestämma produktionsnivån för varje fabrik och att till minsta totalkostnad tillgodose kundernas efterfråga. Ge också en enkel nätverksmodell för problemet.

4.2 Övrigt

4.2.1 Ett mycket viktigt telefonsamtal har beställts av en högt uppsatt person, och om samtalet bryts kommer det att få förödande konsekvenser för samtliga inblandade (även telefonbolaget). Eftersom samtalet är så viktigt har man på telefonbolaget TeleX beslutat att koppla upp det på ett så säkert sätt som möjligt. Personen i fråga befinner sig i staden A och samtalet har beställts till stad E. Förbindelser kan etableras enligt figur 5.
Sannolikheten för avbrott på teleförbindelserna är:

Förbindelse	Sannolikhet	Förbindelse	Sannolikhet
A $\rightarrow$ B	0,2	C $\rightarrow$ D	0,1
A $\rightarrow$ C	0,2	D $\rightarrow$ C	0,05
B $\rightarrow$ C	0,3	C $\rightarrow$ E	0,25
C $\rightarrow$ B	0,1	D $\rightarrow$ E	0,2
B $\rightarrow$ D	0,1		

Sannolikheten för avbrott på olika förbindelser är oberoende av varandra. Sök den



Figur 5: Nätverk till uppgift 4.2.1.

uppkoppling från A till E som skall användas för att sannolikheten att samtalet ej avbryts skall vara så stor som möjligt.

4.2.2

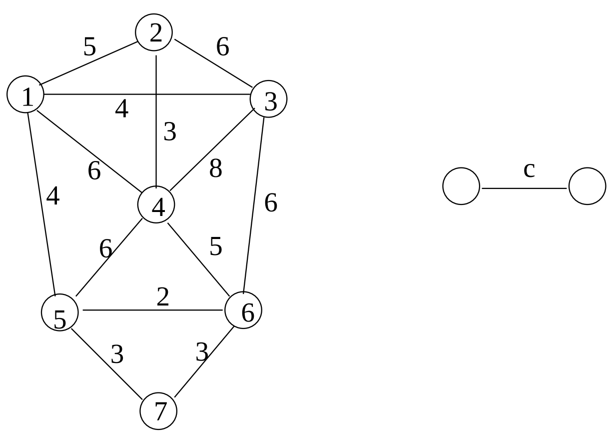
a) Formulera det allmänna transportproblemet i en tudelad graf med m källor och n sänkor.

b) Formulera LP-dualen till det i a) formulerade primala problemet.

c) Förklara vad som menas med begreppet heltalsegenskap. Har ett transportproblem heltalsegenskap? Motivera!

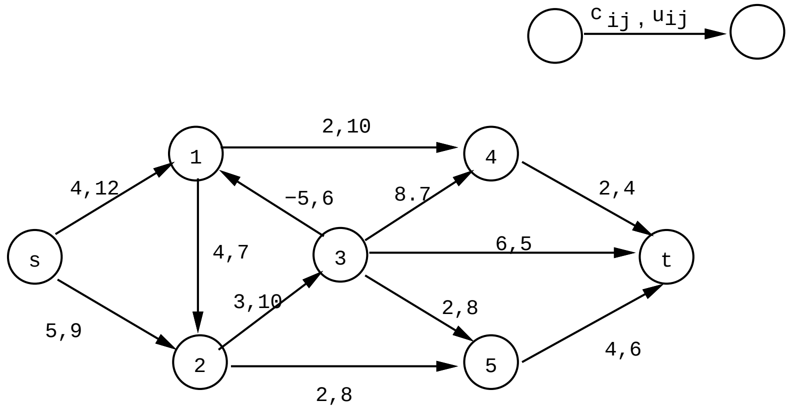
d) Visa att adderandet av en konstant till alla målfunktionskoefficienter i ett balanserat transportproblem *ej* förändrar optimallösningen till problemet (förutom optimalvärdet).

4.2.3 Finn ett billigaste uppspännande träd i grafen i figur 6.



Figur 6: Graf till uppgift 4.2.3.

4.2.4 Betrakta det kapaciterade nätverk med bågkostnader i figur 7.



Figur 7: Kapaciterat nätverk till uppgift 4.2.4.

a) Hur ser anslutningsmatrisen till nätverket ut?

b) Hur ser högerledet i LP-formuleringen av billigast-vägproblemet ut om
i) billigaste väg från n_s till n_t sökes?
ii) billigaste väg från n_s till *alla andra* noder sökes?

c) Finn billigaste väg från n_s till n_t i nätverket.

d) Finn en väg av maximal kapacitet från n_s till n_t i nätverket.

e) Formulera Bellmans ekvationer för problemen i c) och d).

4.2.5 Antag att vi söker en väg från nod n_s till nod n_t i ett nätverk med bågkostnader. Vägen ska ha följande egenskaper:

1. Den ska bestå av så få bågar som möjligt.
2. Den ska vara billigast bland alla vägar med egenskapen 1.

Hur ska målfunktionen i LP-formuleringen av billigaste väg problemet se ut för att ge en lösning med dessa egenskaper.

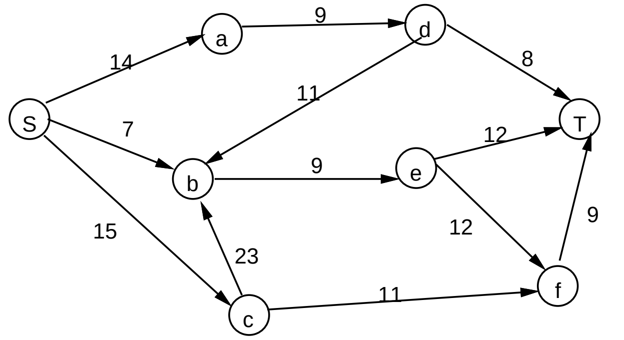
4.2.6 En sabotagegrupp vill hindra en vapentransport att gå från ort S till ort T. Kartan i figur 8 visar möjliga transportvägar. För varje vägsträcka är angivet hur många lådor dynamit som åtgår för att förstöra just den sträckan. Man önskar minimera antalet lådor dynamit som totalt åtgår. Vilka vägsträckor ska sprängas? Använd standardmetod!

4.2.7

a) Vad menas med att ett problem har heltalsegenskap?

b) Vilket/vilka av följande problem har denna egenskap?

– billigaste väg problem



Figur 8: Transportvägar till uppgift 4.2.6.

- billigaste uppspännade träd
- maxflödesproblem
- tillordningsproblem
- kappsäckproblem
- handelsresandeproblem

4.2.8 Betrakta följande problem.

$$\begin{array}{rlll} v_1^* = & \max & c^T x \\ & & Ax \le b \\ & & 0 \le x \le 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rlll} v_2^* = & \max & c^T x \\ & & Ax \le b \\ & & x \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} v_3^* = & \max & c^T x \\ & & Ax \le b \\ & & x \ge 0, \text{ heltal} \end{array} \qquad \begin{array}{rlll} v_4^* = & \max & c^T x \\ & & Ax \le b \\ & & x \in \{0,1\} \end{array}$$

a) Vilka förhållanden gäller mellan de optimala målfunktionsvärdena v_1^*, v_2^*, v_3^* och v_4^*? (Det är ej säkert att det går att uttala sig om alla par.)

b) Som i a), men under antagandet att matrisen A är fullständigt unimodulär. (Antag att b är heltalig.)

4.2.9 Betrakta den riktade grafen i figur 9.

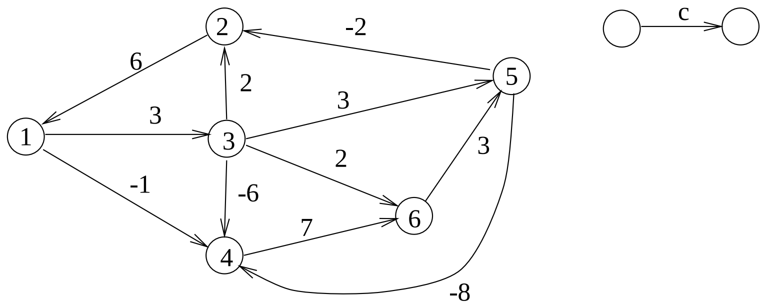
a) Bestäm billigaste väg från nod 1 till alla andra noder.

b) Hur mycket kan kostnaden på båge (3,4) ändras utan att optimallösningen i a) blir icke-optimal?

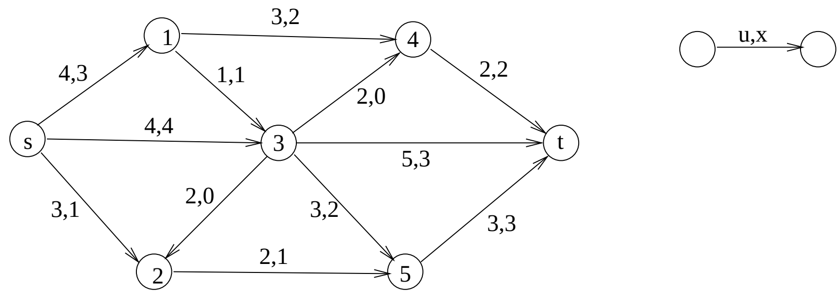
c) Formulera problemet i a) som ett LP-problem.

d) Ange den duala optimallösningen till problemet i a).

e) Formulera, i generella termer, Bellmans ekvationer för problemtypen i a).



Figur 9: Graf till uppgift 4.2.9.



Figur 10: Nätverk till uppgift 4.2.10.

f) Kan problemet i a) lösas med dynamisk programmering? Motivera!

4.2.10 Betrakta nätverket i figur 10.

a) Bestäm maximalt flöde från nod s till nod t. Utgå från givet flöde.

b) Formulera i ord maxflödes-minsnitts-teoremet och verifiera att optimallösningen i a) uppfyller teoremet.

c) Antag att alla bågar har kostnad ett och att vi söker ett minkostnadsflöde av styrka 8 från nod s till nod t. Vilka bågar utgör basbågar i den i deluppgift a) givna lösningen? Är den optimal?

4.2.11

a) Finns det alltid en heltalig optimallösning till ett minkostnadsflödesproblem?

b) Hur många variabler har ett tillordningsproblem av storlek (6x6)?

c) Existerar en billigaste väg i ett nätverk med bara negativa bågkostnader?

d) Varför finns det alltid alternativa optimala duala lösningar till ett minkostnadsflödesproblem?

4.2.12 Två städer, A och B, producerar 500 respektive 400 ton hushållsavfall per dag. Avfallet transporteras till och bränns vid någon av anläggningarna C och D, båda

med kapacitet 500 ton per dag. Kostnader för bränning vid C och D är 320 kr/ton respektive 240 kr/ton. Vid bränningen omvandlas avfallet till slagg. Ett ton avfall ger 200 kg slagg. Slagget transporteras vidare och dumpas vid någon av anläggningarna E och F. Varje slutstation kan ta emot 150 ton slagg per dag. Ingen kostnad uppstår då slagget dumpas.
Transportkostnaderna är 150 kr per ton och mil, både för avfall och slagg. Avstånden (i mil) mellan platserna ges i tabell 19.

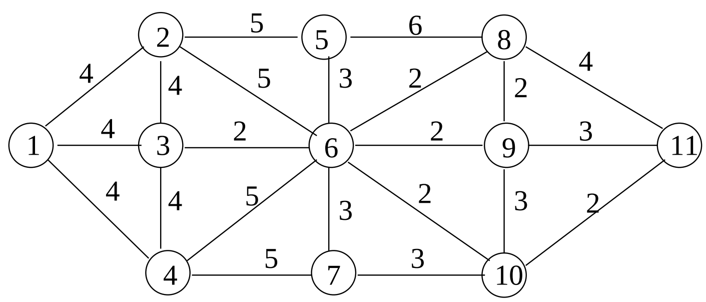
	A	B	E	F
C	7	8	1	3
D	1	9	3	2

Tabell 19: Avstånd mellan platserna i uppgift 4.2.12.

Formulera ett nätverksproblem som bestämmer minsta kostnad för att transportera och bränna avfallet samt transportera och dumpa slagget. Rita nätverket och ange nod- och bågdata. Lös ej.

4.2.13

a) Finn ett billigaste uppspännande träd i grafen i figur 11.



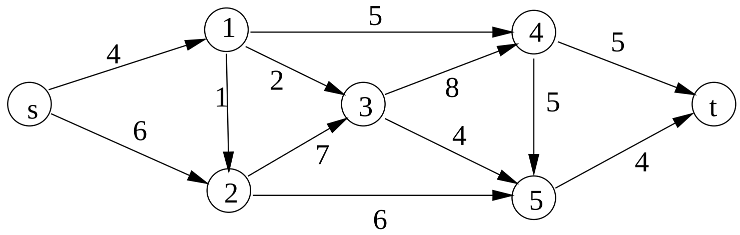
Figur 11: Graf till uppgift 4.2.13.

b) Antag att en båge (i, j) som ingår i trädet, får nya kostnaden $c_{ij} + \delta$, där $\delta > 0$. Föreslå en reoptimeringsteknik som finner ett billigaste uppspännande träd för den nya situationen. Illustrera för grafen ovan, då c_{36} ändrar sitt värde från 2 till 6.

4.2.14 I nätverket i figur 12 sökes de billigaste vägarna från nod s till all andra noder. Talen på bågarna anger bågkostnaderna.

a) Någon presenterar för oss ett basträd innehållande bågarna $(s, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$ och $(4, t)$, och påstår att det löser det givna problemet. Utnyttja optimalitetsvillkoren för att visa att påståendet är falskt.

b) Generera algoritmiskt ett billigaste väg-träd som löser det givna problemet. Trädet givet i a) skall utnyttjas som startlösning.



Figur 12: Nätverk till uppgift 4.2.14.

4.2.15

a) Betrakta en riktad graf $G = (N, A)$ och avgör sanningshalten hos nedanstående påståenden. Motivera!

I. Om alla bågar i A har olika kostnader så finns ett unikt billigaste vägträd.

II. Om alla bågkostnader ökas med en konstant $k > 0$ så förändras inte en billigaste väg från s till t.

III. Om alla bågkostnader ökas med en konstant $k > 0$ så ändras den billigaste vägkostnaden med en multipel av k.

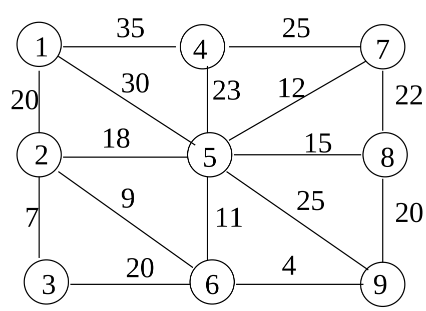
b) Betrakta en oriktad graf $G = (N, E)$ och avgör sanningshalten hos nedanstående påståenden. Motivera!

I. Om alla bågar i A har olika kostnader så finns det ett unikt billigaste uppspännande träd.

II. Om alla bågkostnader ökas med en konstant $k > 0$ så förändras inte ett billigaste uppspännande träd.

III. Om alla bågkostnader ökas med en konstant $k > 0$ så ändras den billigaste uppspännande trädet med en multipel av k.

4.2.16 Betrakta grafen i figur 13.



Figur 13: Graf till uppgift 4.2.16.

a) Finn ett billigaste uppspännande träd.

b) Antag att vi har bestämt ett billigaste uppspännande träd i en graf $G = (N, E)$. Redogör för hur man kan reoptimera trädet då följande förändringar uppkommer i grafen.

I) En båge $(i, j) \in E$ tas bort från grafen.

II) En båge $(i, j) \notin E$ läggs till grafen.

5 Heltalsprogrammering

5.1 Modellering

5.1.1 (Tentamensuppgift 010523)
Ett stort försäljningsföretag vill bygga ett antal distributionscentraler som tillsammans skall förse 30 olika varuhus med varor. Man har tio olika platser att välja mellan. Att bygga på plats i kostar c_i pengar och kapaciteten hos central i (mätt i volymenheter per vecka) är k_i, $i = 1, \ldots, 10$. Varuhus j har en efterfrågan på e_j volymenheter per vecka som skall tillgodoses, $j = 1, \ldots, 30$. Avståndet mellan plats i och varuhus j är d_{ij} km, $i = 1, \ldots, 10$, $j = 1, \ldots, 30$, och en viss central kan serva ett visst varuhus endast om avståndet mellan dem är högst D km. Man vill minimera kostnaden för investeringen i distributionscentralerna.

a) **(2p)** Formulera en *linjär heltalsmodell* som beskriver problemet att bestämma på vilka platser man skall bygga centraler.

b) **(1p)** Antag att varje varuhus endast får servas av *en* central. Hur förändras din modell?

5.1.2 (Tentamensuppgift 010319)
Mejeribolaget Mula har just fått ett kontrakt från lågpriskedjan Öca om att förse samtliga Öcas M butiker med mejeriprodukter av tre olika kategorier (mjölk, ost och övrigt). Butik m behöver b_{mi} ton varor av kategori i varje dag. För att genomföra leveranserna så måste Mula bygga upp ett nät av distributionscentraler över den svenska landsbygden. Byggandet underlättas av att Mula har utarbetat K olika standardcentraler vilka dagligen kan leverera c_{ki} ton av produkt i. Att bygga en central av typ k kostar d_k kronor. Mula har även letat upp N lämpliga platser att placera sina centraler på, och man kan bygga maximalt en central per plats. Kostnaden för att förse en kund m med varor av typ k från central n är uppdelad i två delar: p_{mnk} är en fast kostnad för att över huvud taget skicka ut en bil till kunden och q_{mnk} är kostnaden per ton.
Enligt kontraktet är det även möjligt att ej förse en butik med den mängd de önskar. Om vi gör detta så måste vi betala ett straff om t kronor per butik som ej får vad de behöver, samt s kronor per ton behov som ej tillfredställs.
Formulera ett linjärt heltalsproblem som skall lösas för att minimera Mulas kostnader för att uppfylla kontraktet.

5.1.3 (Tentamensuppgift 000823)
I en större stad har man beslutat att bygga två nya vårdcentraler. Den gamla befintliga vårdcentralen kommer att läggas ner när de nya tas i bruk. Det finns fem tomter där man kan få bygglov; kostnaden för byggnation på tomt i är c_i (kronor). Man har en gemensam budget, b (kronor), för byggprojekten; denna får inte överskridas. Kapaciteten, räknat i antal invånare som kan betjänas av en vårdcentral, varierar

också mellan de olika tomterna, eftersom dessa är olika stora. En vårdcentral på tomt i kan betjäna totalt högst k_i invånare. Regionen som de nya vårdcentralerna skall betjäna är indelad i 18 geografiska områden; alla invånare i ett område skall höra till samma vårdcentral; område j har a_j invånare. Kapaciteten hos de nya vårdcentralerna måste räcka till för invånarna i alla deras respektive tillhörande geografiska områden. Avståndet mellan tomt i och område j är d_{ij}.

a) **(2p)** Formulera en linjär heltalsmodell för att bestämma vilka två tomter som skall användas till vårdcentraler då målet är att det genomsnittliga avståndet för alla invånare till "sina" respektive vårdcentraler skall vara så litet som möjligt. (Minimera samhällets totala transportkostnader för den öppna sjukvården.)

b) **(1p)** Justera modellen så att i stället den längsta transportvägen mellan ett bostadsområde och dess vårdcentral skall vara så kort som möjligt. (Fördela den öppna sjukvården geografiskt så rättvist som möjligt.)

5.1.4 (Tentamensuppgift 990528)
Sex kamrater, vilka tröttnat på det hårda studentlivet, har beslutat sig för att öppna ett café. Caféet skall ha öppet tisdag–söndag och nu återstår problemet att fördela arbetsdagarna så att alla arbetar lika mycket. Bemanningen av caféet kräver att fyra personer arbetar samtidigt. Dock har endast två av kamraterna lyckats att lära sig att sköta den extremt komplicerade espressomaskinen (en manuell La Pavoni från 1921), som kräver en persons ständiga uppsikt. Man har kommit överens om att ingen skall behöva arbeta fler än fyra dagar i veckan.
För att fördela arbetsdagarna så gott det går enligt allas önskemål har man skapat ett system där var och en får poängsätta dagarna med tillsammans 100 poäng, där fler poäng representerar ett önskemål om att hellre arbeta den dagen. Om till exempel person A helst arbetar tisdag men helst inte onsdag och torsdag skulle denne kunna ge dagarna följande poäng:

Veckodag	Poäng
Tisdag	40
Onsdag	0
Torsdag	0
Fredag	20
Lördag	20
Söndag	20

a) **(2p)** Formulera problemet att lägga ett schema vilket maximerar kompanjonernas sammanlagda lycka (lycka definieras som antalet uppfyllda poäng) och samtidigt tillgodoser caféets krav på bemanning. Modellen skall vara en *linjär* heltalsmodell.

b) **(1p)** Antag att caféägarna bestämmer sig för att vara solidariska, och i stället som målsättning anger en maximal lycka hos den person som blir mest olycklig, för att på så vis balansera lyckan inom gruppen. Formulera om modellen från a) för att uppnå detta mål. Observera att den slutliga modellen fortfarande skall vara en *linjär* heltalsmodell (de vill ju kunna lösa problemet också!)

5.1.5 (Tentamensuppgift 000324)
(Matematisk modellering—personalplanering)
Data för antalet medarbetare, r_t, som behövs varje månad t inom ett 10 månader långt projekt i ett företag anges i en tabell nedan. Ingen underbemanning tillåts i någon månad. Företaget kan projektanställa i början av varje månad för att uppfylla behovet i den månaden eller någon senare månad. Det är en fix kostnad s_t kronor associerad med att rekrytera i en viss månad t, som är oberoende av hur många som rekryteras då (en fix kostnad uppstår för annonsering, kostnader för att ordna med intervjuer, etc.). Varje person som är anställd under en månad t utöver behovet i månaden belastar företaget med en extra kostnad på c_t kronor under månaden. En person som rekryterats en viss tidsperiod måste av fackliga skäl få behålla sin anställning i minst tre månader, eller till projektets slut om han/hon anställs när det är mindre än tre månader kvar av perioden. Antag att ingen personal finns till hands vid tiden $t = 0$.

Månad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_t	79	34	52	61	25	89	56	29	48	34
s_t	728	705	698	714	708	739	695	704	689	712
c_t	15	12	16	14	16	12	15	17	12	13

Den totala kostnaden består av den fixa kostnaden för rekrytering av personal och den extra kostnaden för en för stor mängd anställd personal. Formulera ett optimeringsproblem för att finna antalet personer som i varje månad skall projektanställas eller avskedas, så att den totala kostnaden minimeras.

5.1.6 (Tentamensuppgift 980527)
Högsta domstolen har på senare tid fått alltfler ärenden att behandla, och en effektivare planering av verksamheten har blivit nödvändig. Man vänder sig då till Er, som i egenskap av optimeringskonsult har hjälpt andra statliga verksamheter med sina planeringsproblem (oftast med lyckat resultat). Problemet som beskrivs för Er kan (en aning förenklat) beskrivas som följer:
Planeringshorisonten är n veckor. Under dessa n veckor flyter det in ärenden som kan indelas i m olika typer. Det flyter in h_{ij} ärenden av typ i under vecka j, och varje ärende av typ i tar (approximativt) a_i timmar att behandla. Under vecka j finns b_j timmar till förfogande för domstolsförhandlingar. Er uppgift är att formulera en matematisk optimeringsmodell som kan användas för planeringen. Det har framförts till Er att ett önskemål är att tiden det tar för ett ärende att bli behandlat efter det att det har blivit inlämnat skall vara litet.

5.1.7 (Tentamensuppgift 980309)

a) **(2p)** 5000 fungerande enheter av en diskret produkt skall tillverkas under en dag. Det finns fyra tillgängliga maskiner för att tillverka produkten, men deras produktionshastighet, -kostnad och förväntad andel defekta produkter varierar mellan dem. (Data ges i nedanstående tabell.) Formulera en matematisk modell för problemet att finna en produktionsplan som (förväntat) uppfyller efterfrågan till lägsta kostnad. Klassificera modellen.

Maskin	Uppstartnings-kostnad (kr)	Produktions-kostnad (kr/enhet)	Kapacitet (enheter)	Andel defekta produkter (%)
1	400	4	2000	10
2	1000	6	4000	5
3	600	2	1000	15
4	300	5	3000	8

b) **(1p)** Andelen defekta produkter hos en maskin är naturligtvis inte känd med säkerhet, utan är bara ett medelvärde hos en stokastisk variation. Om den verkliga felprocenten överstiger den förväntade, kan följden bli att efterfrågan inte kan tillgodoses, med förlorade kontrakt, stämningar, etc., som följd. Vi är alltså intresserade av en produktionsplan som, så långt det är möjligt, tillgodoser efterfrågan, dock fortfarande till en minimal kostnad.

Diskutera någon utvidgning av modellen i a) som medger ett säkrare uppfyllande av efterfrågan, dock utan att därför öka kostnaderna astronomiskt.

5.1.8 Ett visst stålgrossistföretag säljer bl a stålbalkar av olika dimensioner. Då man får order på en balk av visst tvärsnitt och längd, så kapar man den normalt från en längre balk.
Vid ett visst tillfälle har man för en viss tvärsnittsdimension inneliggande order om längder $l_j,\ j = 1, ..., N$. Dessa kan kapas ur långa balkar av längder $L_i,\ i = 1, ..., M$. Man vill nu placera in orderna på de långa balkarna, så att spillet från *utnyttjade* balkar blir minimalt. (Ej utnyttjade balkar räknas alltså inte in i spillet.)
Formulera ett optimeringsproblem.

5.1.9 Den kände låtskrivaren och rockartisten Alfons Ask funderar på följande problem. Till hösten skall ett antal låtar från hans 6 skivor ges ut i form av ett samlingsalbum bestående av 2 CD. Varje CD får innehålla högst 1 timmes effektiv speltid. Alfons har poängsatt varje låt på de 6 skivorna, som vardera innehåller 10 låtar, och noterat deras speltid (i sekunder). För att hans utveckling som artist skall speglas i samlingen vill han att minst 2 låtar från varje skiva kommer med. Han vill förstås också att samlingens poängsumma skall vara så stor som möjligt.
Formulera Alfons problem att välja låtar till samlingsalbumet som ett linjärt 0/1-problem. Inför själv nödvändiga beteckningar och definiera dem noga.

5.1.10 En basketbollcoach ska välja startuppställning (5 spelare) inför kvällens match. Hon har sju spelare att välja bland och hon har bedömt varje spelares förmåga i fyra viktiga spelmoment: passningar, skott, returer och försvar (1=dålig, 2=bra, 3=utmärkt). Dessa ges av tabell 20. Där anges också vilken position respektive spelare kan ha i laget (G=guard, F=forward, C=center).
Startuppställningen måste uppfylla följande krav:

- Minst 3 spelare måste kunna spela guard, minst 2 spelare måste kunna spela forward och minst en spelare måste kunna spela center.

– Genomsnittlig förmåga i vardera av momenten passningar, skott och returer måste vara minst 2.

– Om spelare nr 3 startar, så kan inte spelare 6 starta.

– Om spelare nr 1 startar, så måste både spelare nr 4 och 5 starta.

– Antingen startar spelare nr 2 eller så startar spelare nr 3.

Coachen vill välja spelare så att försvarsförmågan i laget maximeras. Formulera coachens problem som ett heltalsproblem. Lös ej!

spelare	position	passningar	skott	returer	försvar
1	G	3	3	1	3
2	C	2	1	3	2
3	G,F	2	3	2	2
4	F,C	1	3	3	1
5	G,F	1	3	1	2
6	F,C	3	1	2	3
7	G,F	3	2	2	1

Tabell 20: Spelares förmåga, uppgift 5.1.10.

5.1.11 En mindre kommun i södra Sverige måste spara pengar och har beslutat att lägga ner en eller flera brandstationer. Idag finns stationer på 5 orter. Man beräknar att man sparar dubbelt så mycket på att lägga ner stationen i ort A eller ort C, jämfört med att lägga ner någon av stationerna i orterna B, D eller E. Säkerhetskraven säger att det måste finnas minst en station inom 15 min åktid från varje ort. I tabell 21 anges avstånden (i åktid) mellan de 5 orterna.

	Till				
Från	A	B	C	D	E
A	0	10	20	30	30
B	10	0	25	35	15
C	20	25	0	15	30
D	30	35	15	0	15
E	30	15	30	15	0

Tabell 21: Avstånd mellan orter i uppgift 5.1.11.

Vilken/vilka brandstationer ska läggas ned för att spara mest pengar? Formulera som ett linjärt heltalsproblem.

5.1.12 Villaägare Linnea har tänkt bygga ett staket. Till detta behöver hon 90 st en-meters plankor och har därför åkt till trävarufirman Plank&Spik, vilken kan erbjuda 4 olika längder (1m, 2m, 4m och 5m). Kostnaderna (per längd) är 36:-, 70:-, 145:- respektive 170:-. Av längden 5m har man endast 15 st och dem säljer man antingen samtliga eller ingen alls. På övriga längder lämnar man mängdrabatt. För var tionde man köper av längd 4m får man en på köpet. Köper man minst 15 st av längd 1m lämnas en rabatt på 50:-, detsamma gäller för längden 2m. Om Linnea köper paketet med 5m-längder kan hon av transportskäl inte köpa några 4m-längder. Formulera en matematisk modell som beskriver Linneas problem att köpa in plankor till ett så lågt totalpris som möjligt.

5.1.13 Tre olika jobb ska passera tre olika maskiner. Varje jobb måste först passera maskin 1, därefter maskin 2 och slutligen maskin 3. Jobben kan dock tas i olika ordning vid varje maskin. Antag att t_{ij} betecknar processtiden för jobb i vid bearbetning i maskin j och att denna tid är given och heltalig för samtliga jobb och maskiner. Målet är att minimera den tid det tar att få alla jobb färdiga. Formulera som ett heltalsproblem. (Ledning: Låt x_{ij} beteckna starttiden för jobb i vid maskin j. Formuleringen måste förhindra lösningar där två jobb bearbetas samtidigt på en maskin, samt se till att ett jobb inte påbörjas i maskin $j+1$ innan det har bearbetats i maskin j.)

5.1.14 Linus har i uppdrag att möblera lobbyn till ett stort hotell. Totalt skall det finnas minst 50 sittplatser i form av fåtöljer och soffor. En fåtölj (med en sittplats) kostar 3500 kr. Sofforna finns i tre varianter med 2, 3 och 4 sittplatser, och kostar 6000, 8000 respektive 10 000 kr styck. Minst 25 möbler skall köpas, och minst 10 stycken skall vara fåtöljer. För att möbleringen skall bli enhetlig vill man inte ha både 3-sits och 4-sitssoffor. Om fler än 15 fåtöljer köps får man 10 000 kr i rabatt, och om fler än 25 fåtöljer köps får man 5 stycken extra utan kostnad. Formulera problemet att möblera lobbyn till minimal kostnad som ett linjärt heltalsproblem.

5.1.15 I Montréal faller varje år stora mängder snö och för att förhindra trafikkaos måste snön köras bort. Snön lastas på lastbilar som sedan kör till någon avstjälpningsplats och tippar av snön. Staden är indelad i m st sektorer och all snö i sektor i körs till någon av n möjliga avstjälpningsplatser, där den sedan förvaras (smältningsprocessen antas inte komma igång förrän efter sista snöfallet). Avstjälpningsplats j kan ta emot V_j m^3 snö per år och det kostar f_j dollar per år att hålla plats j öppen (oberoende av snömängd). Snömängden i varje sektor uppskattas till v_i m^3 per år och kostnaden att transportera en kubikmeter snö från sektor i till avstjälpningsplats j är d_{ij} dollar. Vilka avstjälpningsplatser ska användas, och hur ska snön transporteras för att minimera kostnaderna? Formulera som ett heltalsproblem.

5.1.16 Överste Gyllenskalp skall planera en repövning. Mannar från tre regementen skall på billigaste sätt fördelas på tre övningsområden. På regementena A, B och C finns 600, 400 respektive 200 man. Övningsområdena 1, 2 och 3 kan maximalt ta emot 400, 400 respektive 600 man. Totalt 100 man skall dock stanna kvar på sina respektive regementen för att hålla beredskap. (Det finns inga krav på hur dessa 100 skall fördelas mellan regementena.) Översten antar att förflyttningskostnaderna (kr per man) ges av tabell 22.
Formulera problemet att på billigaste sätt fördela mannarna på övningsområdena.

5.1.17

a) Vad menas med ett relaxerat problem?

till	1	2	3
från			
A	5	4	5
B	9	7	8
C	7	6	6

Tabell 22: Förflyttningskostnader, uppgift 5.1.16.

b) Avgör vilket/vilka av följande påståenden om ett heltalsproblem (HP) och motsvarande LP-relaxerade problem (LP) som är sanna:

i) Om LP har en tillåten lösning, så har HP också en tillåten lösning.

ii) Optimala målfunktionsvärdet är i maximerings-fallet alltid strikt större hos LP än hos HP.

iii) Om HP har obegränsat optimum, så har LP också obegränsat optimum.

iv) Om HP har alternativa optimallösningar, så har LP också alternativa optimallösningar.

5.1.18 (Tentamensuppgift 20020311)
En tillverkare av skrivare till datorer har en kedja av återförsäljare och till dessa vill man knyta ett mindre antal serviceverkstäder. Det finns fyra stycken återförsäljare i det aktuella området och man har möjlighet att kontraktera tre olika serviceverkstäder. Återförsäljarna beräknas behöva utnyttja 5, 3, 3 respektive 4 mantimmars service per dag och de tre serviceverkstäderna kan erbjuda 10, 10 respektive 7 mantimmars service per dag. Att skriva kontrakt med de olika verkstäderna kostar 150, 160 respektive 100 kkr. Kostnaden (i kkr) att knyta en viss verkstad till en viss återförsäljare ges av nedanstående tabell.

Återförsäljare	1	2	3	4
Verkstad 1	11	12	14	22
Verkstad 2	27	10	13	9
Verkstad 3	17	18	9	12

Ytterligare restriktioner ges av följande:

- Maximalt två återförsäljare får knytas till verkstad 1.
- Varje återförsäljare får skicka sina uppdrag till endast en verkstad.
- För kontrakterandet har man en budget på 350 kkr som ej får överskridas.

Målet är att minimera de totala kostnaderna för att tillfredsställa återförsäljarnas servicebehov.
Formulera ovanstående problemställning som ett *linjärt* optimeringsproblem med *heltalskrav* på variablerna. *Lös ej!*
Tips: Låt beslutsvariablerna svara mot att skriva/inte skriva kontrakt med de olika serviceverkstäderna och mot att knyta serviceverkstäder till återförsäljare.

5.2 Branch and bound

5.2.1 Använd branch and bound för att hitta en optimallösning till följande problem. Sökstrategi: avsök "$\geq$-grenen" först och gör djup-först-sökning.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\max z = & 7x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & & \\
\text{då} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 15 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & & x_4 & \geq & 1 \\
 & & & & & & & x_j & \geq & 0, \text{ heltal}, j = 1, ..., 4
\end{array}$$

5.2.2 Fem jobb ska utföras på en maskin. Uppsättningstiden för ett jobb beror på vilket jobb som utförs omedelbart före, enligt tabell 23.

före-	jobb				
gångare	1	2	3	4	5
ingen	4	5	8	9	4
1	–	7	12	10	9
2	6	–	10	14	11
3	10	11	–	12	10
4	7	8	15	–	7
5	12	9	8	16	–

Tabell 23: Uppsättningstid, uppgift 5.2.2.

Målet är att bestämma i vilken sekvens jobben ska utföras så att total uppsättningstid minimeras. Designa en algoritm som bygger på trädsökningsmetodik och använd den för att lösa problemet.

5.2.3

a) Lös problemet

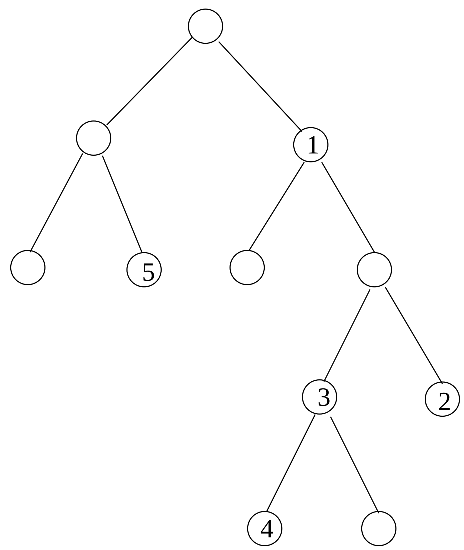
$$\begin{array}{rrcrcl}
\max z = & 6x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{då} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
 & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0, \text{ heltal}
\end{array}$$

med branch and bound. Lös delproblemen grafiskt.

b) Ge de villkor som definierar det konvexa höljet, av de tillåtna lösningarna.

c) Omformulera problemet (mha lämpliga variabelsubstitutioner) till ett linjärt 0/1-problem.

5.2.4 Antag att trädet i figur 14 uppkommit vid lösning av ett heltalsproblem (minimering) med branch and bound.



Figur 14: Träd till uppgift 5.2.4.

Alla noder har avsökts. Fem subproblem är markerade och numreringen anger den ordning i vilken de har behandlats under lösningsgången.
Låt z_j beteckna den optimistiska uppskattning av optimala målfunktionsvärdet som erhålls då subproblem j löses. Låt w_j beteckna den pessimistiska uppskattning av optimala målfunktionsvärdet som är tillgänglig när subproblem j har lösts.

a) Ange relationerna $(\geq, \leq, =)$ mellan z_1, z_2, z_3, z_4 och z_5.

b) Ange relationerna $(\geq, \leq, =)$ mellan w_1, w_2, w_3, w_4 och w_5.

c) Ange relationen $(\geq, \leq, =)$ mellan z_4 och w_3. Motivera!

Observera att det inte säkert går att uttala sig om relationen i alla par av uppskattningar i deluppgifterna a) och b).

5.2.5

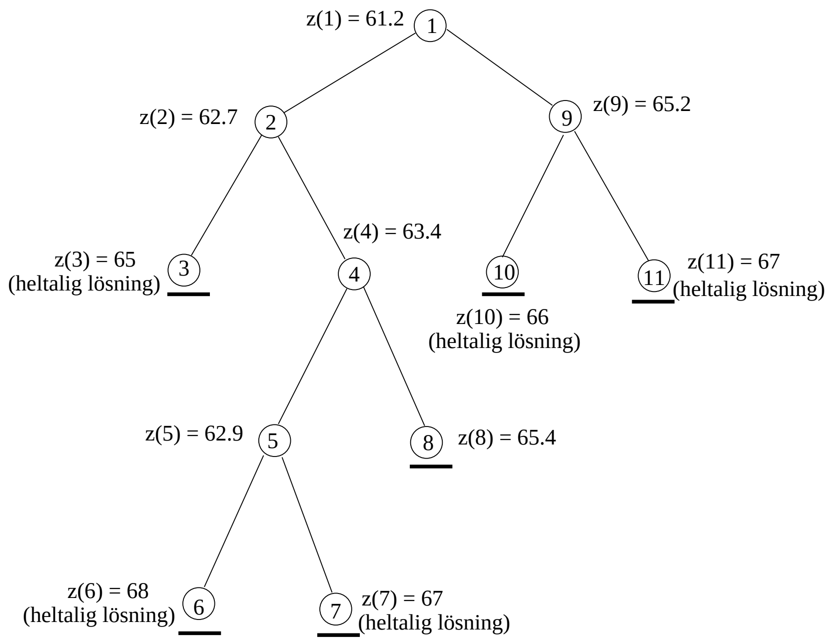
a) Kalle skall lösa ett heltalsproblem (minimering) med trädsökning och har genererat sökträdet i figur 15.

Vi antar att alla koefficienter i problemet är heltaliga. Noderna har undersökts i nummerordning och $z(\cdot)$ anger LP-relaxationens optimalvärde. Har Kalle gjort något fel vid lösningsförfarandet? Motivera!

b) Betrakta ett heltalsproblem (minimering) med optimalvärdet z^*. Antag att i en viss nod i ett sökträd som generats i en trädsökning har LP-relaxationen optimalvärdet z_{LP}. Kan man i nedanstående två fall avgöra om denna LP-lösning tillhör det konvexa höljet av de tillåtna lösningarna? Motivera.

i) $z_{LP} < z^*$

ii) $z_{LP} > z^*$



Figur 15: Sökträd till uppgift 5.2.5.

5.2.6 (Tentamensuppgift 010821)
Givet är följande kappsäcksproblem:

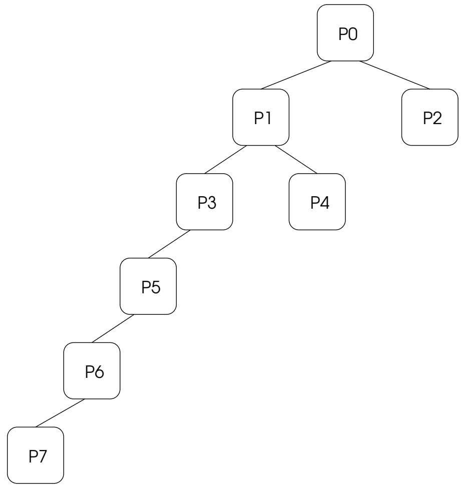
$$\begin{aligned}
\text{maximera} \quad & \sum_{j=1}^{10} c_j x_j, \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{10} a_j x_j \leq b, \\
& x_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1, \ldots, 10,
\end{aligned}$$

där $(a_1, \ldots, a_{10}) = (15, 12, 9, 27, 15, 5, 8, 20, 12, 15)$, $b = 62$ och $(c_1, \ldots, c_{10}) = (30, 19, 13, 38, 20, 6, 8, 19, 10, 11)$. Det kan lösas med hjälp av branch–and–bound-algoritmen, då man relaxerar heltalskraven och förgrenar över fraktionella variabler. Figuren nedan visar ett sökträd som erhållits då ovanstående algoritm tillämpats på exemplet ovan. (0-grenar åt vänster och 1-grenar åt höger.) Observera att $c_{j+1}/a_{j+1} < c_j/a_j$ gäller för $j = 1, \ldots, 9$.

a) **(2p)** Visa, för varje förgrening (nod), vilken variabel som förgrenats över. Beräkna, vid varje nod, värdet på den lösning som erhållits, ange huruvida lösningen är tillåten i ursprungsproblemet eller ej samt ange vilka gränser för det optimala målfunktionsvärdet som gäller i varje del av trädet.

b) **(1p)** Antag att vi inte har hittat någon tillåten lösning till problemet utöver dem/den som har hittats vid lösning av relaxeringarna (subproblemen) vid noderna i trädet. Hur bra är den bästa tillåtna lösningen?

5.2.7



lös problemet

$$\begin{aligned} \text{maximera} \quad & 80x_1 + 11x_2 + 14x_3 + 18x_4 + 10x_5 & & (1) \\ \text{då} \quad & 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \quad \leq 11 & & (2) \\ & x_j \in \{0, 1\} & & (3) \\ & & & (4) \end{aligned}$$

med hjälp av dels B&B, dels en lokalsökningsheuristik.

5.2.8

(Tentamensuppgift 000524) (Kappsäcksproblemet)
Ett binärt kappsäcksproblem definieras som

$$\text{maximera} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1}$$

$$\text{då} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \tag{2}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

där c_j motsvarar nyttan av föremål j, a_j dess vikt och b den största sammanlagda vikt man kan bära. Variablerna definieras som

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{om föremål } j \text{ tas med,} \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi antar att $c_j > 0$ och $0 < a_j < b$ för $j = 1, \ldots, n$ samt att $\sum_{j=1}^{n} a_j > b$.
Om heltalsvillkoren (3) relaxeras till

$$0 \leq x_j \leq 1, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{4}$$

kan det resulterande *kontinuerliga* kappsäcksproblemet lösas med hjälp av girighetsalgoritmen, enligt följande:

i) Sortera föremålen enligt sjunkande ordning av kvoterna $\frac{c_j}{a_j}$, vilket leder till följande relationer: $\frac{c_{j_1}}{a_{j_1}} \geq \frac{c_{j_2}}{a_{j_2}} \geq \cdots \geq \frac{c_{j_n}}{a_{j_n}}$.

ii) Bestäm k sådant att

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_{j_i} \le b < \sum_{i=1}^{k} a_{j_i}.$$

ii) Lösningen till problemet (1)–(2), (4) ges av

$$\bar{x}_{j_i} = \begin{cases} 1, & i = 1, \ldots, k-1, \\ \dfrac{1}{a_{j_k}} \left(b - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} a_{j_i} \right), & i = k, \\ 0, & i = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

a) **(1p)** Låt z^* och $\bar{z}$ beteckna målfunktionsvärdena för optimallösningarna till (1)–(3) respektive (1)–(2), (4). Vilken relation gäller mellan $\bar{z}$ och z^*?

Givet att vi har hittat en lösning $\bar{x}$ till det kontinuerliga problemet (1)–(2), (4), hur kan man, utgående från denna lösning, hitta en *tillåten* lösning till det binära problemet (1)–(3)? Om du vill kan du förklara med hjälp av exemplet i b)-uppgiften nedan.

Kalla målfunktionsvärdet för den tillåtna lösningen z^H. Vilken relation råder mellan z^H och $\bar{z}$? Mellan z^H och z^*?

b) **(2p)** Beskriv Branch–and–Bound-algoritmen tillämpad på det binära kappsäcksproblemet, som utnyttjar girighetsalgoritmen ovan. Specificera de fyra begreppen *relaxering, förgreningsstrategi, trädsökningsstrategi* och *nodkapningskriterium* för din algoritm. Hur kan tillåtenhetsheuristiken i a)-uppgiften utnyttjas i B&B-algoritmen?

Studera följande instans av kappsäcksproblemet:

$$\begin{array}{llllllllll} \text{maximera} & 9x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4, & & \\ \text{då} & 15x_1 & + & 12x_2 & + & 7x_3 & + & 4x_4 & \le & 23, \\ & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \in & \{0,1\}. \end{array}$$

Utnyttja girighetsalgoritmen ovan för att lösa detta problem med hjälp av B&B-algoritmen.

5.2.9 Förklara hur följande krav kan representeras som linjära bivillkor med hjälp av binära heltalsvariabler (0/1-variabler). Samtliga ingående variabler är icke-negativa och mycket mindre än M.

a) Minst ett av villkoren $x_1 + x_2 \le 2$ och $2x_1 + 3x_2 \ge 8$ ska vara uppfyllt.

b) Variabeln x_3 kan (endast) anta värdena 0, 5, 9 eller 12.

c) Åtminstone två av följande fyra bivillkor ska vara uppfyllda.

$$\begin{array}{ccccc} x_4 & + & x_5 & \le & 2 \\ x_4 & & & \le & 1 \\ & & x_5 & \le & 5 \\ x_4 & + & x_5 & \ge & 3 \end{array}$$

d) $x_6 \leq 4 \Rightarrow x_7 \geq 6$ och $x_6 \geq 5 \Rightarrow x_7 \leq 3$.
(På grund av andra bivillkor kan x_6 ej anta värden mellan 4 och 5.)

5.2.10 Lös följande kappsäcksproblem.

$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 6x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 11 \\ & x_j \in \{0,1\}, \forall j \end{array}$$

5.2.11 Lös följande kappsäcksproblem.

$$\begin{array}{rl} \max & 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 9x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 \leq 8 \\ & x_j \in \{0,1\}, \forall j \end{array}$$

5.2.12 Betrakta följande två-kappsäcksproblem

$$\begin{array}{rll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b_1 & (1) \\ & \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \leq b_2 & (2) \\ & x_j \in \{0,1\}, \forall j & \end{array}$$

a) Ge en heuristisk algoritm av girig karaktär.

b) Vilken relation gäller mellan det optimala målfunktionsvärdet för det givna två-kappsäcksproblemet och det optimala målfunktionsvärdet för det kappsäcksproblemet som erhålls genom att ignorera villkoret 1 (eller 2) i det givna problemet?

c) Relationen i b) samt LP-relaxation kan utnyttjas för att generera tre olika "bounds" (uppskattningar, gränser) på det optimala målfunktionsvärdet för det givna två-kappsäcksproblemet genom att lösa (till optimalitet) enkla linjära kappsäcksproblem mha girighet. Karakterisera dessa (som övre- eller undregränser (LBDs eller UBDs)) och välj den starkaste av dem.

d) Specificera en B&B algoritm för det givna problemet genom att ange

- relaxation och UBD generering
- LBD generering
- förgrening
- sökningsteknik
- kapning

5.2.13 Lös följande heltalsproblem med trädsökning (branch and bound).

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max z = & 2x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{då} & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\
& -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \quad \text{heltal}
\end{array}$$

Sökstrategi: förgrena över variabel med störst fraktionell del, avsök "$\geq$-grenen" först och gör djup-först-sökning.

5.2.14 Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcrl}
\max z = & 11x_1 & + & 6x_2 & & & \\
\text{då} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 & (1) \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 7 & (2) \\
& \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \text{heltal.}}
\end{array}$$

a) Lös problemet med branch and bound. Utnyttja att $x = (3, 0)^T$ är en tillåten lösning. Använd djup-först sökning, avsök "$\geq$-grenen" först och förgrena över variabel med störst fraktionell del.

b) Ange grafiskt det konvexa höljet till de tillåtna punkterna i problemet ovan. Vilka punkter måste man känna för att kunna beskriva det konvexa höljet matematiskt? Hur ser denna beskrivning ut?

c) Antag att endast ett av villkoren (1) och (2) behöver vara uppfyllt i optimum. Visa hur detta kan formuleras med linjära villkor och *en* 0/1-variabel.

5.2.15 Ett företag kan investera i fyra olika projekt. Investeringskostnad (I) samt förväntad avkastning (A) anges i tabell 24 (i nuvärde, Mkr). Företaget har totalt 6 Mkr att investera. Vilka projekt ska företaget investera i? Formulera problemet som ett heltalsproblem och lös med trädsökningsmetodik.

projekt	I	A
1	4	7
2	3	5
3	5	8
4	1	1

Tabell 24: Förväntad avkastning, uppgift 5.2.15.

5.3 Övrigt

5.3.1 (Numeriskt exempel på Lagrange-heuristik.)

Betrakta det linjära 0/1-problemet

$$\begin{array}{rlcccccccccl}
z^* = \max\ z = & 5x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & & & \\
\text{då} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \leq & 6 & \quad (1) \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 5 & \quad (2) \\
& x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 & \\
& & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 & \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0/1. &
\end{array}$$

a) Lagrange-relaxera villkoren (1) och (2) med multiplikatorer $u_1, u_2 \geq 0$. Formulera det relaxerade problemet och motsvarande Lagrange-duala problem. Vilka egenskaper har det duala problemet?

b) Evaluera (beräkna värdet på) den Lagrange-duala målfunktionen för $u_1 = u_2 = 1$. Relatera det beräknade värdet till z^*.

c) Beräkna en subgradient till den Lagrange-duala målfunktionen i $u_1 = u_2 = 1$.

d) Finn en tillåten lösning till det ursprungliga problemet genom att på lämpligt sätt modifiera lösningen till det Lagrange-relaxerade problemet (med $u_1 = u_2 = 1$). Relatera det resulterande målfunktionsvärdet till z^*.

e) Hur uppdateras multiplikatorerna i subgradient-optimeringsmetoden? Hur kan resultatet i deluppgift d) utnyttjas vid beräkning av steglängden.

f) Vilken är relationen mellan det Lagrange-duala problemets optimalvärde och z^*? Förefaller det troligt att ett dualitets-gap uppträder? Varför (inte)?

g) Hur förhåller sig optimalvärdet för det Lagrange-duala problemet till optimalvärdet för den kontinuerliga relaxationen (linjärprogrammeringsrelaxationen) av det ursprungliga problemet? Motivera!

5.3.2 (Subgradienter och optimalitet för obegränsade Lagrange-dualer.)
Betrakta det primala problemet

$$\begin{array}{ll}
\min & f(x) \\
\text{då} & g(x) = 0 \\
& \quad x \in X \subseteq R^n,
\end{array}$$

med $f : R^n \to R$ och $g : R^n \to R^m$, samt det tillhörande Lagrange-duala problemet

$$\max_{u \in R^m} h(u),$$

där

$$h(u) = \min_{x \in X} f(x) + u^{\mathrm{T}} g(x),$$

det vill säga optimalvärdet för det Lagrange-relaxerade problemet. Antag att mängden X är kompakt och att funktionerna f och g är kontinuerliga på X. Den duala målfunktionen är då ändlig, konkav och kontinuerlig på det duala rummet, varför Lagrange-dualen är ett konvext problem.

a) Låt $\bar{u} \in R^m$ vara godtycklig. Definiera en subgradient, $\bar{\gamma}$, till h i $\bar{u}$. Definiera också subdifferentialen, $\partial h(\bar{u})$, till h i $\bar{u}$.

b) Låt $x(\bar{u})$ vara en lösning till problemet

$$\min_{x \in X} f(x) + \bar{u}^{\mathrm{T}} g(x).$$

Visa att vektorn $g(x(\bar{u}))$ är en subgradient till h i $\bar{u}$.

c) Visa att om det för något $u = u^*$ gäller att $0 \in \partial h(u^*)$ så är u^* ett dualt optimum.

d) Illustrera detta resultat på det linjära problemet

$$\begin{array}{rrcrcl}
\min\ z = & x_1 & - & 3x_2 & & \\
\text{då} & -x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0,
\end{array}$$

där det första villkoret anses vara komplicerande och därför Lagrangedualiseras, med multiplikator u. I $u^* = 4/3$ finns alternativa lösningar till Lagrange-subproblemet, vilka ger upphov till alternativa subgradienter till den Lagrange-duala målfunktionen. Det finns speciellt exakt *två* extrema lösningar till Lagrange-subproblemet, och dessa ger upphov till två extrema subgradienter (dvs subgradienter som inte kan tecknas som icke-triviala konvexkombinationer av andra subgradienter); finn de extrema subgradienterna. Teckna subdifferentialen $\partial h(u^*)$. Verifiera att u^* är ett optimum till det duala problemet.

5.3.3 (En Lagrange-heuristik för det kapaciterade lokaliseringsproblemet.)
Betrakta det så kallade *kapaciterade lokaliseringsproblemet* formulerat som den blandade heltalsmodellen

$$\begin{array}{llcll}
\min & \sum_{i=1}^{m} f_i y_i & + & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{då} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leq & S_i y_i, \quad i = 1, \ldots, m & \\
 & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} & = & D_j, \quad j = 1, \ldots, n & (*) \\
 & y_i & = & 0/1, \quad i = 1, \ldots, m & \\
 & x_{ij} & \geq & 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n, &
\end{array}$$

där variablerna y_i, $i = 1, \ldots, m$, beskriver logiska beslut rörande lokalisering av källor, och x_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, är transportvariabler.

a) Visa att villkoret

$$\sum_{i=1}^{m} S_i y_i \geq \sum_{j=1}^{n} D_j$$

är en konsekvens av de ursprungliga villkoren (dvs att varje tillåten lösning måste uppfylla det nya villkoret), varför det kan adderas till modellen utan att denna påverkas.

b) Antag att vi adderar detta redundanta villkor och löser problemet heuristiskt med hjälp av Lagrange-relaxering av villkorsgruppen ($*$) och subgradientoptimering. Beskriv lösningsgången! Vilka egenskaper har det duala problemet? Varför? Kan ett dualitets-gap förekomma?

c) För detta problem kan primalt tillåtna lösningar enkelt konstrueras utifrån Lagrange-subproblemlösningen i lokaliseringsvariablerna. Förklara hur!

d) Jämför styrkan på den undre gräns som fås från Lagrange-dualen med den som fås från den kontinuerliga relaxationen (linjärprogrammeringsrelaxationen) av problemet. Hur påverkas styrkan på den undre gränsen om villkoret ovan *inte* adderas? Motivera!

[Anmärkning: Notera att det adderade villkoret är redundant i den ursprungliga modellen, men att det *inte* är redundant i det *Lagrange-relaxerade* problemet. Denna uppgift illustrerar det faktum att det ofta är både möjligt och fördelaktigt att *stärka* en relaxering med hjälp av villkor som är redundanta i den ursprungliga modellen.]

5.4 Snittmetoder

5.4.1 Betrakta problemet

$$\begin{array}{rcrcrcll}
\min z & = & 6x_1 & + & 8x_2 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & x_2 & \geq & 4 & \qquad (1) \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 4 & \qquad (2) \\
 & & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0, \text{ heltal.} &
\end{array}$$

Om vi löser LP-relaxationen till problemet erhålls följande optimaltablå (x_3 och x_4 är slackvariabler i villkor (1) respektive (2)).

Basvar	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$	
$-z$	1	0	0	-4/5	-18/5	-88/5	
x_1	0	1	0	-2/5	1/5	4/5	(1)
x_2	0	0	1	1/5	-3/5	8/5	(2)

a) Tag fram Gomory-snitt från rad (1) och rad (2). Illustrera snitten grafiskt.

b) Ange villkor som definierar det konvexa höljet av de tillåtna heltalslösningarna.

c) Är villkoret $2x_1 + 3x_2 \geq 8$ ett giltigt snitt"?

5.4.2 Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrcrcl} \min z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & 5x_1 & + & 4x_2 & \geq & 10 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0,\ \text{heltal}, \end{array}$$

vars LP-relaxation har följande optimaltablå:

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
$-z$	1	3/4	0	1/4	0	−5/2
x_2		5/4	1	−1/4	0	5/2
x_4		3/2	0	1/2	1	3

a) Illustrera grafiskt det konvexa höljet av heltalslösningarna, och ge en matematisk definition av det konvexa höljet.

b) Tag fram alla Gomory-snitt som är möjliga att generera från LP-relaxationens optimaltablå. Definierar något snitt en fasett?

c) Visa, med generella beteckningar, att ett Gomory-snitt alltid skär bort LP-optimum.

5.4.3 Antag att det tillåtna området i ett heltalsproblem definieras enligt

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 8 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0\ , \quad \text{heltal.} \end{array}$$

Tag fram ett Gomorysnitt. Är villkoret en fasett till det konvexa höljet?

6 Repetition

6.1 Repetition

6.1.1 (Tentamensuppgift 000823)
Tre påståenden ges nedan. Din uppgift är att ange om vart och ett av dem är sant eller falskt. Motivera Dina svar! Du får inte addera någon ytterligare förutsättning än de som redan är angivna.

a) **(1p)** Betrakta problemet

$$\begin{aligned} \text{minimera} \quad & q^T x + \frac{1}{2} x^T Q x, \\ \text{då} \quad & Ax = b, \end{aligned}$$

där $q \in \Re^n$, $Q \in \Re^{n \times n}$, $A \in \Re^{m \times n}$ och $b \in \Re^m$, dvs. ett minimeringsproblem med en kvadratisk målfunktion över ett underrum. Påstånde: varje lokalt optimum är ett globalt optimum.

b) **(1p)** Antag att en funktion $f : \Re^n \mapsto \Re$ är differentierbar i en punkt $x \in \Re^n$. För att en riktning $d \in \Re^n$ skall vara en descentriktning för funktionen f i punkten x är det nödvändigt att $\nabla f(x)^T d < 0$.

c) **(1p)** Linjärprogrammering är ett lätt problem i den meningen att varje problem kan lösas med en algoritm som har en polynomisk tidskomplexitet. Simplexmetoden löser varje linjärt problem. Alltså är simplexmetoden en polynomiell algoritm.

6.1.2 (Exam 000524)
(Myths in optimization)
Each of the following three claims is *false*, even if they at a first glance might look plausible. Your task is to explain *why* each claim is false, either with a counter-example or with a full explanation.

a) **(1p)** In an LP problem there is always at least one optimal extreme point.

b) **(1p)** The optimal solution to an linear *integer* optimization problem is the integer rounding of the solution to an LP relaxation of the integer program.

c) **(1p)** If you solve the optimization problem to minimize $f : \Re^n \mapsto \Re$ over the set $X \cap \{ x \in \Re^n \mid g(x) \leq b \}$—where X is convex and $g : \Re^n \mapsto \Re$ is a convex function—and the globally optimal solution, x^*, is such that $g(x^*) < b$, then the constraint $g(x) \leq b$ is redundant.

6.1.3 Avgör vilka av nedanstående påståenden som är sanna respektive falska.

a) Alla fas I problem har det optimala målfunktionsvärdet noll.

b) En Karush-Kuhn-Tucker punkt till ett konvext optimeringsproblem är alltid ett globalt optimum.

c) Antag att funktionen f är två gånger kontinuerligt differentierbar på R^n och låt G vara en symmetrisk och positivt definit matris av dimension $n \times n$. Då gäller att om $\nabla f(x) \neq 0$ och vektorn d uppfyller $Gd = -\nabla f(x)$ så är $f(x + td) < f(x)$ för tillräckligt små $t > 0$.

d) Den polyeder i R^5 som beskrivs av systemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

har en extrempunkt i $(0, 0, 1, 0, 1)^T$.

e) Funktionen $f(x) = e^{-x^2/2}$ är konkav på intervallet $[-1, 1]$.

f) Om funktionen g är konkav på R^n och c är ett reellt tal så är mängden

$$\{x \in R^n \mid g(x) \leq c\}$$

konvex.

6.1.4 Give short answers to the following problems.

a) What is required from $g_i(x)$ and $f(x)$ in order to guarantee that only *one* local optimum exists fro the problem $\min f(x)$ subject to $g_i(x) \geq 0 \; \forall i$.

b) Describe the Newton-Raphsons method for one-dimensional optimization Which are the advantages and disadvantages of this method?

c) Why is it important to determine if an optimization problem is convex.

d) Formulate the problem of solving the system of non-linear equations $a_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$ as an optimization problem.

e) What characterizes a degenerate basic solution?

f) How is a unbounded solution identified in the simplex method. Motivate your answer!

g) Assume that a primal LP-problem has a unbounded solution. What can we say about the dual problem.?

h) Define the term "local optimum".

i) What does cycling mean in an LP-problem?

j) Formulate and interpret the weak duality theorem.

k) define the term “convex function”

l) Will the steepest descent method converge towards a global optimum given that we let it run for enough iterations. Motivate your answer!

6.1.5

Decide whether the following statements are true or false!

a) Non-convex optimization problems always lack optimal solutions.

b) A global optimum to a nonlinear optimization problem is always a local optimum.

c) The direction of (-1,-1) is a direction of descent for the function $f(x_1, x_2) := x_1 + x_1x_2 - x_2^2$, at $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

d) The Phase-I problem in the Simplex method always has a finite optimal solution.

e) The algebraic system described by the constraints $Ax \leq b$, $x \geq 0$, where A is a (4×5)-matrix, x is a (5×1)-vector, and b is a (4×1)-vector, can have no more than 126 basic feasible solutions.

f) Given a primal-dual pair of linear programs, if the primal problem has a finite optimal solution then the dual must have a feasible solution.

g) You have solved the problem to maximize $c^T x$ subject to $Ax \leq b, x \geq 0$, and obtained an optimal solution x^*. By adding more constraints, then optimal value may increase.

h) Given the problem to minimize $f(x)$ subject to $Ax \leq b, x \geq 0$. The value $f(\bar{x})$ is an upper bound to the optimal value of the problem if $A\bar{x} \leq b, \bar{x} \geq 0$.

i) Given a number of convex sets $X_i, i = 1, \ldots, n$. The set $X = \cap_{i=1}^n X_i$ is always convex.

j) In order for Newton's method to be applicable and be guaranteed to converge to a global optimum it is enough that the objective function is twice continuously differentiable and that the Hessian matrix is everywhere invertible.

k) Consider an LP problem which is being solved with the Simplex method. The variable x_j has been chosen as an incoming basic variable. The minimal quotient between the coefficient in the right-hand side (that is, in $\bar{b}$) and positive elements in the column of x_j in $\bar{A}$ is the value of x_j in the new basis.

l) A free variable x_k can be replaced by $x_k = x_k^+ - x_k^-$, where $x_k^+, x_k^- \geq 0$.

m) If the artificial objective function in the Phase I problem cannot be driven down to zero, then the original problem has an unbounded solution.

n) If the problem $\min f(x) = 2x_1^2 + 3(x_2+1)^2 + (x_3+2)^2$ is solved with Newton's method, only one iteration will be needed.

o) Consider the problem $\min c^T x$ subject to $Ax = b, x \geq 0$, where A is an $m \times n$ matrix, $n > m$. If $n - m$ variables are set to zero, the remaining m variables can be used to define a feasible solution.

p) Consider the problem $\min c^T x$ subject to $Ax = b, x \geq 0$, where A is an $m \times n$ matrix, $n > m$. If $n - m$ variables are set to zero, the remaining m variables can be used to define a unique solution.

q) If, in the outgoing criterion of the Simplex method, we find that two variables can be used as outgoing basic variables, then the next basis will be degenerate.

r) Suppose that every basic feasible solution in an LP problem is non-degenerate. Then, the problem has a unique optimal solution.

s) If an LP problem has more than one optimal solution, then it has an infinite number of optimal solutions.

t) If a variable becomes an incoming basic variable in one iteration of the Simplex method, then it is basic in every optimal solution.

u) The dual problem is always a maximization problem.

6.1.6 Decide whether the claims listed below are true or not.

a) The dual for the phase-I problem is always feasible.

b) Every local minimum to the problem $\min f(x)$ s.t. $g_i(x) \geq b_i, i = 1, \ldots, m$, is also a global minimum if the objective function is convex and g_i are concave, for each $i = 1, \ldots, m$.

c) A global minimum to the problem $\max f(x)$ s.t. $g_i(x) \geq b_i, i = 1, \ldots, m$, is also a local maximum only if $f(x)$ is concave as well as g_i are concave, for each $i = 1, \ldots, m$.

d) For the problem $\min f(x)$ s.t. $g_i(x) \leq 0 \ i = 1, \ldots, m, x \geq 0$, there $x \in R^n$, it holds that the dual function $\varphi(u) = \min_{x \geq 0} f(x) + u^T g(x), u \in R^m$, does always give a lower bound on the optimal value of the problem for every $u \geq 0$, i.e., $\varphi(u) \leq f(x^*)$.

e) If a basic optimal solution for a LP-problem is degenerate, the problem possesses infinitely many optimal solutions.

f) The modified Newton's method applied to the problem $\min f(x) = 2x_1^4 + 3(x_2 - 3)^2 + (x_3 + 2)^2$ does always converge after one iteration only.

g) Every LP-problem with non-empty bounded feasible set has finite optimal value.

h) A convex problem does always possess at most one globally optimal solution.

i) Two successive search directions generated by Newton's method are always orthogonal.

j) The unbounded optimization problem can be convex.

k) If all the elements in the column corresponding to the incoming variable in the primal simplex method are non-positive, the problem is unbounded.

l) The convex optimization problem cannot have infinitely many KKT-points.

m) A feasible set of LP-problem might be nonconvex.

Svar till uppgifterna

2.3.5 Substituera $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, båda dessa variabler är positiva. Multiplicera bivilkor 3 med -1. Inför artificiella variabler och minimera summan av dessa.

2.3.6 Multiplicera biv. med -1. Inför artificiella variabler och dito målfunktion. reducerade kostnaderna är optimala i startlösningen.

2.3.7 T.ex. $x = (5, 0, 2, 0)$

2.3.8 Använd $7x_1 + 5x_2$ som målfunktion och kolla optimala värdet.

2.3.9 Optimallösning $(x_1, x_2, x_3) = (4, 1, 2)$ med värde 11. Ej unik lösning.

2.3.10 Alternativa optimala extrempunkter $x = (0, 1), x = (56/17, 45/17)$.

2.3.11

2.3.12 -

2.3.13 -

2.3.14 -

2.2.1 -

2.2.2 -

2.2.3 -

2.2.4 -

?? -

?? -

2.2.5 -

2.2.6 -

2.4.9 -

2.2.7 -

2.2.8 -

2.3.16 -

3.3.1 -

3.3.2 -

3.3.3 -

3.3.4 -

3.3.5 -

3.2.1 -

3.3.6 -

3.3.7 -

3.3.8 -

3.3.9 -

?? -

3.3.10 -

3.6.2 -

3.6.3 -

3.6.4 -

3.6.5 -

?? -

3.5.1 -

3.5.2 -

3.5.3 -

3.5.4 -

3.5.5 -

3.5.6 -

3.4.1 -

1 Konvexitet

1.1 Teori

1.1.1

Antag att $\hat{x} \in \hat{X}$. Konvexiteten hos f ger att

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^T(x^* - \hat{x}) = f(\hat{x}) + \nabla f(x^*)^T(x^* - \hat{x}) \\ &= f(\hat{x}). \text{ Alltså är } \hat{x} \in x^*, \text{ och } \hat{X} \leq X^* \text{ gäller.} \end{aligned}$$

Antag att $\hat{x} \in X^*$. Konvexiteten hos f ger att

$$\left.\begin{array}{l} f(x^*) \geq f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^T(x^* - \hat{x}) \\ f(\hat{x}) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(\hat{x} - x^*) \end{array}\right\} \Rightarrow [\nabla f(\hat{x}) = \nabla f(x^*)]^T(\hat{x} - x^*) \geq 0.$$

Men den omvända olikheten gäller också, eftersom

$$\begin{array}{l} \hat{x} \in X^* \Rightarrow \nabla f(\hat{x})^T(x^* - \hat{x}) \geq 0 \\ x^* \in X^* \Rightarrow \nabla f(x^*)^T(\hat{x} - x^*) \geq 0 \end{array} \quad \text{enligt optimalitetsvillkorer.}$$

Alltså gäller att $[\nabla f(x^*) - \nabla f(\hat{x})]^T(x^* - \hat{x}) = 0$. Vi får då ur konvexitetsolikheten

$$f(\hat{x}) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(\hat{x} - x^*)$$

att $\nabla f(x^*)^T(\hat{x} - x^*) = 0$ måste gälla, ty $f(\hat{x}) = f(x^*)$ gäller och $\nabla f(x^*)^T(\hat{x} - x^*) \geq 0$. Från konvexiteten hos f fås nu att $f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*) = f(\hat{x}) + \nabla f(x^*)^T(x - \hat{x}), \forall x \in X$, ty $f(\hat{x}) = f(x^*)$. Alltså är $\nabla f(x^*) = \nabla f(\hat{x})$.
Alltså är $\hat{x} \in \hat{X}$, och $x^* = \hat{X}$ gäller. ■

1.1.2

a) (Motsägelsebevis) Antag att för något $b > 0$ det existerar ett $\bar{x}$ med $f(\bar{x}) < f(x^*), \bar{x} \in x, g(\bar{x}) \leq b$. Bilda $x_\lambda = x^* + \lambda(\bar{x} - x^*)$. För $\lambda > 0$ tillräckligt litet gäller att $g(x_\lambda) < 0$, ty $g(x_\lambda) \leq \lambda g(\bar{x}) + (1 - \lambda)g(x^*) \leq g(x^*) + \lambda(b - g(x^*))$. Men vi har också att $f(x_\lambda) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda)f(x^*) < f(x^*)$. Om $\lambda \leq 1$ gäller dessutom att $x_\lambda \in C$. Alltså är x_λ tillåten i [p], och $f(x_\lambda) < f(x^*)$ motsäger optimaliteten hos x^* i [p]. ■

b) Konvexitet är nödvändigt! Motexempel

I princip kan konvexa problem lösas genom att först lösa ett problem där färre bivillkor tas med, och adderas successivt då de blir överskridna. På motsvarande sätt tas redundanta villkor bort. Detta är en typ av 'active set'-metod som dock kan vara ineffektiv, då det kan kräva många iterationer att identifiera de bivillkor som måste vara med (dvs. vilka andra som kan tas bort.)

1.1.3 -

1.1.4 -

1.1.5 -

1.1.6 -

1.1.7 a) $p < 0$ eller $p \geq 1$
b) $p \geq 1$

1.1.8 a) ej konvex, b) - f) konvexa

1.1.9 a) - f) konvexa

1.1.10 Logaritmera båda leden och visa att $\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$.

Induktionsbevis

(i) Olikheten gäller för $n = 2$ eftersom $\ln(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) \geq \{\ln \text{ konkav}\} \geq \frac{1}{2}\ln(x_1) + \frac{1}{2}\ln(x_2) \geq \frac{1}{2}(\ln(x_1) + \ln(x_2))$.

(ii) Antag att olikheten gäller för $n-1$, dvs $\ln \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} x_i \geq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \ln(x_i)$.

(iii) Visa att olikheten gäller för n.

$$\ln \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i = \ln(\frac{1}{n} x_n + \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} x_i) \geq \{\ln \text{ konkav}\}$$

$$\geq \frac{1}{n}\ln(x_n) + \frac{n-1}{n}\ln(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} x_i) \geq \{(ii)\} \geq \frac{1}{n}\ln(x_n) + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \ln(x_i) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i). \quad \text{v s v}$$

1.1.11 -

1.1.12 -

1.1.13 -

1.1.14

a) i) $X^* = X \cap \{x | f(x) \leq f^*\}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ konvex} \Rightarrow \{x|f(x) \leq f^*\} \text{ konvex} \\ X \text{ konvex} \end{array}\right\} \Rightarrow X^* \text{ konvex}$$

ii) $$\left.\begin{array}{l} X^* \text{ konvex} \\ x^1,\ x^2 \in X^* \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X^*,\ \forall \lambda \in [0,\ 1]$$

$x^1 \neq x^2 \Rightarrow$ oändligt många optima.

b) $\max x_1^2 + x_2^2$ då $x_1 + x_2 \leq 1$ och $x_1,\ x_2 \geq 0$.

1.1.15

a) icke-konvex mängd (finn motexempel)

b) konvex mängd (bevisa)

c) icke-konvex mängd (finn motexempel)

d) konvex mängd (bevisa)

e) konvex mängd (bevisa)

1.1.16

a) definierar en konvex mängd (boll)

b) ej konvex mängd

c) ej konvex mängd

1.1.17

a) Visa att en konvex funktion har konvexa nivåmängder.

b) $f(x) = -e^{-x^2}$

1.1.18 -

1.1.19 -

1.1.20

a) Konvex funktion, ej differentierbar i $x_1 = 0$.

b) Varken konvex eller konkav funktion, men differentierbar.

c) Konkav funktion, ej differentierbar i $x_1 = 0$.

d) Konvex funktion, ej differentierbar.

e) Konkav funktion, ej differentierbar.

f) Konvex funktion, ej differentierbar i $x_1 = 0, x_2 = 0$. (Betrakta en stråle genom origo, $x_1 = c_1 t,\ x_2 = c_2 t$ där $t \geq 0$. För att visa konvexitet, använd triangelolikheten.)

g) Konvex funktion, ej differentierbar i punkterna $x_1 = x_1^{(i)},\ x_2 = x_2^{(i)}\ \forall i$.

1.1.21

a) Nej! Tag t ex $x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $x^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. x^1 och x^2 är båda tillåtna punkter men $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ är ej en tillåten punkt.

b) För alla f sådana att $\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(2,2) + \lambda_2 \nabla g_2(2,2) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$

1.1.22

a) Konvex

b) $X_1 = \{x | x^2 \geq 4\}$ ej konvex $X_2 = \{x | x \geq 0\}$ konvex $X_1 \cap X_2 = \{x | x \geq 2\}$ konvex

1.1.23

a) Dela upp funktionen i tre delfunktioner: $f_1 = x_1^2 + 3x_3^2 - 3x_1x_3$, $f_2 = 2x_2^2 + x_4^2 - x_2x_4$ och $f_3 = e^{x_2+x_4}$. Alla dessa är konvexa funktioner var för sig och summan av dem är därför också en konvex funktion.

b) Dela upp målfunktionen i tre delar. Utnyttja kända satser.

1.1.24

a) Konvex då $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ och $x_1x_2 \geq 3/4$. Konkav då $x_1 \leq 0$, $x_2 \leq 0$ och $x_1x_2 \geq 3/4$.

b) Ja, ty det tillåtna området ligger helt inom området där funktionen är konvex.

1.1.25 Ja, ty problemet är konvext.

1.1.26 Studera fallet $h(x) = \ln(x)$!

1.1.27

a) Konvex

b) Konvex

c) Konkav

d) Varken eller

e) Varken eller

f) Konvex

g) Konkav

1.1.28 konvex?

a) Ja

b) Nej

c) Nej

d) Nej

e) Ja

1.1.29

a) Konvex för $x \geq 0$, konkav annars.

b) Lokalt och globalt max i $x = -2$, lokalt max i $x = 3$ lokalt och globalt min i $x = 2$ lokalt min i $x = -3$.

1.1.30

a)

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (3, -1) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

b) Ja, ty $\det H = 0$.

c) $f(x, y)$ konvex funktion (använd egenvärden).

1.1.31 Nej, ty $(0.5, -0.5) \in S, (-0.5, 0.5) \in S$ men $(0, 0)$ tillhör ej S.

1.1.32

a) Konvex mängd

b) Icke konvex mängd

1.1.33 Konvex mängd.

1.1.34 Konvex mängd. x_1^3 konvex då $x_1 \geq 1$.

1.1.35 -

1.1.36

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j x^{(1)} + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} a_j x^{(2)}$$

1.1.37

Bilda $x^{(3)} = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$. Vi har 2-normen $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Detta ger att $|x^{(1)}| \leq 2$ och $|x^{(2)}| \leq 2$. Triangelolikheten ger $|x^{(3)}| \leq \lambda|x^{(1)}| + (1-\lambda)|x^{(2)}| \leq \lambda 2 + (1-\lambda)2 = 2$.

2 Linjär optimering

2.1 Modellering

2.1.1 Matematisk modell:

$$\begin{aligned} x_j &= \text{antal enheter som körs i process } j, j = 1, 2; \\ y &= \text{antal halvtimmar som fotomodellen anlitas} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maximera } f(x,y) :=& 50(3x_1 + tx_2) - 3(x_1 + 2x_2) \\ & - 2(2x_1 + 3x_2) - 5000y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{då} \quad x_1 + 2x_2 &\leq 20,000, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 35,000, \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 1,000 + 200y \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 0 \leq y &\leq \end{aligned}$$

2.1.2 Variabeldefinition:

$x_j =$ antal praktikanter som utbildas månad j, $j = 1, \ldots, 5$

$y_j =$ antal tekniker som finns tillgängliga i början av månad j, $j = 1, \ldots, 5$

$$\min z = \sum_{j=1}^{5} (15000y_j + 7500x_j)$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{då} & 160y_1 & - & 50x_1 & \geq & 6000 \\ & 160y_2 & - & 50x_2 & \geq & 7000 \\ & 160y_3 & - & 50x_3 & \geq & 8000 \\ & 160y_4 & - & 50x_4 & \geq & 9500 \\ & 160y_5 & - & 50x_5 & \geq & 11500 \\ & 0.95y_1 & + & x_1 & = & y_2 \\ & 0.95y_2 & + & x_2 & = & y_3 \\ & 0.95y_3 & + & x_3 & = & y_4 \\ & 0.95y_4 & + & x_4 & = & y_5 \\ & & & y_1 & = & 50 \\ & \multicolumn{5}{l}{y_j, x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5} \end{array}$$

2.1.3 Variabeldefinition:

$y_i =$ antal inköpta kalkoner av typ i, $i = 1, 2$
$x_{ij} =$ mängd (hg) av köttyp i i kotlett j, $j = 1, 2$
($i = 1 \rightarrow$ ljust kött, $i = 2 \rightarrow$ mörkt kött)

$$\max z = 16(x_{11} + x_{21}) + 12(x_{12} + x_{22}) - 40y_1 - 32y_2$$

$$\begin{array}{lrcr} \text{då} & x_{11} + x_{21} & \leq & 150 \\ & x_{12} + x_{22} & \leq & 90 \\ & x_{11} + x_{12} - 5y_1 - 3y_2 & \leq & 0 \\ & x_{21} + x_{22} - 2y_1 - 3y_2 & \leq & 0 \\ & 0.3x_{11} - 0.7x_{21} & \geq & 0 \\ & 0.4x_{12} - 0.6x_{22} & \geq & 0 \\ & x_{ij}, y_i & \geq & 0 \end{array}$$

2.1.4 Variabeldefinition:

$x_{ij} =$ antal ton råvara i som används till bensinsort j, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$.

$$\min z = \sum_{j=1}^{2} (1500x_{1j} + 2400x_{2j} + 3000x_{3j})$$

$$\begin{array}{lrcr} \text{då} & x_{11} + x_{12} & \leq & 12 \\ & x_{21} + x_{22} & \leq & 15 \\ & x_{31} + x_{32} & \leq & 25 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} & = & 10 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} & = & 25 \\ & \frac{1}{10}(120x_{11} + 75x_{21} + 100x_{31}) & \geq & 90 \\ & \frac{1}{25}(120x_{12} + 75x_{22} + 100x_{32}) & \geq & 95 \\ & \frac{1}{10}(60x_{11} + 4x_{21} + 26x_{31}) & \leq & 10 \\ & \frac{1}{25}(60x_{12} + 4x_{22} + 26x_{32}) & \leq & 8 \\ & x_{ij} & \geq & 0 \end{array}$$

2.1.5 - Formulering:

x_{ij} mängd av vara i lastad i lastrum j, mätt i ton.

$$\begin{array}{rcl} \max z = & \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} x_{ij} c_i & \\ \text{då} & \sum_{j=1}^{J} x_{ij} \leq a_i & \forall i \in 1 \ldots I \\ & \sum_{i=1}^{I} x_{ij} \leq w_j & \forall j \in 1 \ldots J \\ & \sum_{i=1}^{I} b_i x_{ij} \leq v_j & \forall j \in 1 \ldots J \\ & \frac{\sum_{i=1}^{I} x_{ij}}{w_j} = \frac{\sum_{i=1}^{I} x_{ij+1}}{w_{j+1}} & \forall j \in 1 \ldots J-1 \end{array}$$

2.1.6 Variabeldeklaration:

x_1 = antal ha där soja odlas
x_2 = antal ha där majs odlas
x_3 = antal ha där vete odlas
x_4 = antal mjölkkor som köps in
x_5 = antal hönor som köps in
y_1 = antal vintertimmar som man arbetar på granngården
y_2 = antal sommartimmar som man arbetar på granngården

$$
\begin{array}{rrrrrrrcr}
\multicolumn{9}{l}{\max z = 15x_1 + 22x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 0.05x_5 + 0.05y_1 + 0.06y_2} \\
 & & & 12000x_4 & +90x_5 & & & \leq & 400000 \\
50x_1 & +85x_2 & +25x_3 & +100x_4 & +0.6x_5 & +y_1 & & \leq & 3500 \\
125x_1 & +190x_2 & +100x_3 & +50x_4 & +0.3x_5 & & +y_2 & \leq & 4000 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +0.6x_4 & & & & \leq & 50 \\
 & & & +x_4 & & & & \leq & 32 \\
 & & & & +x_5 & & & \leq & 3000 \\
 & & & & & y_1 & +y_2 & \leq & 200 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & y_1, & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

2.1.7 Formulering:

x_i antal plankor som kapas enligt mönster i.

b_{ij} antal plankor av längd j som fås ur mönster i

d_j antal hyllplan längd j vi behöver.

$$
\begin{array}{rl}
\min z = & \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{5} x_i j \\
\text{då} & \sum_{i=1}^{5} b_i j x_i j \geq d_j \quad \forall j \in 1 \ldots 4 \\
 & x_i j \geq 0
\end{array}
$$

2.1.8 Variabeldefinition:

$$
x_{ij} = \text{antal ton råvara } i = \begin{cases} 1 & \text{vete} \\ 2 & \text{råg} \\ 3 & \text{korn} \\ 4 & \text{havre} \\ 5 & \text{majs} \end{cases} \text{som används till fodersort } j = \begin{cases} 1 & \text{Bas} \\ 2 & \text{Standard} \\ 3 & \text{Special} \end{cases}
$$

Formulering med hjälp av generella beteckningar:

$$
\begin{array}{lcl}
c_i & = & \text{Kostnad per ton för råvara } i, i = 1 \ldots 5. \\
a_{ki} & = & \text{Innehåll av ingrediens } k = \begin{cases} 1 & \text{Protein} \\ 2 & \text{Kolhydrat} \\ 3 & \text{Vitamin} \end{cases} \text{i råvara } i, i = 1 \ldots 5. \\
\underline{u}_{kj} & = & \text{Undre gräns för innehåll av ingrediens } k, k = 1 \ldots 3 \text{ i fodersort } j, j = 1 \ldots 5. \\
\bar{u}_{kj} & = & \text{Övre gräns för innehåll av ingrediens } k, k = 1 \ldots 3 \text{ i fodersort } j, j = 1 \ldots 5. \\
b_j & = & \text{Behov av fodersort } j, j = 1 \ldots 3. \\
d_i & = & \text{Tillgång av råvara } i, i = 1 \ldots 5.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\min & z = \sum_{i=1}^{5} c_i \left(\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \right) & & & & \\
\text{då} \quad \underline{u}_{kj} b_j \leq & \sum_{i=1}^{5} a_{ki} x_{ij} & \leq & \bar{u}_{kj} b_j, & k = 1 \ldots 3, j = 1 \ldots 3 & \text{Näringskrav} \\
& \sum_{i=1}^{5} x_{ij} & = & b_j, & j = 1 \ldots 3 & \text{Efterfrågan} \\
& \sum_{j=1}^{3} x_{ij} & \leq & d_i, & i = 1 \ldots 5 & \text{Tillgång råvaror} \\
& x_{ij} & \geq & 0, & i = 1 \ldots 5, j = 1 \ldots 3 & \text{Ickenegativitet}
\end{array}
$$

2.1.9

a_i ursprungligt lager vara i.

x_{ik} mängd vara i köpt till normalpris i period k.

y_i mängd vara i köpt till rabatterat pris i per 1.

b_i maximal mängd vi får köpa rabatterat

c_{ik} ordinarie pris vara i period k.

d_i rabatterat pris vara i.

v_i enhetsvolym hos vara i.

V maximal lagervolym.

e_{ik} förväntad efterfrågan vara i period k.

l_i lagerhållningskostnad vara i.

z_i mängd vara i vilken lagras mellan perioderna.

$$
\begin{array}{lcl}
\min z = & \sum_{i=1}^{2}(y_i d_i + z_i l_i) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} x_{ik} c_{ik} & \\
\text{då} & y_i \leq b_i & i \in 1, 2 \\
& z_i = a_i + y_i + x_{i1} - e_{i1} & i \in 1, 2 \\
& z_i v_i \leq V & i \in 1, 2 \\
& a_i + y_i + \sum_{k=1}^{j} x_{ik} \geq e_{ij} & i \in 1, 2, j \in 1, 2
\end{array}
$$

2.1.10 Formulering:

x_i mängd fågel av typen i som föds upp.

y_j mängd arbetskraft av typ j som används (1=ordinarie, 2=övertid).

b_j tillgänglig arbetskraft typ j (per vecka).

c_j kostnad arbetskraft typ j (per vecka).

d_i arbetskraftsbehov (per vecka) för uppfödning av fågel typ i.

v_i lokalbehov för fågel av typ i.

V total lokalyta.

e_i försäljningspris per enhet fågel av typ i.

$$
\begin{array}{rcr}
\max z = & \sum_{i=1}^{3} e_i x_i - 12 \sum_{j=1}^{2} y_j c_j & \\
\text{då} & y_j \leq b_j & j \in 1,2 \\
& \sum_{i=1}^{3} v_i \leq V & \\
& \sum_{j=1}^{2} y_j \geq \sum_{i=1}^{3} x_i d_i &
\end{array}
$$

2.1.11

a) c_i personalbehovet dag i (måndag $= 0$).

x_i antalet personer som börjar sin arbetsvecka dag i.

mod modulo operatorn.

$$
\begin{array}{rcr}
\min z = & \sum_{i=0}^{6} x_i & \\
\text{då} & \sum_{k=i}^{i+4} x_{k \bmod 7} \geq c_i & \forall i \in 0 \ldots 6
\end{array}
$$

b) Vi kan få fraktionella lösningar. Lösningen ger en undre gräns för den verkliga kostnaden.

2.1.12

t_i tillgänglig mängd råvara i.

a_{ik} mängd råvara i som åtgår vid tillverkning av produkt k.

x_k mängd tillverkad av produkt k.

c_k försäljningspris produkt k.

z_1 underskridande av önskade totala inkomster.

z_2 underskridande av mål för total försäljning.

z_3 underskridande av mål för försäljning produkt 1.

$$
\begin{array}{lcr}
\min z = & 0.5z_1 + 0.3z_2 + 0.2z_3 & \\
\text{då} & \sum_{k=1}^{2} x_k a_{ik} \leq t_i & \forall i \in 1\ldots 3 \\
& \sum_{k=1}^{2} c_k x_k + z_1 \geq 13000 & \\
& \sum_{k=1}^{2} x_k + z_2 \geq 1150 & \\
& x_2 + z_3 \geq 400 & \\
& x_k, z_j \geq 0, k = 1\ldots 2; z = 1\ldots 3 &
\end{array}
$$

2.1.13

x_{ik} mängd tillverkat till pris i vecka k.

y_k mängd som hålls i lager mellan vecka k och vecka k+1.

$$
\begin{array}{lcr}
\min z = & \sum k = 1^6 \sum_{i=1}^{2} C_i x_{ik} - p \sum_{k=1}^{5} y_k & \\
\text{då} & x_{1k} \leq K & \forall k \in 1\ldots 6 \\
& x_{2k} \leq 0.4K & \forall k \in 1\ldots 6 \\
& x_1 \geq b_1 & \\
& y_{k-1} + x_k \geq b_l & \forall k \in 2\ldots 6 \\
& y_1 = x_1 - b_1 & \\
& y_k = y_{k-1} + x_k - b_k & \forall k \in 2\ldots 5 \\
& x_k \geq 0 & \forall k \in 1\ldots 6 \\
& y_k \geq 0 & \forall k \in 1\ldots 5
\end{array}
$$

Vi behöver inget extra villkor för att tömma lagret vecka 6 då varje extra producerad enhet kostar pengar, och vi minimerar kostnaden.

2.1.14 -

2.2 Dualitet

2.2.1

a)

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max v = & 3y_1 & - & 4y_2 & + & 2y_3 & & \\
\text{då} & y_1 & & & + & 2y_3 & \leq & 3 \\
& -2y_1 & + & y_2 & - & 3y_3 & = & 2 \\
& 3y_1 & + & 3y_2 & - & 7y_3 & = & -3 \\
& 4y_1 & + & 4y_2 & - & 4y_3 & \geq & 4 \\
& y_1 & \leq 0, & y_2 & \geq 0, & y_3 & \text{fri} &
\end{array}
$$

b)

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \min\ v = & 3y_1 & + & 4y_2 & + & 2y_3 & & \\ \text{då} & y_1 & + & 6y_2 & + & 3y_3 & \geq & 3 \\ & 3y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 2 \\ & y_1 & \geq 0, & y_2 & \text{fri}, & y_3 & \geq 0 & \end{array}$$

2.2.2 Inför slackvariabler. Substituera $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ och $x_4 = x_4^+ - x_4^-$

2.2.3

a) $y = (2, 0)$.

b) x_1, x_2, x_3, x_5 icke-basvar.

c) $x_4 = 3, x_6 = 1$

2.2.4

a)

$$\begin{array}{rll} \max\ v = & b^T y + l^T v - u^T w & \\ \text{då} & A^T y + Iv - Iw & = c \\ & y\text{fria}, v, w \geq 0 & \end{array}$$

b) $v = c^+, w = -c^-$

c) -

2.2.5

a) $x = (25/3, 0, 5/3), y = (2/3, 0, 2/3), x_0 = 110/3$

b) $s = (0, 5/3, 0)$.

c) $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

d) $c_2 \leq 14/3$.

e) $58/17 \leq c_1 \leq 8$.

f) $17.5 \leq b_1 \leq 46$.

g) $c_y > 16/3$.

h) $x = (1.25, 0, 8.75), x_0 = 22.5$.

2.2.6

a) Ja.

c) Använd duala simplexmetoden, utgående variabel x_6. Inkommande $= \min\{|-9/(-4)|, |11/(-3)|\} \Rightarrow x_2$ inkommande. $X^* = (18, 3, 9, 0, 0)$

d) Ja.

2.2.7 Endast dualvariabeln k förändras $u'_k = u_k - u_r$.

2.2.8 -

2.2.9

a) $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$

Vi har :

$$
\begin{array}{ll}
\min & [1.5 \quad 1 \quad 2 \quad 1]x \\
\text{då} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\
& \qquad x \geq 0
\end{array}
$$

Duala problemet blir

$$
\left(\min \begin{bmatrix} c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{bmatrix} \text{ primalt blir } \begin{bmatrix} \max b^T y \\ A^T y \leq c \\ y \geq 0 \end{bmatrix} \text{ dualt}\right)
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & y_1 + 0.1 y_2 \\
\text{då} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& y \geq 0
\end{array}
$$

Ritar vi upp detta får vi bilden i fig 16.

Vi söker $\max y_1 + 0.1 + y_2$ och får optimum i punkten $y = (1.5, 0.5)$.

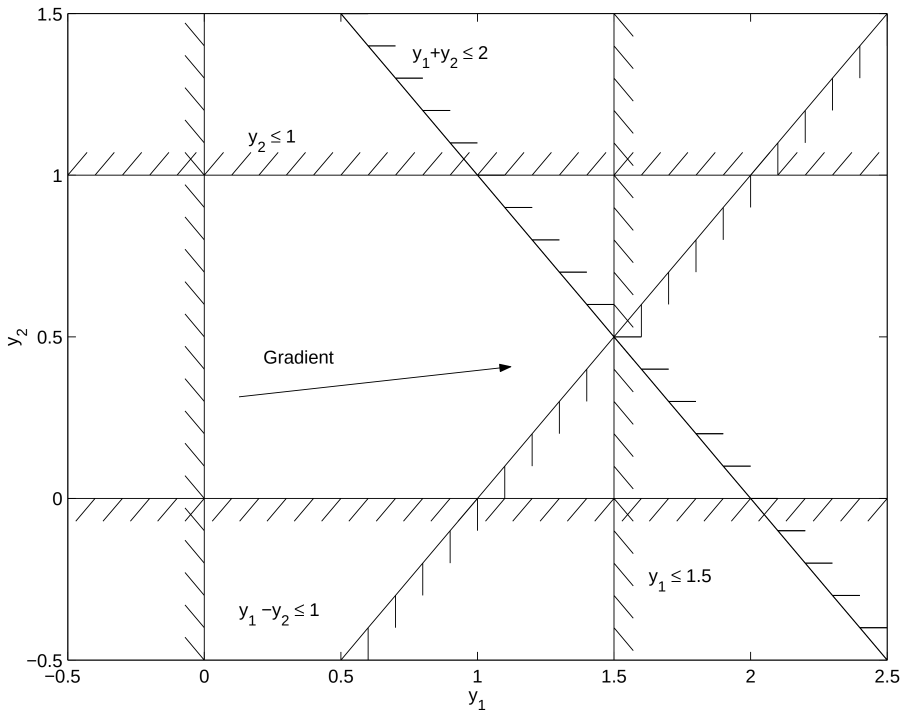
Vi ser att alla duala bivillkor utom no 2 binder. Då det andra duala villkoret ej binder vet vi att $x_2 = 0$.

Vidare har vi $y_1, y_2 > 0$ varför de primala villkoren binder.

Optimala mängden ges alltså av lösningen till

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0.55 \\ 0.45 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c \leq \alpha \leq 1
$$



Figur 16: Bild till upg 2.2.9

b) Vi vet att x_2 är en icke basvar (ty motsvarande duala villkor binder ej). Kvar finns x_1, x_3, x_4 med möjliga baser

$x_1x_3 \qquad x_1x_4 \qquad x_3x_4$

x_1x_4 ger $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} \not\geq 0$

$\Rightarrow x_1, x_4$ ej optimal bas.

x_1x_3 ger $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = [0.9 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0]$ optimal bas enligt ovan.

x_3x_4 ger $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_b^{-1} = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = [0 \quad 0 \quad 0.55 \quad 0.45]$ optimal enligt ovan.

Ökar vi c_1 till 1.6 kan vi se i figuren att bivillkor 1 slutar att binda, varför vi får att $x_1 = 0$ i en optimal lösning, och den optimala basen blir x_3x_4 samt den optimala mängden $x = [0 \quad 0 \quad 0.55 \quad 0.45]$.

2.2.10

a) En KKT-punkt är strikt komplementär om varje olikhetsvillkor som är uppfyllt med likhet har en positiv multiplikator. Om problemet är att

$$\begin{array}{lll} \text{minimera } f(x) & & \\ \text{då} \quad g_i(x) \leq, i = 1, \dots, m & | & \lambda_i \\ \quad\;\; g_j(x) = 0, j = 1, \dots, \ell & | & \mu_j \end{array}$$

och (x^*, λ^*, μ^*) är en KKT-punkt är den alltå strikt komplementär om

$$\lambda_i^* > 0 \text{ för alla } i = 1, \dots, m \text{ där } g_i(x^*) = 0.$$

b) En extrempunkt i en mängd X är en punkt i X som inte kan skrivas som en konvexkombination av andra punkter i X.

c) En metodik för att (huvudsakligen) beräkna en optimal lösning till ett binärt heltalsproblem. Trädet beskriver en uppdelning av alla möjliga kombinationer av variabelvärden. Uppskattningar och tillägg av bivillkor styr vilka lösningar som genereras och undviker i möjligaste mån att generera onödiga (dåliga) variabelkombinationer.

(Tentamensuppgift 980309)

2.2.11

a) $\min w = 500y_1 + 460y_2 + 420y_3$

$$\begin{array}{lrcl} \text{då} & y_1 + 3y_2 + y_3 & \geq & 3 \\ & 2y_1 \qquad\quad + 4y_3 & \geq & 2 \\ & y_2 + 2y_2 \qquad & \geq & 5 \\ & y_1, \quad y_2, \quad y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

T.ex.

$$y = (5, 0, 0)^T \to w = 2500$$
$$y = (3, 1, 0)^T \to w = 1960$$
$$y = (0, 5/2, 1/2)^T \to w = 1360$$

$$x = (460/3, 0, 0) \to z = 460$$
$$x = (0, 0, 230) \to z = 1150$$
$$x = (0, 105, 230) \to z = 1360$$

b) $^* = (0, 5/2, 1.2)$.

I. (Dual tillåtenhet)
$$\begin{array}{l} y_1^* + 3y_2^* + y_3^* = 8 > 3 \\ 2y_1^* + \qquad + 4y_3^* = 2 \\ y_1^* + 2y_2^* \qquad = 5 \\ y^* \geq 0. \quad \text{OK} \end{array}$$

II. (Komplementaritet)

$$
\begin{array}{l}
x_1^*(y_1^* + 3y_2^* + \quad y_3^* - 3) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0 \\
x_2^*(2y_1^* \qquad\quad + 4y_3^* - 2) = 0 \to -- \\
x_3^*(\; y_1^* + 2y_2^* \qquad\quad - 5) = 0 \to -- \\
y_1^*(\; x_3^* + 2x_2^* - \quad x_3^* - 500) = 0 \Rightarrow -- \\
y_2^*(3x_1^* \qquad\quad + 2x_3^* - 460) = 0 \to x_3^* = 230 \\
y_3^*(\; x_2^* + 4x_2^* \qquad\quad - 420) = 0 \to x_2^* = 105. \quad \text{OK}
\end{array}
$$

III. (Primal tillåtenhet)

$$
\begin{array}{l}
x_1^* + 2x_2^* + x_3^* = 440 \le 500 \quad \text{OK} \\
\qquad x^* \ge 0. \quad \text{Klart}
\end{array}
$$

2.2.12

a) Låt $y_k, k \in K$, vara mängden av samatliga extrempunkter till mängden av tillåtna lösningar i LP-dualen. Då kan vi skriva

$$
v(b) = \begin{array}{r} \max c^T x \\ \text{då } Ax \le b \\ x \ge 0 \end{array} = \begin{array}{r} \min b^T y \\ \text{då } A^T y \le c \\ y \ge 0 \end{array} = \min_{k \in K} b^T y_k.
$$

Enligt antagandet är (säg) y_k den unika optimala extrempunkten. Då följer att funktionen $v(\cdot)$ är differentierbar i en omgivning av b, och gradienten $\nabla v(b) = y_{k^*}$. Speciellt gäller att den partiella derivatan $\dfrac{\partial v(b)}{\partial b_i}$ ges av $(y_{k^*})_i$, d.v.s. element i i den optimala duallösningen. I känslighetsanalysen utnyttjas att $v(b) = c_B^T B^{-1} b$ för en optimal bas B, och att $(y^*)^T = c_B^T B^{-1}$ är en optimalduallösning. Formeln för skygpriset, $y_i^* = (c_B^T B^{-1})_i$ är alltså korrekt.

b) Om y_{k^*} inte är den enda optimala extrem punkten är inte $v(\dot{})$ differentierbar i punkten b. Om vi är intresserade av att finna det korrekta skuggpriset för villkor i måste formeln i a) förändras. Intressanta blir nu alla de ectrempunkter y_k som ger värdet $v(b)$ (de <u>aktiva</u> extrempunkterna). Det korrekta skuggpriset är då en riktningsderivata av $v(\cdot)$ i b med avseende på en önskad förändringsriktning δ:

$$
v'(b;\delta) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(v(b + t\delta) - v(b)).
$$

(I de fall då $v(\cdot)$ är differentierbar i b gäller att $v'(b;\delta) = \delta^T \nabla v(b)$, vilket betyder att användandet av riktningsderivatan vid härledningen av skuggpriset är det mest generella och är <u>alltid</u> korrekt.) Om vi speciellt söker skuggpriset för villkor i låter vi $\delta = \delta_{+i} := (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, o)^T$ där bara element i är nollskilt, om de är en <u>ökning</u> av höger ledet vi undersöker, medan vi låter $\delta = \delta_{-i} := (0, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)^T$ om vi vill undersöka en minskning. Detta är en viktig observation: om inte $v(\cdot)$ är differntierbar är inte säkert $v'(b;\delta_{+i}) = -v'(b_j\delta_{-i})$ eftersom höger- och vänsterderivatorna inte sammanfaller, och vi måste alltså skilja mellan dessa fall.

För konvexa funktioner (som $v(\cdot)$ är ett exempel på) gäller formeln $v'(b_j\delta) = \max\{\delta^T \xi | \xi \in \partial v(b)\}$, där $\partial v(b)$ är mängden av alla möjliga lutningar hos $v(\cdot)$

i b (de så kallade subgradienterna). Speciellt fås att

$$v'(b_j\delta_{+i}) = \max\{(y_{y^*}); |y_{k^*} \text{ är en optimal duallösning}\}.$$

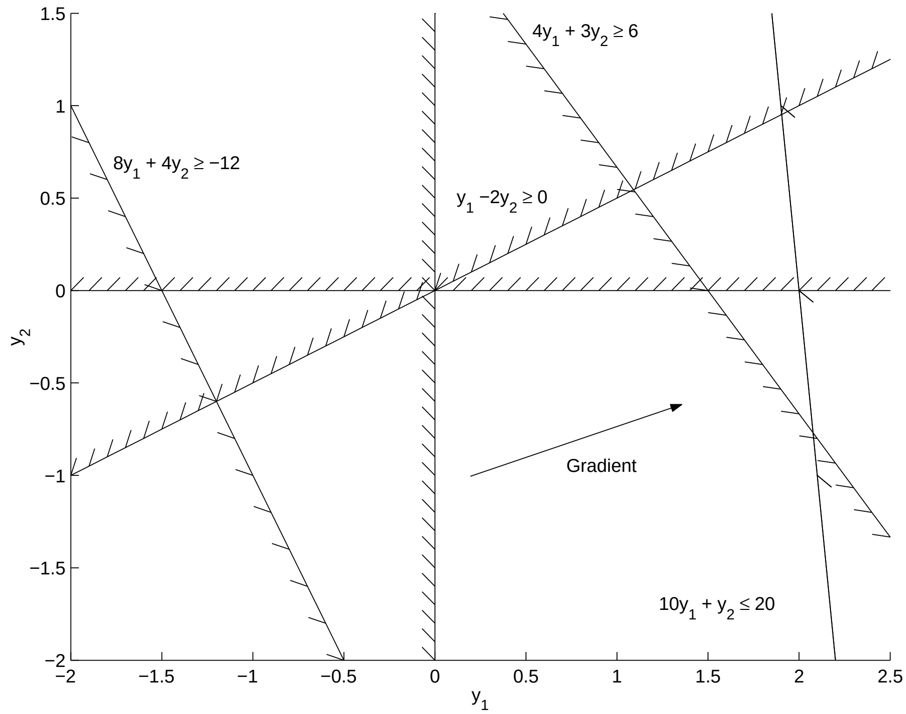
alltså det <u>största</u> värdet som dualvariabeln y_i har i någon optimallösning.

Notering: Vi kan också, mer informellt, i det duala problemet se att om y_{k^*} är unik gäller det också vid små förändringar av b (lutningen hos målfunktionen) medan om fler än en extrempunkt y_k är optimal för något b förändrar kanske z^* mer oförutsägbart. Detta ger en annan bild av differentierbarheten av z^*.

2.2.13

$$
\begin{array}{llr}
(P) & \max z = 6x_1 - 12x_2 + 20x_3 & \\
\text{då} & 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 + \ x_4 \leq 60 & | \quad y_1 \geq 0 \\
& 3x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 - 2x_4 \geq 20 & | \quad y_2 \leq 0 \\
& x_1, \quad x_2, \qquad\qquad x_4 \geq 0 & \\
& \qquad\qquad x_3 \qquad \leq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llr}
(D) & \min w = 60y_1 + 20y_2 & \\
\text{då} & 4y_1 + 3y_2 \geq 6 & | \quad x_1 \geq 0 \\
& 8y_1 + 4y_2 \geq -12 & | \quad x_2 \geq 0 \\
& 10y_1 + \ y_2 \leq 20 & | \quad x_3 \leq 0 \\
& y_1 - 2y_2 \geq 0 & | \quad x_4 \geq 0 \\
& y_1 \geq 0, y_2 \leq 0 &
\end{array}
$$



Figur 17: Bild till upg 2.2.13

Optimum i (D): $y_* = (3/2, 0)^T, w_* = 90$

Komplementaritet ger: $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ (ty slack i duala bivillkoren (2), (3) och (4)), och att $4x_1 = 60$ (ty $y_1 \neq 0$). Den primala optimallösningen är alltså $x_* = (15, 0, 0, 0)^T$.
Kontroll av primal tillåtenhet ger att samtliga optimalitetsvillkor är uppfyllda.

2.2.14 Antag att $x_1, \ldots, x_m$ är startbas. Inför ett extra bivillkor

$$\sum_{j=m+1}^{n} x_j \geq M, \quad M \ll 0.$$

Låt s vara slackvariabel i villkoret. En baslösning är $(x_1, \ldots, x_m, s)$. En dualt tillåten baslösning skapas nu som följer: välj som inkommande basvariabel x_{j^*}, där $j_{j^*} \in \arg\min\{\bar{c}_j | j = m+1, \ldots, n\}$. Om $c_{j^*} \geq 0$ är den nuvarande basen redan dualt tillåten, annars väljs s som utgående basvariabel. Nya reducerade kostnader är 0 för $x_1, \ldots, x_m, \bar{c}_j - \bar{c}_{j^*} (\leq 0)$ för $x_{m+1}, \ldots, x_n$ och $-\bar{c}_{j^*}$ för s, och alltså gäller att den nya basen är dualt tillåten.
Detta är ekvivalent med stora M-metoden. Det framgår till exempel genom att studera dualen till det nya problemet.
$[p]$ minimera $f(x) := c^T x$

$$\begin{aligned} \text{då} \quad Ax &= b \qquad \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T \\ \mathbf{1}^T x &\leq M \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

har ett dualt problem som är ekvivalent med LP-problemet.
$[D'']$ maximera $g(y, a) := b^T y - Ma$,

$$\begin{aligned} \text{då} \quad A^T y - \mathbf{1} a &\leq c, \\ a &\geq 0 \end{aligned}$$

och de två pivoteringarna är dualt ekvivalenta, ty att prirotera in a i $[D'']$ så att högerledet $(\bar{c})$ blir positivt är precis detsamma som att pivotera ut s i $[p']$.

2.2.15

a) Om $\bar{x}$ uppfyller $A\bar{x} \geq b$ och $\beta \geq 0^m$ följer att $\beta^T A \bar{x} \geq \beta^T b$. Alltså är den tillåtna mängen i $[p(\beta)]$ större än i $[p]$, varur olikheten följer.

b) Optimalitetsvillkoren för $[p]$ är:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^T(Ax - b) &= 0 \\ x^T(A_y^T - c) &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} A^T y &\geq c \\ y &\geq 0^m \end{aligned}$$

Motsvarande för $[p(\beta)]$ är: /π dualvar/

$$\begin{aligned} \beta^T A x &\le \beta^T b \\ x &\ge 0^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\pi \cdot (\beta^T A x - \beta^T b) = 0 \\ &x^T (A^T \beta \pi - c) = 0 \end{aligned} \tag{$**$}$$

$$\begin{aligned} A^T \beta \pi &\ge c \\ \pi &\ge 0 \end{aligned}$$

Låt (x^*, y^*) lösa $(*)$. Sätt $\beta^* = y^*$ och $\pi^* = 1$. Det är lätt att se att (x^*, β^*, π^*) löser $(**)$. Speciellt gäller alltså att x^* löser $[p(\beta^*)]$, varur likheten följer.

2.2.16

a) [D] $\min p(y) = b_1^* y_1 + b_2^* y_2 + b_3^T y_3$

$$\text{då} \begin{cases} \\ A_{11}^T y_1 + A_{21}^T y_2 + \qquad \ge c_1 \\ A_{12}^T y_1 \qquad + A_{32}^T y_3 \ge c_2 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3 \text{fri} \end{cases}$$

b) $f_2^* \le f^* \le f_1^*$. (Ökning av b_1 ger större tillåten mängd, medan ökning av b_2 ger mindre tillåten mängd. Ökning av b_3 <u>kan</u> ge något av dessa fall, men det beror på data A och b.)

2.2.17

a) Duala till (P) är

$$\max w = 240 y_1 + 60 y_2$$
$$\text{då} \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \le 100 \\ 6y_1 + \ \ y_2 \le 100 \\ 10 y_1 \qquad \le 100 \\ y_1, \quad y_2 \ge 0 \end{cases} \tag{D}$$

Geometrisk lösning av (D) ger: $y_* = (10, 40)$. (Men detta behövs inte. Vi härleder den lösningen nedan.)

För att verifiera att $x_* = (12, 36, 0)^T$ utnyttjas de tre optimalitesvillkoren i LP.

Primal tillåtenhet:
$$\begin{aligned} &2x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 240 \qquad \text{OK} \\ &2x_1 + \ \ x_2 \qquad\quad = 60 \\ &x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Komplementaritet:} & y_1 \cdot (2x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 240) = 0 & o \\
& y_2 \cdot (2x_1 + x_2 - 60) = 0 & ii \\
& x_1 \cdot (2y_1 + 2y_2 - 100) = 0 & iii \\
& x_2 \cdot (6y_1 + y_2 - 100) = 0 & iv \\
& x_3 \cdot (10y_1 - 100) = 0 & v
\end{array}
$$

ger ur iii och iv att $\begin{array}{l} 2y_1 + 2y_2 = 100 \\ 6y_1 + y_2 = 100 \end{array}$, dvs. $y_1 = 10, y_2 = 40$.

Du tillåtenhet: återstår att kontrollera:

$$
\begin{array}{ll}
10y_1 \leq 100 & \text{ok} \\
y_1, y_2 \geq 0 & \text{OK}
\end{array}
$$

Alla optimalitetsvillkoren uppfylls tillsammans med den (unika) duala optimalllösningen $y_* = (10, 40)^T$.

b) Med utgångspunkt från den optimala duala optimallösningen utnyttjas optimalitetsvillkoren för att finna samtliga x_* som satisfierar dem.

$y_* = (10, 40)^T$ uppfyller de tre linjära bivillkoren i (D) med likhet, så iii - v ger inget. Ur i - ii fås ($y_* > 0!$):

$$
\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 240 \\ 2x_1 + x_2 = 60 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 12 + x_3 \\ x_2 = 36 - 2x_3 \end{array}
$$

Primal tillåtenhet som återstår att lägga till är $x \geq \mathbf{0}$, vilket ger att $x_3 = 18$ måste gälla.

Samtliga optimallösningar ges alltså av:

$$
x_* = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 18.
$$

2.2.18 Betrakta problemet (P) $\begin{array}{rl} \max & u^T b, \\ \text{då} & u^T A \leq 0, \end{array}$

Med dual (D) $\begin{array}{rl} \min & 0, \\ \text{då} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$ (P) har alltid en tillåten lösning, nämligen nollvektorn.
Om det finns en lösning till (P) med $u^T b > 0$ så är (P) obegränsat ty om u är en lösning är även $2u$ en lösning. I detta fall saknar (D) en lösning då primalen är obegränsad. Om en obegränsad lösning till (P) ej existerar vet vi att (P) har en begränsad lösning (nollvektorn) och därmed vet vi även att (D) har en begränsad lösning. Därmed vet vi att exakt ett av systemen har en lösning.

2.2.19 Fas I: optimal lösning $y = (0, 0, 2)^T$ $s = (0, 3, 2)^T$. Fas II: Ingen utgående variabel $\Rightarrow$ obegränsad lösning i dualen $\Rightarrow$ primalen saknar lösning.

2.2.20

a) $c^T \bar{x} \leq (A^T \bar{y})^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} = (A\bar{x})^T \bar{y} \leq b^T \bar{y}$

b) Då $\bar{y}$ är tillåten i (D) så vet vi att för alla x tillåtna i (P) gäller $c^T x \leq b^T y$. Om vi har $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ så vet vi att det inte kan existera en bättre lösning till (P) varför $\bar{x}$ är optimal.

c) $\bar{y}^T(b - A\bar{x}) = 0$ medför $\bar{y}^T b = \bar{y}^T A\bar{x})$ och $\bar{x}^T(A^T\bar{y} - c) = 0$ medför att $\bar{x}^T A^T \bar{y} = \bar{x}^T c$. Då $\bar{x}^T A^T \bar{y} = \bar{y}^T A \bar{x}$ har vi den önskade likheten.

d) Då $\bar{x}$ och $\bar{y}$ år ickenegativa vet vi att för tillåtna lösningar har vi att $c^T\bar{x} \leq \bar{y}^T A\bar{x} \leq \bar{y}^T b$. $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ förutsätter strikt likhet i dessa olikheter varur de önskade uttrycken följer.

2.2.21 Problemet

$$\begin{array}{rrcl} \max & z = c^T x & & \\ \text{då} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

har dual

$$\begin{array}{rrcl} \min & w = b^T y & & \\ \text{då} & A^T y & \geq & c \end{array}$$

Om vi har en optimal bas så har vi $x_b = B^{-1}b$ och $x_n = 0$ Väljer vi $y^T = c_b B^-1$ så vet vi att $y^t b = c_b B^{-1} b$ varför primal och dual har samma målfunktionsvärde. Då basen är primalt optimal har vi att $c - c_b B^{-1} A \leq 0$ vilket medför att $c \leq c_b B^{-1} A = y^T A$ varför vårt val av y är dualt tillåtet. Y är nu dualt tillåten och har samma målfunktionsvärde som en primalt tillåten lösningen varför vi har ett optimalt par av lösningar.

2.2.22

a) Dualen blir

$$\begin{array}{llrcrcr} \text{(P)} & \max w = & & & y_2 & & \\ & \text{då} & y_1 & - & y_2 & \geq & 0 \\ & & y_1 & + & y_2 & \leq & -1 \\ & & y_1 & & & \geq & -1 \\ & & y_1 & + & y_2 & \leq & 2 \end{array}$$

b) Optimal dual lösning blir $y = (-0.5 - 0.5)$

c) Duala bivillkor 3 och 4 binder ej vilket ger oss att $x_3 = x_4 = 0$. Båda de primala bivillkoren binder (nollskillda dualvariabler) vilket ger att $x = (-0.50.500)$.

2.2.23

a) $x = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$ tillåten

b) Tillhörande duallösning $y^T = c_B^T B^{-1} = (0, 0, 2)$ är ej tillåten.

c) Baslösningen är ej optimal, ty tillhörande duallösning är ej tillåten.

2.2.24

a) $y = c_B^T B^{-1} = (2, 0)^T$

b) $c^{\bar{n}y} = 1 \ \Rightarrow$ ej optimal längre

c) Skuggpriset talar om hur mycket målfunktionsvärdet ändras vid ökning av ett högerled. Välj bivillkor 1 ty $y_1 = 2 > y_2 \Rightarrow \Delta b_1 \leq -8$.

d) $\bar{c}^{ny} = 1 \ \Rightarrow$ ej optimalt $\Rightarrow$ låt x_4 vara inkommande. Ny lösning $x^* = (4 \ 4)^T$, $z^* = 20$.

2.2.25

a) $x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix}$ ty $BB^{-1} = I$ om $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $c_N = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $z = 4$, $y^T = c_B^T B^{-1} = (-3, 2, 0)$

$c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (7, 3, -2) \Rightarrow$ ej optimal. x_1 inkommande, x_2 utgående.

b) Duallösningen fås mha komplementaritet, $y^T = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)^T$. Primallösningen och duallösningen är tillåtna $\Rightarrow x$ är optimal.

2.2.26

a) $z = 8$, $x_B = (x_3, s_1, s_3)^T = (4, 16, 2)^T$, $x_N = (x_1, x_2, s_2)^T$
$y^T = c_B^T B^{-1} = (0, 2, 0)$, $\bar{c}_N = (3, 2, -2)$
x_1 inkommande, s_3 utgående $\Rightarrow$ ny lösning $(2/3, \ 0, \ 14/3, \ 44/3, \ 0, \ 0)^T$, $z = 10$

b) Ja, ty $\bar{y}^T = (0 \ 1 \ 1)$ dualt tillåten. Primalt tillåten, dual tillåten samt komplementaritet uppfyllt $\Rightarrow$ optimum.

c) $x^* = (1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2 \ 0 \leq \lambda \leq 1$ där $x^1 = (0, 1, 3)^T \ x^2 = (2/3, \ 0, \ 14/3)^T$.

2.2.27 Dualvariabeln får värdet 1.

2.2.28

a) $x^* = (1, \ 1, \ 0)^T$, $z^* = 5$

b) -

c) x^* primalt tillåten $y^* = (1,\ 1)^T$ dualt tillåten $\Rightarrow x^*$ optimal

d) x^* optimal om $2c_1 \geq c_2 \geq c_1$ och $3c_1 - 2c_2 \leq 4$

2.2.29

$$
\begin{array}{ll}
\max & \lambda_0^T a \\
\text{då} & \begin{cases} \lambda_k^T = \lambda_{k+1}^T A + c_k^T & k = 0, 1, \ldots, N-1 \\ \lambda_N^T = c_N^T & \qquad\qquad\qquad (\text{med } c_0 = d_0 = 0) \\ \lambda_k^T \geq -d_{k=1}^T & k = 1, 2, \ldots, N \qquad (\text{Anm: } d_N \geq 0 \text{ nödvändigt}) \end{cases}
\end{array}
$$

2.3 Simplex

2.3.1

a) På matrisform med slackvariabler s_1, s_2 får vi

$$
\begin{aligned}
&\min z = c^T x \\
\text{då} \quad &Ax = b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

med $c^T = [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 0], b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = [x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2]$

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Då ingen uppenbar bas finnes löser vi fas I med en artificiell variabel tillhörande bivilkor 1. Vi får problemet

$$
\begin{aligned}
&\max \hat{c}^T \hat{x} \\
&\text{då } \hat{A}\hat{x} = b, \hat{x} \geq 0 \\
&\text{med} \quad \hat{c}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \\
&\qquad \hat{A} = [A| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x} = [x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad 9]
\end{aligned}
$$

Vi har den uppenbara basen s_2, q.

Denna bas ger oss $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Med reducerad kostnad $\bar{\hat{c}}$ får vi

$\bar{\hat{c}} = \hat{c} - \hat{c}_B B^{-1} A$

$$
= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-2 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]
$$

Inkommande blir x_1.

Vi beräknar $y = B^{-1}A^{x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ samt $\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vi får utgånende som $\text{argmin}_{i,y_i>0} \dfrac{\bar{b}_i}{y_i} = 2$

Den andra basvariabeln (a) blir utgående. Vi har nu en tillåten bas x_1, s_2.

a är icke-basvar $\Rightarrow a = 0 \rightarrow$ vi är klara med fas I.

Åter till fas II.

Vår bas x_1, s_2 ger oss $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, c_B^T = [-1 \quad 0], B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Vi beräknar reducerad kostnad

$\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A =$

$$= [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 0] - [-1 \quad 0]\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 2.5 \quad -0.5 \quad 0]$$

Detta ger oss att s_1 blir inkommande, ty s_1 har störst negativ reducerad kostnad.

Vi beräknar $y = B^{-1}A^{s_1} = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\bar{b} = B^{-1}b = \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

min ratio ger utgående $\text{argmin}_{i,y_i>0} \frac{\bar{b}_i}{y_i} = 2$ Vår andra basvariabel, s_2 blir utgående. Ny bas blir x_1, s_1.

Beräkna reducerad kostnad

$$\left(B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\bar{c} = c - c_B^T B^{-1} A = [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 0] - [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{c} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$. $\bar{c} \geq 0$, dvs basen är optimal.

Basvariablernas värde blir $\begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

Kontroll!

Insättning ger

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - s_1 &= 2 + 0 - 1 + 0 = 1 \quad \text{OK!} \\ x_1 - x_2 + s_2 &= 1 + 0 + 0 = 1 \quad \text{OK!} \\ z = c_B^T B^{-1} b &= -1 \end{aligned}$$

b) Beräkna reducerad kostnad (varning för förvirrande c!)

$$\bar{c} = c - c_B^T B^{-1} A = [c \quad 2 \quad 0 \quad 0] - [c \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{c} = [0, 2 + c, 0, -c]$

Vi ser att $\bar{c} \geq 0$ för $-2 \leq c \leq 0$.

Föregående bas är därför optimal för $-2 \leq c \leq 0$.

2.3.2 Inför slackvariabler x_3, x_4, x_5.

b) Punkt respektive basvariabler: $(0,0) \Rightarrow x_3, x_4, x_5$; $(0,2) \Rightarrow x_2, x_4, x_3$; $(2,2) \Rightarrow x_1, x_2, x_4$; $(14/3, 2/3) \Rightarrow x_1, x_2, x_5$.

c) x_2 inkommande och x_3 utgående.

2.3.3

a) $x = (8, 6, 24, 0), z = 32$

b) Ny lösning $x^* = (4, 0, 8, 2)$.

c) Obegränsad lösning $x = (8, 6, 24, 0) + t(2, 3, 8, 1), t \geq 0, z = 32 - 10t$.

2.3.4

a) Basvar: $(x_1, x_4, x_6) = (2, 10, 6)$

b) -

c) Nej

d) -

e) -

f) $(x_1, x_2, x_6) = (32, 2, 4)$.

g) Ja.

2.3.5 Substituera $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, båda dessa variabler är positiva. Multiplicera bivillkor 3 med -1. Inför artificiella variabler och minimera summan av dessa.

2.3.6 Multiplicera biv. med -1. Inför artificiella variabler och dito målfunktion. reducerade kostnaderna är optimala i startlösningen.

2.3.7 T.ex. $x = (5, 0, 2, 0)$

2.3.8 Använd $7x_1 + 5x_2$ som målfunktion och kolla optimala värdet.

2.3.9 Optimallösning $(x_1, x_2, x_3) = (4, 1, 2)$ med värde 11. Ej unik lösning.

2.3.10 Alternativa optimala extrempunkter $x = (0, 1), x = (56/17, 45/17)$.

2.3.11

a) -

b)
   1) 20
   2) $y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 0.$
   3) $-3 \leq c_1 \leq 3, c_2 \geq 1$
   4) $4 \leq b_1 \leq 16, -4 \leq b_2 \leq 8, 2 \leq b_3$

2.3.12

a) $y_1 = -2.5, y_2 = 0, y_3 = 32.5$

b) $c_1 \geq 22.5$

c) $c_3 \leq 27\frac{1}{3}$

2.3.13

a) $4 \leq c_2 \leq 12.$

b) $6 \leq b_2 \leq 14$

c) Aktuell lösning optimal ty reducerade kostnaden 0 för den nya variabeln. Multipla lösningar finns.

d) $x^* : x_1 = 4.2, x_2 = 3.2, z^* = 40.2.$

2.3.14

a) $c_2 \leq 26$

b) $c_3 \geq -3/5.$

c) Optimallösningen oförändrad.

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 9$$

Vilken blir det modifierade problemets optimallösning?

2.3.15

a) Nuvarande optimallösning:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad b^{NY} = b + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ger $x_B^{NY} = B^{-1}b^{NY} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51/2 \\ 4 \\ 41/2 \end{bmatrix}$. Eftersom $X_B^{NY} \geq 0$ är X_B^{NY} optimal. Funktionsvärde:

$$c^T x^{NY} = c_B^T x_B^{NY} = (-2, -1, 0) \begin{bmatrix} 51/2 \\ 4 \\ 41/2 \end{bmatrix} = -15.$$

Förändringen är $-15 - (-13) = -2$.

Skuggpriset för bivillkor 3 är värdet av dess dualvariabel, dvs $y_3^* = -2$ (hela den duala vektorn är $(0, -1, -2)^T$)/ Skuggpriset anger just den marginella förändringen av det optimala målfunktionsvärdet vid en förändring med en enhet i ett högerled, varför de två storheterna är lika.

b) Då c_1 förändras kommer de reducerade kostnaderna att förändras:

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} b = (1, 2); \text{ med } c_B^{NY} = c_B + (0, 4, 0)^T$$
$$\text{fås därför } (c_N^{NY})^T = c_N^T - (c_B^{NY})^T B^{-1} b = \bar{c}^T N - (0, 4, 0) \cdot B^{-1} b$$
$$= (1, 2) - 4 \cdot (0, 1) = (1, -2).$$

Eftersom $\bar{x}_{s_3} < 0$ är inte x_B längre en optimal bas. Om s_3 införs i basen (obs: ny målfunktionsrad: $[1\,0\,0\,0\,1\; -21]$) fås s_2 som utgående. Efter en pivotering fås $x_B^* = (x_2, x_1, s_3) = (4, 1, 2)^T$ och $z^* = -5$.

c) Beräkna dess reducerade kostnad givet den aktuella optimalbasen:

$$\bar{c}_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} \cdot a^3 = -2 - [0, -1, -2] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 > 0.$$

Eftersom det är ett minimeringsproblem tjänar vi inte på att öka x_3 från noll. Den nya aktiviteten påverkar inte optimallösningen.

2.3.16 Lägg till slackvariabler. Detta ger 10 variabler och 4 bivillkor. 4 av 10 kan väljas på 210 olika sätt.

2.3.17

Fas-1 problemet:
minimera $w = a$

$$\text{då} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + s_1 = 3 \\ x_1 + x_2 - s_2 + a = 5 \\ x_1, \quad x_2, \quad s_1, \quad s_2, \quad a \geq 0 \end{cases}$$

$x^* = (3, 2)^T$; $z^* = -8$.

2.3.18

a) Efter införande av slackvariabler är problemet ekvivalent med problemet att

$$\text{minimera } f(x) := -x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{då} \begin{bmatrix} \\ \\ 2x_1 + \ x_2 - \ x_3 + s_1 \qquad = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + +3x_3 \qquad - s_2 = 3 \\ x_1 \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1, \quad s_2 \geq 0 \end{bmatrix}$$

Ett Fas-I problem skapas genom tillägg av en artificiell variabel i det andra bivillkoret:

$$\text{minimera } h(a) := a$$

$$\begin{array}{ll} \text{då} & 2x_1 + \ x_2 - \ x_3 + s_1 \qquad\qquad = 7 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad - s_2 + a = 3 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_2, \quad s_1, \quad s_2, \quad a \geq 0 \end{array}$$

Startbas: s_1, a.

$$x^* = (24/5, 0, 13/5)^T; z^* = -11/5$$

b) Skuggpriserna ges av de optimala värdena hos variablerna i motsvarande duala problem. Tecknen hos dem är ≤ 0 respektive ≥ 0, och deras numeriska värden (sånär som på tecken) återfinns som reducerade kostnader hos slackvariablerna. Följaktligen är $y^* = (-2/5, 1/5)$. Om nu 3 ersätts med $3 + \epsilon$ i högerledet för bivillkor två kommer det optimala värdet förändras med $\epsilon/5$.

2.3.19

a) Efter tillägg av en slackvariabel s_1) fås:

$\min z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$

$$\begin{array}{ll} \text{då} & 2x_1 \qquad\quad + x_3 - s_1 = 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 5 \\ & \ \ x_1, \ x_2, \ \ x_3, s_1 \geq 0 \end{array}$$

för att identifiera en tillåten baslösning, löses först Fas-1 problemet att minimera $w = a_1 + a_2$

$$\begin{array}{ll} \text{då} & 2x_1 \qquad\quad + x_3 - s_1 + a_1 = 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + a_2 = 5 \\ & \ \ x_1, \ x_2, \ \ x_3, s_1 \geq 0 \end{array}$$

$x_* = (0, 1, 3)^T, z_* = 5$

En alternativ optimal extrempunkt är

$$x_* = (0, 0, 5)^T, z_* = 5.$$

Samtliga optimallösningar ges av mängden.

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 / \bar{x} = \lambda(0, 1, 3)^T + (1 - \lambda)(0, 0, 5)^T \text{ för något } \lambda \in [0, 1]\}.$$

2.3.20

a) $y_3^* = 1$. Giltighet:

$$B^{-1}b^{NY} = B^{-1}\Big(b + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \in [-10, 6] \quad \because b_2 \in [-3, 13].$$

b) $\Delta b_2 = 8 > 6$. Nuvarande bas B är optimal men otillåten. Duala simplex återställer tillåtenhet.

Nytt optimum: $x^* = (3, 8)^*$; $z^* = 19$. Förändring i $\Delta z = 6$.

c) I den nuvarande basen har x_3 den reducerade kostnaden

$$\bar{c}_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} a^3 = c_3 - (0, 1, 2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_3 - 3.$$

For att z^* skall öka måste $\bar{c}_3 > 0$ gäller, d.v.s. $c_3 > 3$.

2.3.21

a) Efter tilläggs av en slackvariabel fås:

$$\begin{aligned} \min z &= -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{då} \quad 2x_1 - x_2 + x_3 + s_1 &= 20 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad &= 20 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Fas-1-problemet:

$$\begin{aligned} \min w &= a_1 \\ \text{då} \quad 2x_1 - x_2 + x_3 + s_1 \qquad &= 20 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + a_1 &= 20 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 \quad s_2, \quad a_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Optimum: $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (40/3, 20/3, 0)$; $z^* = 200/3$.

b) $x_B = (s_1, x_3)^T \to B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Bx_B = b \Leftrightarrow x_B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

$B^T y = c_B \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$;

$\bar{c}_N^T = c_N^T - y^T N = (-4, -2) - (0, -2) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (-4, -2) - (-2, -2) = (-2, 0) \Rightarrow x_1$ inkommande.

$B\bar{a}_1 = a_1 \Leftrightarrow \bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \min\{\frac{10}{3/2}, \frac{10}{1/2}\} = \frac{20}{3} \Rightarrow s_1$ utgående.

$x_B = (x_1, x_3)^T \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Bx_B = b \Leftrightarrow x_B = \begin{bmatrix} 20/3 \\ 20/3 \end{bmatrix}$

$B^T y = c_B \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} -4/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}; \bar{c}_N^T = c_N^T - y^t N = (-2, 0) - (-4/3, -4/3) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$
$(-2, 4/3)$

Dualen är:
$\max v = 20y_1 + 20y_2$

$$\text{då} \begin{cases} 2y_1 + \ \ y_2 \leq -4 & \text{uppfylls} \\ -y_1 + \ \ y_2 \leq -2 & \text{uppfylls ej} \quad \leftarrow \\ y_1 + 2y_2 \leq -4 & \text{uppfylls} \\ y_1 \leq 0 & \text{uppfylls} \end{cases}$$

2.3.22

a) Betrakta problemet

$$\min z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{då} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Skriv på standardform med hjälp av slackvariabler s_1 och s_2

$$\min z = 2x_1 + x_2$$
$$\text{då} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - s_1 &= 3 \\ x_2 + s_2 &= 1 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Inför en artificiell variabler i bivillkor 1 för att lösa fas-I problemet och hitta en tillåten bas till fas-II.

$$\min w = a_1$$
$$\text{då} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - s_1 + a_1 &= 3 \\ x_2 + s_2 \qquad &= 1 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 a_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Optimal punkt:$x_1 = 1/3, x_2 = 1, z = 5/3$

Kontroll! Sätt in i ursprungsproblem.

$$z = 2x_1 + x_2 = 2 \cdot 1/3 + 1 = 5/3 \quad \text{OK}$$

$$\begin{array}{lr} \text{Bivilk. 1} & 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 1/3 + 2 \cdot \geq 3 \quad \text{OK} \\ \text{Bivilk. 2} & x_2 = \quad 1 \geq 1 \quad \text{OK} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{OK} \end{array}$$

b) Titta på dualvariablerna till problemet

$$
\begin{aligned}
&\min 2x_1 + x_2 \\
\text{då}\quad &3x_1 + 2x_2 - s_1 = 3 \\
&\quad x_2 \qquad + s_2 = 1 \\
&x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Den optimala basen var $x_1, x_2 \Rightarrow$ basmatris $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B^{-1} = \begin{matrix} 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad y = c_B^T B^{-1} = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2/3 - 1/3$

Detta ger att då vi ändrar högerledet med $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ändras målfunktionens värde med y $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$, under förutsättning att vi ej byter bas.

Högerledet med bas

$$x_1, x_2 = B^{-1} b(\alpha) = B^{-1} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi ser att $B^{-1} b(\alpha) \geq 0$. För $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$ för $\alpha < -\frac{1}{2}$ blir problemet olösligt då vi får kraven

$$x_2 \leq 1 + 2\alpha, \quad x_2 \geq 0$$

för $\alpha > \frac{1}{3}$ får vi en ny bas.

Sätt $\alpha = 1$ och lös grafiskt

$$
\begin{aligned}
&\min z = 2x_1 + x_2 \\
&\text{då } 3x_1 + 2x_2 \geq 3 + 1(-1) = 2 \\
&\quad x_2 \qquad \leq 1 + 1 \cdot (2) = 3 \\
&x_1 - x_2 = 0
\end{aligned}
$$

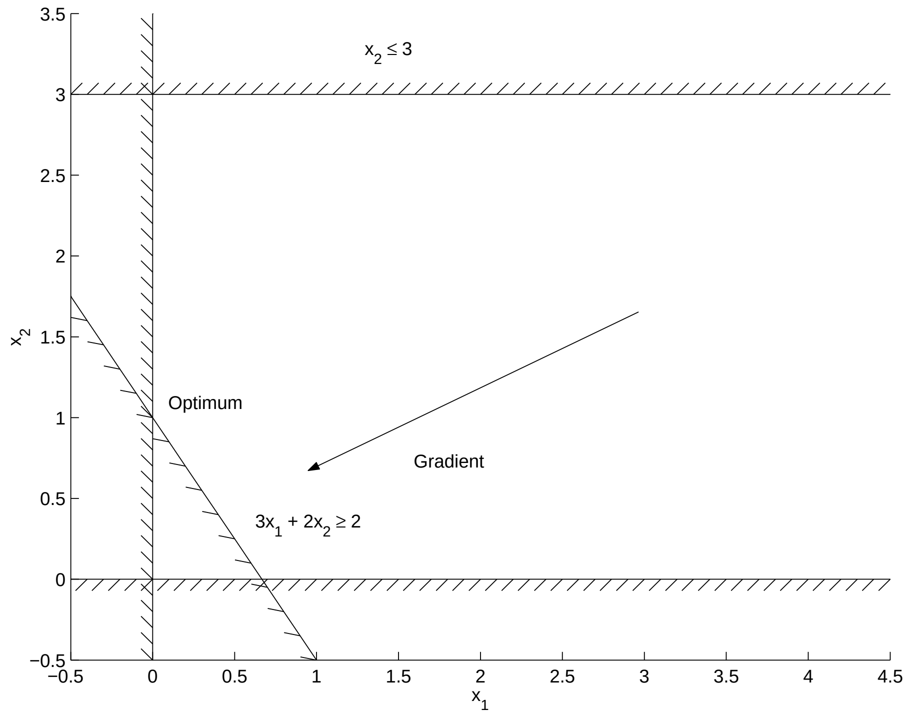
Ur grafen i fig 18 ser man att nybas blir x_2, s_2 då dessa är nollskillda. Vi gör samma beräkning som tidigare

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$y = c_B^T B^{-1} = [1 \quad 0] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [1/2 \quad 0]$$

Kostnadsförändringen då vi ändrar α blir därmed $[1/2 \quad 0] \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1/2\alpha$

Vi har $\bar{b} = B^{-1} b(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$



Figur 18: Bild till upg 2.3.22

$B^{-1}b(\alpha) \geq 0$ för $\alpha \geq \frac{1}{3}$ och basen x_2, s_2 är därmed optimal för $\alpha \geq \frac{1}{3}$

$$z(\alpha) \text{ för } \alpha \geq \frac{1}{3} \text{ är } c_B^T B^{-1} b(\alpha) - [1 \quad 0]\left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right) = \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

Därmed har vi

$$z(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha, & \alpha < -\frac{1}{2} \\ 5/3, & -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}, & \frac{1}{3} < \alpha \end{array} \right\}$$

2.3.23

Fas I: Inför slackvariabler $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ och artificiella variabler $q_1, a_2 \geq 0$.
Minimera $w = a_1 + a_2$.
Startbas: $s_1, a_1, a_2; \quad w = 7$
Basbyte: $s_1, a_1, x_1: \quad w = 5/2$
Basbyte: $s_1, x_2, x_3; \quad w = 0$. Red kostn. ≥ 0.
Byte till fas II: maximera $z = x_1 - 3x_2$
Startbas: $s_1, x_2, x_1; \quad z = -1$
Basbyte: $s_3, x_2, x_1; \quad z = 0$ Red kostn. ≤ 0.
$x_* = (3, 1)^T; z_* = 0$.

2.3.24 Inför artificiella variabler i villkor 1 och 2. Lös fas I av simplexmetoden $\Rightarrow w^* = 2$ $\Rightarrow$ tillåten punkt saknas.

2.3.25 $x^* = (2, 0, 0), \quad z^* = 10$.

2.3.26 Det krävs 4800 plåtar, exempelvis 1800 av nr 1 och 3000 av nr 3 (alternativa lösningar finns).

2.3.27 Inför artificiella variabler och tillämpa simplex fas I. $w^* = 1 > 0 \Rightarrow$ systemet saknar lösning.

2.3.28

a) $x^* = (15,\ 0,\ 0,\ 5)^T \ \Rightarrow\ z^* = 15$

b) Ur optimaltablån: $y^* = (2,\ -1)^T$. Verifiera primal och dual tillåtenhet samt stark dualitet.

2.3.29 Formulera på kanonisk form:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
-2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +s_1 & & & & = & 1 \\
x_1 & -x_2 & -x_3 & & & +a_2 & & = & 1 \\
x_1 & & -2x_3 & & -s_3 & & +a_3 & = & 4 \\
 & & \multicolumn{5}{r}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_3,\ a_2,\ a_3} & \geq & 0
\end{array}$$

Målfunktion Fas I: $\min w = a_2 + a_3 = 5 - 2x_1 + x_2 + 3x_3 + s_3$
Iteration 1: inkommande x_1, utgående a_2
Iteration 2: inkommande x_2, utgående s_1
Optimum, men $w^* = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow$ tillåten lösning saknas!

2.3.30 Fas I: 2 iterationer ger $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$. Fas II: 1 iteration ger $x = (2, 3)^T$.

2.3.31

a) Vi lägger till villkoret $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$ och hittar en tillåten lösning m.h.a simplex. Detta ger $x = (2, 1, 0)$.

b) $x = (0, 9, 8)$

2.3.32 $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}b^{ny} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 44 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 44 \end{bmatrix}$ $c_B^T B^{-1} b^{ny} = 328$
Använd duala simplex för att hitta en tillåten lösning. $x = (0, 2, 34)^T$

2.3.33

a) Skuggpriset är 3 och är giltigt för högerled mellan 4 och 6.

b) $x^* = (1,\ 4)^T$

c) $x^* = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

2.3.34 -

2.3.35 -

2.3.36 -

2.4 Övrigt

2.4.1 $x = (0, 0, 0, 5), z = 3500.$

2.4.2 $x = (0, 4)$ eller $x = (32/7, 12/7)$, $z = 24$.

2.4.3 $c_3 \leq 5, c_4 \leq 8.$

2.4.4 Det finns $\binom{5}{2} = 10$ baslösningar. Av dessa är 6 tillåtna. En är $x_1 = x_2 = x_3 = 0, s_1 = 5, s_2 = 6$ (tillåten) e.t.c

2.4.5 -

2.4.6

2.4.7

b) $x^1 = (0, 3/2), x^2 = (3/2, 1/2).$

c) $x = \lambda(0, 3/2) + (1 - \lambda)(3/2, 1/2), 0 \leq \lambda \leq 1$

2.4.8

b) $x = (2, 4) + \mu(1, 0), \mu \geq 0.$

2.4.9

a) T.ex. $\min z = x_2$

b) T.ex. $\min z = -x_1$

2.4.10

a)

$$\begin{aligned} &\text{minimera } d^T x. \\ &\text{då} \quad Ax \geq b \\ &\qquad c^T x \leq c^T x^* \\ &\qquad\quad x \geq \mathbf{0}^n \end{aligned}$$

där x^* är en godtycklig optimalllösning till ursprungsproblemet.

b) x^* är en optimalllösning till LP-problemet om det finns en dual lösning $y^* \in \mathbb{R}^m$ så att

$$\text{i)} \quad \left.\begin{array}{c} Ax^* \geq b \\ x^* \geq \mathbf{0}^n \end{array}\right\} \quad \text{Primal tillåtenhet.}$$

$$\text{ii)} \quad \left.\begin{array}{c} A^*y^* \leq c \\ y^* \geq \mathbf{0}^m \end{array}\right\} \quad \text{Dual tillåtenhet.}$$

$$\text{iii)} \quad \left.\begin{array}{c} (y^*)^T(Ax^* - b) = 0 \\ (x^*)^T(A^Ty^* - c) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Komplementaritet.}$$

Antag att (x^*, y^*) uppfyller i) - iii). Från i) - ii) fås *svag dualitet*:$b^T y^* \leq c^T x^*$. Från iii) fås att

$b^t y^* = (y^*)^T A x^* = c^t x^*$, d.v.s. stark dualitet. Då måste x^* lösa primalen och y^* lösa dualen, eftersom $b^T y = c^T x$ gäller för alla tillåtna par (x, y) [följdsats].

Antag att x^* är en optimallösning till vårt LP-problem. Speciellt är då i) sann. Angtag att x^* är en optimal extrempunkt. Till den finner då en motsvarande optimal baslösning $(x_B, x_N) \geq (0, 0)$. Att denna är optimal innebär att $\bar{c}^T := c^T - c_B^T B^{-1} A \geq \mathbf{0}^T$. För x-variablerna fås särskilt, med $(y^*)^T = c_B^T B^{-1}$, att $\bar{c}_x^T = c_x^T - (y^*)^T A \geq \mathbf{0}^T$, d.v.s. $A^T y^* \leq c$. För slackvariablerna fås att $\bar{c}_s^T = \mathbf{0}^T - (y^*)^T I \geq 0^T$, d.v.s. $y^* \geq \mathbf{0}$. Alltså är $y^* := (c_B^T B^{-1})^T$ tillåten i dualen, så för (x^*, y^*) är också ii) uppfyllt. Återstår iii). Från svag dualitet: $b^T y^* \leq (y^*)^T A x^* = (x^*)^T A^T y^* \leq c^T x^*$. Vi har också $c^T x^* = c_B^T x_B = c_B^T B^{-1} b = b^T y^*$, dvs stark dualitet. Likhet ovan ger iii). Klart [Om x^* ej extrempunkt görs oraxx. för en konvexkombination av optimala extrempunkter.]

2.4.11

a) tillägg av slackvariabler och en artificiell variabel (bivillkor 1) ger Fas-1-problemet.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimera } w = a & & & & & & & & & \\
\text{då} & 2x_1 & + & x_2 & - & s_1 & & & + a & = 2 \\
& -x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & & = 1 \\
& x_1, & & x_2, & & s_1, & & s_2, & a & \geq 0
\end{array}$$

med optimal lösning

$$x^* = (1/3, 4/3); z^* = 7/3$$

b) Motivering: Vi kan tolka minimeringen av $c^T x$ som valet av det lägsta värdet av $z = c^T x = c_B^T x_B = c_B^T B^{-1} b$ över alla tillåtna baslösningar B. Från den starka dualsatsen vet vi att $y^* = (c_B^T B^{-1})^T$ är <u>en</u> dual optimal lösning för ett optimalt val av B. Så om y^* är unik kan vi skriva $z^* = \min c^T x = b^T y^*$, vilket anger värdet av z^* som funktion av b. Skuggpriset för bivillkor i är y_i^*, vilket också fås ur $z^*(b) = b^T y^*$ som en partiell derivata, $\partial z^*(b)/\partial b_i$, då den existerar. Den reducerade kostnaden för en slackvariabel s_i, i ett $\geq$-villkor är $\bar{c}_{s_i} = 0 - (c_B^T B^{-1})(-e_j) = y_i^*$, där e_j är den i:te enhetsvektorn, dvs $\bar{c}_{s_i}$ är precis skuggpriset för bivillkor i.

2.4.12

a) Lös LP-problemet med målfunktionskoefficient $c^2 + \lambda_p$, där $p = C^1 - C^2$, och lös först för $\lambda = 0$.

Givet optimalbasen B bestäms det högsta värdet för λ för vilket optimalitet bibehålls: vi skall ha

$$(C_N^2 + \lambda p_N)^T - (C_B^1 + \lambda p_B)^T B^{-1} N \leq \mathbf{0} \Leftrightarrow$$
$$\lambda(p_N^T - p_B^T B^{-1} N) \leq -(C_N^{2T} - C_B^{T_2} B^{-1} N).$$

Av intresse är de i för vilka $(p_N^T - p_B^T B^{-1} N)_i > 0$. Vi får:

$$\bar{\lambda} = \min_i \Big\{ -\frac{(C_N^{2T} - C_B^{2^T} B^{-1} N)_i}{(p_N^T - p_B^T B^{-1} N)_i} \big| (p_N^T - p_B^T B^{-1} N)_i > 0 \Big\}.$$

Det index i som ger min motsvarar den inkommande basvariabeln vid besbytet som sker då $\lambda > \bar{\lambda}$. Om inget index i finns betyder det att basen är optimal för alla $\lambda \geq 0$, annars pivoteras till en ny optimal bas är nådd, varefter förfarandet upprepas från nästa aktuella värde av $\lambda(\bar{\lambda})$.

Kompromisslösningarna består av de optimala lösningar som passerats då λ har ändrats från 0 till 1.

b) Geometrisk lösning ger att

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ för } \lambda \in [0, 1/2]$$
$$x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ för } \lambda \in [1/2, 1]$$

2.4.13

a) I en baslösning (x_0, x_N) gäller att

$$BX_B + NX_N = b \Leftrightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N. \quad \text{Om } x_j (j \in N)$$

ökar från noll fås därför att

$$X^{NY} = \begin{bmatrix} B^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \ell \begin{bmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{bmatrix},$$

där $\begin{array}{l} a_j \text{ är kolumn } j \text{ i } N \text{ och} \\ e_j \text{ ör den } j\text{:te enhetsvektorn} \end{array}$ $\because p_j = \begin{bmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{bmatrix}$

I baslösningen gäller också att den reducerade kostnaden är

$$\bar{C}_N^T = C_N^T - C_B^T B^{-1} N.$$

Vi har nu att

$$C^T \rho_j = (C_B, C_N)^T \rho_j = -C_B^T B^{-1} a_j + C_N^T e_j$$
$$= C_j - C_B^T B^{-1} a_j = \bar{C}_j.$$

Att välja minsta värdet på $\bar{C}_j$ är alltså detsamma som att välja minsta värdet av ρ_j.

b) Inkommandekriteriet är skalningsberoende, och beror till exempel på längden hos varje halvlinjes riktningsvektor ρ_j. Ett skalningsoberoende mått är i stället

$$\min_{j\in N}\left\{\frac{C^T\rho_j}{\|\rho_j\|}\right\}.$$

2.4.14

a) Se sats 6.1, sid. 150 i Nash & Sofer.

b) Se sektion 5.3.4 i Nash & Sofer.

c) $(\Rightarrow)$ trivialt

$(\Leftarrow)$ Antag att det finns en lösning till olikhetssystemet som uppfyller $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i$, för något i. Adderas olikheterna till varandra fås då att $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} < \sum_{i=1}^{m} b_i$, vilket är en motsägelse.

2.4.15 Låt

$$f(x) = \max_{t\in T} \quad \{|f(t) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t)|\}$$
$$f_L(x) = \max_{t\in T_m} \quad \{|f(t) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t)|\}$$

där $T_m = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$.

a) Eftersom T_m är en delmängd av T är
$f_L(x) \leq f(x) \Longrightarrow (P')$ är en relaxering av (P). Låt vidare $\hat{x}_L$ vara en optimallösning till (P') och p optimalvärdet i (P).

$$f_L(\hat{x}_L) = \leq p \leq f(\hat{x}_L) = \max_{t\in T}\{|f(t) - \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{Lj} f_j(t)|\}$$

b)

$$\begin{array}{ll} & \min x_0 \\ (P'') & \text{då} \begin{cases} x_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t_i) \geq f(t_i) & i = 1, 2, \ldots, m \\ x_0 - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t_i) \geq -f(t_i) & i = 1, 2, \ldots, m \\ x_0 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

c)

$$(D'') \quad \max \sum_{i=1}^{m} (\mu_i - v_i) f(t_i)$$
$$\text{då} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} (\mu_i + v_i) \leq 1 & \\ \sum_{i=1}^{m} (\mu_i - v_i) f_j(t_i) = 0 & j = 1, 2, \ldots, n \\ \mu_i, v_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

Eftersom det inte lönar sig att ha både μ_i och $v_i > 0$, så kan vi införa $\lambda_i = \mu_i - v_i$ med $|\lambda_i| = v_i + \mu_i$. Vi får följande maximeringsproblem:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(t_i)$$
$$\text{då} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \leq 1 & \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_j(t_i) = 0 & j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

d) -

2.4.16

a) Ger ej otillåtenhet.

b) Ger ej otillåtenhet.

c) Kan ge en otillåten lösning.

d) Kan ge en otillåten lösning.

e) Ger ej otillåtenhet (under förutsättning att man valt en annan *tillåten* hörnpunkt).

2.4.17

a) $$\begin{array}{ll} \min & b^T \lambda \\ \text{då} & A^T \lambda \geq c \end{array}$$

b) $$\begin{array}{ll} \max & b_1^T \lambda_1 + b_2^T \lambda_2 \\ \text{då} & \begin{cases} A_{11}^T \lambda_1 + A_{21}^T \lambda_2 \leq c_1 \\ A_{12}^T \lambda_1 + A_{22}^T \lambda_2 = c_2 \\ \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \text{ fri} \end{cases} \end{array}$$

2.4.18 Maximera målfunktionen $7x_1 + 5x_2$ under de givna bivillkoren (utnyttja exempelvis grafisk lösning). Vilken slutsats drar Du med tanke på det optimala målfunktionsvärdet?

2.4.19

a) $(0,3),\ (2,2),\ (6.5,1.5),\ (4,4)$

b) $(-3,0),\ (0,3),\ (1,4),\ (6.5,1.5),\ (8,0),\ (4,-1),\ (0,0),\ (4,4)$

c) $(0,3),\ (6.5,1.5),\ (4,4)$

d) $(0,3),\ (4,4)$

e) $(0,3)$

2.4.20 Maximala vinsten blir 440000. Den erhålles genom att exempelvis tillverka 100 radialdäck och 500 stålradialdäck (alternativa lösningar finns).

2.4.21

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\max & t & & & & & & \\
\text{då} & -t & + & x_1 & + & x_2 & \geq & 0 \\
 & -t & + & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \\
 & & & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4 \\
 & & - & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & \multicolumn{7}{l}{t \text{ fri};\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0}
\end{array}$$

2.4.22

a) $w^* = 3 > 0 \Rightarrow$ tillåten lösning saknas.

b) Om en sådan variabel blir inkommande (positiv) så blir fas I målfunktionen positiv $\Rightarrow$ Otillåtet

2.4.23 Skapa problemet

$$\left\{\begin{array}{lrcrcr}
\max & 5x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
 & x_1 & - & x_2 & = & 1 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}\right.$$

Om optimala lösningen är störren än 35 var bivillkoret ej redundant. Bivillkoret är redundant, då optimal lösning är $x = (4,3)$.

2.4.24 Dualt problem: max $h(y)$, då $y \geq 0$ där $h(y) = -6y+$

$$+\left[\begin{array}{lrcrcl}
\multicolumn{6}{l}{\min z_1 = (-1+y)x_1 + (-4+y)x_2} \\
\text{då} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}\right] + \left[\begin{array}{lrcrcl}
\multicolumn{6}{l}{\min z_2 = (-1+y)x_3 + (-2+2y)x_4} \\
\text{då} & x_3 & - & x_4 & \leq & 2 \\
 & x_3 & + & x_4 & \leq & 3 \\
 & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}\right]$$

$y = 2 \;\Rightarrow x = (1,3,0,0)^T$ (tillåten) $f(x) = -13$ (UBD), $h(2) = -17$ (LBD)
Svar: $-17 \leq f(x^*) \leq -13$

2.4.25 x^* är tillåten. En komplementär duallösning ges av $y^* = (50,0,100)^T$. Denna är tillåten i dualen, varför x^* är optimal.

2.4.26

a) $z^* \leq z^*_{NY}$

b) $z^* = z^*_{NY}$

c) $z^* \geq z^*_{NY}$

d) ingen relation existerar

e) $z^* \geq z^*_{NY}$

f) $z^* \leq z^*_{NY}$

2.4.27

a) Tittar vi på det duala problemet ser vi att tillåtenheten ej påverkas av b varför problemet är linjärt för varje bas. Då basbyte framtvingas kommer vi att ha samma målfunktionsvärde oavsett bas precis vid brytpunkten.

b) Om $\bar{x}$ och $\tilde{x}$ är tillåtna för $\bar{b}$ och $\tilde{b}$ ger summation att $\alpha\bar{x} + (1-\alpha)\tilde{x}$ är tillåten för $\alpha\bar{b} + (1-\alpha)\tilde{b}$, $\alpha \in [0,1]$. Då den optimala lösningen är minst lika bra som varje tillåten lösning får vi att funktionen är konvex.

2.4.28

$$\begin{array}{lll} \min & z & \\ \text{då} & a_i^T x \leq b_i + z & i = 1,...,m_1 \\ & d_i^T x \geq e_i - z & i = 1,...,m_2 \end{array}$$

om det optimala värdet är positivt är skärningen av mängderna tom.

2.4.29 Använd definitionen på konkav funktion

2.4.30 Vi har basen

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Med målfunktionskoeficcienter $\bar{c} = c - c_b B^-1 A$ och med $c_1 = \alpha$ så får vi $\bar{c} = c - (\alpha, 0)B^{-1}A = c - (0, alpha) * A = (\alpha, 1, -1, -2, 0, 0) - \alpha(1, 0, -1, -2, 0, -1)$. Här har vi c_1, c_2, c_5 oberoende av α. För de övriga koefficienterna har vi att de är ickenegativa för $\alpha \geq 1$.

b) Vi har $B^{-1}b = (1,1)^T$ varför lösningen är tillåten. Då är den optimal då de reducerade kostnaderna är ickenegativa.

c) Reducerad kostnad för den nya variabeln blir $2 - c_b B^{-1}(-1,1)^T = 0$ så lösningen påverkas ej.

2.4.31

a) Skuggpriset $= 7/6$

b) $b_1 \leq 13$

c) $c_1 \leq 4/3$

3 Icke-linjär optimering

3.1 Modellering

3.1.1 Vi definierar index:

$i, i = 1 \dots 3$ Nummer på arbetsplats.

$k, k = 1 \dots 2$ Nummer på telejack.

Samt variabler

x_i, y_i Koordinater för arbetsplats i.

$t_{i,k}$ Indikatorvariabel, värdet är 1 om arbetsplats i är ansluten till jack k.

z Längsta avståndet till fönstret.

Vi får problemet : Minimera avståndet för sämsta arbetsplatsen:

$$\min \quad z \tag{1}$$

Då arbetsplatserna finns i rummet:

$$\frac{d}{2} \leq x_i \leq l - \frac{d}{2}, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{2}$$
$$\frac{d}{2} \leq y_i \leq b - \frac{d}{2}, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{3}$$

Då arbetsplatserna ej inkräktar på varandra:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq d^2, \quad \forall i = 1 \dots 3, \forall j = 1 \dots 3, i \neq j \tag{4}$$

Då sladden räcker:

$$t_{1,k}((x_i - \frac{l}{2})^2 + (y_i - 0)^2) \leq a_i^2, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{5}$$

$$t_{2,k}((x_i - l)^2 + (y_i - \frac{b}{2})^2) \leq a_i^2, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{6}$$

Vi måste ansluta varje arbetsplats till exakt ett telejack:

$$t_{i,1} + t_{i,2} = 1, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{7}$$

$$t_{i,k} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1 \dots 3, \forall k = 1,2 \tag{8}$$

Vi skall se till att z är längre än avståndet till fönstret för den sämsta arbetsplatsen:

$$b - y_i \geq z, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{9}$$

Hela uppgiften blir då minimera (1) under uppfyllande av (2) - (9) .

3.1.2

a) Den totala kostnaden per behandlad maskindel minimeras genom att lösa

$$\text{minimera } K(N,f) := 520\Big[\frac{42}{60Nf} + 0.1\frac{42N^{5.667}f^3}{5^{6.667}}\Big] + 870\frac{42N^{5.667}f^3}{5^{6.667}}$$

då $200 \leq N \leq 600$
$0.001 \leq f \leq 0.005$

b)

$$\partial K/\partial N = 520\Big(- \frac{42}{60N^f} + 0.5667\frac{N^{4.667}f^3}{5^{6.667}}\Big) + 870 \cdot 5.667 \cdot \frac{42N^{4.667}f^3}{5^{6.667}}$$

$$\partial K/\partial f = 520\Big(- \frac{42}{60Nf^2} + 0.3\frac{N^{5.667}f^2}{5^{6.667}}\Big) + 870 \cdot 3 \cdot \frac{42N^{5.667}f^2}{5^{6.667}}$$

Låt $(N,f) = (200, 0.001); \nabla K(N,f) \triangleq \begin{bmatrix} 239.5642 \\ 2.45\dot{1}0^7 \end{bmatrix}$.

Sätter man upp KKT för problemet och observerar att de enda aktiva bivillkoren är de undre gränserna finner man att Lagrange multiplikatorerna är lika med $\nabla K(N,f)$, som är en positiv vektor. Alltså uppfylls KKt-villkoren.

3.1.3 Variabeldefinition:

$x_{it} =$ antal produkter av typ i som tillverkas i period t, $i = 1,2;\ t = 1,\dots,4$
$O_t =$ använd övertid i period t, $t = 1,\dots,4$
$L_{it} =$ utgående lagernivå av produkt i, i period t, $i = 1,2;\ t = 1,\dots,4$
$(L_{10} = 4,\ L_{20} = 8)$

$$\min \sum_{t=1}^{4}\left[100(0.9x_{1t}+0.8x_{2t})+600\left[\frac{0.9x_{1t}+0.8x_{2t}}{40}\right]^4\right]+$$
$$250\sum_{t=1}^4 O_t+\sum_{t=1}^4(15L_{1t}+14L_{2t})$$

$$\begin{array}{lrcll}
\text{då} & 0.9x_{1t}+0.8x_{2t}-O_t & \le & 40 & t=1,\ldots,4 \\
 & O_t & \le & 4 & t=1,\ldots,4 \\
 & L_{i,t-1}+x_{it}-D_{it}-L_{it} & = & 0 & i=1,2;\ t=1,\ldots,4 \\
 & x_{it},O_t,L_{it}\ge 0,\ \forall i,j & & &
\end{array}$$

$$\text{där} \quad D=\begin{pmatrix} 10 & 12 & 20 & 15 \\ 20 & 24 & 40 & 30 \end{pmatrix}$$

3.1.4 Variabeldefinition:
x_i = x-koordinat för lampa i (m)
y_i = y-koordinat för lampa i (m)
z_i = effekt i lampa i (W).

$$\min \quad z_1+z_2$$
$$\text{då} \quad \frac{kz_1}{x_1^2+y_1^2}+\frac{kz_2}{x_2^2+y_2^2}\ge T \qquad (1)$$
$$\frac{kz_1}{(x_1-L)^2+(y_1-\frac{L}{2})^2}+\frac{kz_2}{(x_2-L)^2+(y_2-\frac{L}{2})^2}\ge T \qquad (2)$$
$$\frac{kz_1}{(x_1-2L)^2+(y_1-L)^2}+\frac{kz_2}{(x_2-2L)^2+(y_2-L)^2}\ge T \qquad (3)$$
$$0\le x_i\le 2L\ \forall i \qquad (4)$$
$$0\le y_i\le L\ \forall i \qquad (5)$$
$$0\le z_i\le M\ \forall i \qquad (6)$$

Ja, problemet är konvext.

3.1.5

a) Variabeldefinition:
x_1 = x-koordinat för lagret (km)
x_2 = y-koordinat för lagret (km).

$$\min f(x)=200\sqrt{(x_1-5)^2+(x_2-10)^2}+150\sqrt{(x_1-10)^2+(x_2-5)^2}+$$
$$200\sqrt{x_1^2+(x_2-12)^2}+300\sqrt{(x_1-12)^2+x_2^2}$$

b) Ja, ty problemet är konvext.

3.1.6

a) $\max\limits_{R\ge 0} v^2\dfrac{R}{(r+R)^2}$

b) $R^*=r$

3.1.7

a) Variabeldefinition:

$l =$ längd på lådan
$b =$ bredd på lådan
$h =$ höjd på lådan

$$\begin{aligned}
\min f = \quad & 10(bl + 2bh + 2lh) + 25bl \\
\text{då} \quad lb + 2bh + 2lh & \leq 8 \\
lbh & \geq 1 \\
h & \leq \tfrac{1}{10}(2l + 2b) \\
2\sqrt{l^2 + b^2} & \leq 4 \\
l & \leq 2 \\
b & \leq 1.5 \\
h & \leq 1 \\
l, b, h & \geq 0
\end{aligned}$$

b) Fixera $l = \hat{l} \geq 0$, sätt $h = \hat{h} + \delta \geq 0$, $b = \hat{b} - \delta \geq 0$

$\Rightarrow f$ konkav tex längs linjen $h = \hat{h} + 8$, $b = \hat{b} - 8$, $l = \hat{l}$

3.1.8

$$\begin{aligned}
\min f(x_1, x_2) = \quad & 0.5x_1^2 + 0.2x_1x_2 + 0.3x_2^2 \\
\text{då} \quad 2x_1 + 1.5x_2 + (1 - x_1 - x_2) & \geq 1.2 \\
x_1 + x_2 & \leq 1 \\
x_1, \ x_2 & \geq 0
\end{aligned}$$

3.2 Descent

3.2.1 $\nabla f(x^{(1)})^T = (3, -7)(2, -1)^T = 13 > 0$, ascentriktning.

3.2.2

a)

$$\begin{aligned}
& \text{maximera } b^T y \\
& \text{då} \quad A^T y \leq c \\
& \qquad\quad y \geq 0^m
\end{aligned} \tag{D}$$

Optimalitetsvillkor: x^* är optimal i (P) omm:

(i) x^* är tillåten i (P);

(ii) det existerar en komplementär dual lösning, dvs ett y^* så att

$$(y^*)^T(Ax^* - b) = 0 \text{ och } (x^*)^T(A^Ty^* - c) = 0;$$

(iii) y^* är tillåten i (D).

b)

$$\begin{array}{ll} \text{maximera} & = b_1^T y_1 + b_2^T y_2 + b_2^T y_3 + \ell_1^T v \\ & A_{11}^T y_1 + A_{21}^T y_2 \qquad\qquad + v \le c_1 \\ \text{då} & A_{12}^T y_1 + A_{22}^T + A_{32}^T y_3 + \qquad \le c_2 \\ & y_1 \text{fri}, \quad y_2 \le \mathbf{0}, \quad y_3 \ge \mathbf{0}, v \le \mathbf{0} \end{array} \tag{D}$$

3.2.3 Nej, ty vinkeln mellan gradienten och d är spetsig (positiv skalärprodukt) vilket implicerar ascentriktning.

3.2.4 $\nabla f(x) = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \ \beta \ge 0$
Gradienten skall ligga i den kon som spänns upp av de båda bivillkorens normaler i origo.

3.2.5

a) $2d_1 + d_2 \le 0$

b) $3d_1 + 20d_2 \le 0$

c) Studera tex riktningen $\bar{d} = (-1, \ 1)^T$. $\bar{d}$ är tillåten och descent. $\bar{x}$ är alltså ej optimal.

d) Tex $d = (-1, \ 2)^T$

e) -

3.2.6

a) Ja, det är en ascentriktning, ty vinkeln mellan gradienten och d är spetsig (positiv skalärprodukt).

b) Den optimala steglängden kommer att bli 0 eller $+\infty$.

3.2.7

a) Att steglängden blir noll beror på att sökriktningen inte är en descentriktning. Anledningen till detta är att Hessianen $\nabla^2 f(x_k)$ i den aktuella punkten x_k är indefinit eller negativ (semi)definit.

b) Att sökriktning saknas beror på att det linjära systemet $\nabla^2 f(x_k) p = -\nabla f(x_k)$ inte kan vara inverterbar (notera dock att systemet <u>kan</u> vara lösbart för vissa högerled även om $\nabla^2 f(x_k)$ inte är inverterbar, som t.ex. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ som har lösningen $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$), vilket gäller speciellet om determinanten för $\nabla^2 f(x_k)$ är noll (ett egenvärde till $\nabla^2 f(x_k)$ är noll).

c) I Levenberg-Marquardts modifiering av Newtons metod undersöks egenvärdena till $\nabla^2 f(x_k)$ under tiden som systemet $\nabla^2(x_k)p = - = \nabla f(x_k)$ löses. Om ett negativt egenvärde påträffas (genom att t.ex. ett pivotelement i Gauss-eliminationen är negativt) adderas en positiv term till diagonalen av $\nabla^2 f(x_k)p = -\nabla f(x_k)$ ersätts av ett system på formen $[\nabla^2 f(x_k) + \gamma I]p = -\nabla f(x_k)$, där $\gamma > 0$ har valts så att $\nabla^2 f(x_k) + \gamma I$ är positivt definit. Eftersom detta gäller, existerar p (så problemet i b) försvinner), och $\nabla f(x_k)^T p = -p^T[\nabla^2 f(x_k) + \gamma I]p < 0$ av samma skäl, så p är en descentriktning (problemet i a) försvinner också). Alternativ: gör en iteration av brantaste lutningsmetoden.

3.2.8 -

3.3 Descentmetoder

3.3.1 -

3.3.2 Ja, substituera $y_1 = x_1 - 2, y_2 = \sqrt{5(x_2+6)}$. Då får vi $g(y) = y_1^2 + y_2^2$. Alla gradienter pekar mot origo där optimum antas.

3.3.3

a) $x^{(1)} = (1/2, 1)$.

b) $H(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

c) Ja, se teorem 10.2 i NS.

3.3.4

a) brantaste lutningsmetoden: $x^{(1)} = (0.59, 0), x^{(2)} = (0.59, 0.35)$

b) Newtons modifierade metod: $x^{(1)} = (0.59, 0), x^{(2)} = (0.97, 0.98)$

3.3.5 Ja, ty

i) i varje iteration skall sökriktningen vara i gradientens riktning

ii) Två på varandra följande riktningar skall vara ortogonala.

3.3.6

a) $x^{(1)} = (26/31, 16/31), f(x^{(1)}) = -6.81$

b) Taylorutveckla $f(x)$ runt punkten $x^{(k)}$.

3.3.7 -

3.3.8

a) Brantaste lutningsmetoden:$x^{(1)} = (1.83, 2.43), x^{(2)} = (2.69, 1.79)$

b) Newtons modifierade gradientmetod: $x^{(1)} = (3, 2)$ Globalt optimum ty konvex målfunktion.

3.3.9

a) $\nabla f(x^{(0)})^T d^{(0)} = (0, -4, 2)(1, 0, 1)^T = 2 > 0$, ascentriktning.

b) Newtonriktningen pekar mot maximum för en konkav funktion, så steglängdssökningen ger $t = 0$ eller $t = \infty$.

3.3.10 $x^* = (1, 1)$, $f(x)$ konvex funktion för $x_1 > 0$, globalt min.

3.3.11

$f(x) = (x_1 + 2x_\alpha - 3)^2 + (x_1 - \alpha)^2$;
$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 4x_2 - 10 \\ 4x_1 + 8x_\alpha - 12 \end{bmatrix}; \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}; x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

a) $p_0 = -\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}; x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 = 2\alpha_0 \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\alpha_0 = -\dfrac{\nabla f(x_0)^T p_0}{p_0^T \nabla^2 f(x_0) p_0} = \ldots = \dfrac{61}{628} \Rightarrow x_1 = \dfrac{122}{628} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\nabla f(x_1) = \dfrac{2}{157} \begin{bmatrix} -114 \\ 95 \end{bmatrix}$; $p \in R^\alpha$ är en avtagande riktning i x_1 om $p^T \nabla f(x_1) < 0$, d.v.s., om

$$p^T \begin{bmatrix} -114 \\ 95 \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow -114p_1 + 95p_\alpha < 0$$

$\Rightarrow x_1$ är <u>inte</u> optimallösning, ty $f(x_1 + \tilde{p}) < f(x_1)$ om $-114\tilde{p}_1 + 95\tilde{p}_2 < 0$ och $\|\tilde{p}\|$ är tillräckligt liten.

$p_0 = -(\nabla^2 f(x_0))^{-1} \nabla f(x_0) = -\dfrac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 = \dfrac{\alpha_0}{\alpha} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}; \alpha_0 = \dfrac{-\nabla f(x_0)^T p_0}{p_0^T \nabla^2 f(x_0) p_0} = \ldots = 1$ (ty kvadratisk).

$\Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p^T \nabla f(x_1) = 0 \not< 0$ för alla $p \in R^\alpha \Rightarrow$ inga avtagande riktningar existerar. f är konvex, ty $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ är positivt definite för alla $x \in R^2 \Rightarrow x$ är globalt optimum. (f är strikt konvex $\Rightarrow x_1$ är unikt optimum).

3.3.12

a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = \frac{1}{2}(x_1+x_2-1)^2 + \frac{1}{2}(x_1-x_2-2)^2 + \frac{1}{2}(x_1-2x_2)^2.$

b) Se kurslitteraturen. Låt $x_0 = (0,0)^T$.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} (x_1+x_2-1)+(x_1-x_2-2)+(x_1-2x_2) \\ (x_1+x_2-1)-(x_1-x_2-2)-2(x_1-2x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1-2x_2-3 \\ -2x_1+6x_2+1 \end{bmatrix}.$$

$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, positivt definit $\Rightarrow f$ är strikt konvex.

$$p_0 = -\nabla^2 f(x_0)^{-1}\nabla f(x_0) = -\frac{1}{12-4}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

f kvadratisk $\Rightarrow$ optimalt steg i riktning p_0 ges av

$$\alpha_0 = -\frac{\nabla f(x_0)^T p_0}{p_0^T \nabla^2 f(x_0) p_0} = \frac{\nabla f(x_0)^T \nabla^2 (x_0)^{-1}\nabla f(x_0)}{[\nabla^2 f(x_0)^{-1}\nabla f(x_0)]^T \nabla^2 f(x_0)[\nabla^2 f(x_0)^{-1}\nabla f(x_0)]} = 1.$$

$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix}$. I x_1 är $\nabla f(x_1) = (0,0)^T$. Eftersom f är konvex är $x_* = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix}$ den optimala lösningen.

c) Se kurslitteraturen. Låt $x_0 = (0,0)^T . p_0 = -\nabla f(x_0) = (3,-1)^T$.

$$\alpha_0 = -\frac{\nabla f(x_0)^T p_0}{p_0^T \nabla^2 f(x_0) p_0} = \frac{1)}{(3,-1)(11,-12)^T} = 2/9 \quad x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 = \frac{2}{9}(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = -\nabla f(x_1) = \frac{5}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_1 = -\frac{\nabla f(x_1)^T p_1}{p_1^T \nabla^2 f(x_1) p_1} p_1^T \nabla^2 f(x_1) p_1 = \frac{10}{(1,3)(-3,16)} = 2/9$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 p_1 = \frac{4}{81}\begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3.3.13

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x_1-2x_2)^2 + x_1^4; \nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1-2x_2+4x_1^3 \\ -2x_1+4x_2 \end{bmatrix};$

$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 1+12x_1^2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, x^0 = (2,1)^T, f(x^0) = 16.$

$\nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 32 \\ 0 \end{bmatrix}; \nabla^2 f(x^0) = \begin{bmatrix} 49 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} =$

$\nabla^2 f(x^0)d^1 = -\nabla f(x^0) \Leftrightarrow d^1 = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\nabla(x^0)^T d^1 = -(d^1)^T \nabla^2 f(x^0) d^1 = -64/3.$

Sätt $\ell = 1$. $x^0 + \ell d^1 = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. $f(x^0 + \ell d^1) = 256/81.$

Gäller

$$f(x^0 + \ell d^1) - f(x^0) \leq \alpha \ell \nabla f(x^0)^T d^1? \\ \Leftrightarrow \\ -12\frac{68}{81} \leq -\alpha \cdot 64/3 \qquad (*)$$

Med $\alpha = 0.3$ är svaret 'ja'. Låt $\ell = 1$.

$$x^1 = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Olikheten $(*)$ uppfyller om $\alpha \tilde{\in} (0, 0.60)$.

3.3.14

a) brantastelutningsmetoden: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.83 \\ 2.44 \end{pmatrix}$; $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.69 \\ 1.79 \end{pmatrix}$

b) Newton's sökmetod: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Globalt minimum, ty konvex målfunktion.

3.3.15

a) $a = -1 \Rightarrow d_{BL} = (-2, -1)^T$, $d_N = (1, 1)^T$

$a = 0 \Rightarrow d_{BL} = (0, 3)^T$, d_N existerar ej, ty H ej inverterbar

$a = 1 \Rightarrow d_{BL} = (2, 1)^T$, $d_N = (1, 1)^T$

d_{BL} är descentriktning i samtliga fall. d_N är descentriktning för $a = 1$

b) f måste vara en kvadratisk och konvex funktion. f kvadratisk $\Rightarrow a = \pm 1$

$a = 1 \Rightarrow H(x)$ pos definit $\Rightarrow$ f(x) konvex. $a = -1 \Rightarrow H(x)$ neg definit $\Rightarrow$ f(x) konkav

3.3.16

a) $\nabla f = (3x_1^2 + x_2,\ x_1 + 2(1 + x_2))^T$, $\nabla f(1/2,\ -1) = (-1/4, 1/2)^T$

$H = \begin{pmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $H\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Sökriktning: $d = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -7/4 \end{pmatrix}$

$\nabla f^T d < 0$, $\nabla f^T d = -9/40 < 0 \Rightarrow$ descent.

b) $det\ H = \begin{vmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 12x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1/12$

3.3.17

a) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 3x_2^2 \end{pmatrix}, \quad H(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6x_2 \end{pmatrix}.$
I punkten $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow d_N = -\begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Linjesökning ger lokala optima ($f'(t) = 0$) i punkterna $t = \frac{7}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$ vilket motsvarar ett minimum och ett maximum, *men* det lokala maximat är ej globalt ty $t \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

3.3.18 -

3.3.19

a) $F(x^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\nabla F(x^0)|| = \sqrt{5},\ x^1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow ||\nabla F(x^0)|| = \frac{16}{27}$

b) Om $F(x)$ är gradienten för någon funktion $f : R^n \to R$ så fås $\nabla F(x) = \nabla^2 f(x)$, dvs Newtons metod för obegränsad optimering fås.

3.3.20

a) $d_b = (-2,\ 1)^T$

b) $d_N = (-5/11,\ 8/11)^T$

c) $\nabla f(\bar{x})^T d_N = -18/11 < 0 \Rightarrow$ Avtaganderiktning

3.3.21 Välj nya variabler $y = C^{1/2}(x - C^{-1}c) \Rightarrow \min \frac{1}{2} y^T y$

3.3.22 -

3.4 Lagrangedualitet

3.4.1 $x_1^* = 3/7, x_2^* = 2/7, u^* = 6/7.$

3.4.2 Varje tillåten lösning till det ursprungliga problemet är också tillåten i det nya problemet, varav $s(u) \leq z^*$ följer. Om detta gäller för alla $u \geq 0$ så fås också $max_{u \geq 0}\ s(u) \leq z^*$.
Nytta: m stycken villkor har blivit ett villkor, dvs det nya problemet är (normalt) lättare att lösa och det ger en optimistisk uppskattning av z^*

3.4.3 Formulera först Lagrangefunktionen:

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}\|y - x\|^2 - \lambda^T(Ax).$$

Lös det obegränsade problemet att minimera denna över x.
Problemet att minimera denna över x:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = x - y - A^T\lambda = \mathbf{0}^n \Rightarrow x = y + A^T\lambda.$$

Eftersom L är strikt konvex i x för varje λ är $x = x(\lambda) = y + A^T\lambda$ den unika lösningen till detta problem. Studera nu den Lagrangeduala målfunktionen:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \min_x L(x, \lambda) = L(x(\lambda), \lambda) = \\ &= \frac{1}{2}\|y - (y + A^T\lambda)\|^2 - \lambda^T A(y + A^T\lambda) = \\ &= -\frac{1}{2}\|A^T\lambda\|^2 - y^T A^T\lambda. \end{aligned}$$

Att maximera $L(\lambda)$ över $\lambda \in \mathbb{R}^m$ är ett konvext problem, och löses sålunda

$$\nabla L(\lambda) = -AA^T\lambda - Ay = \mathbf{0}^m.$$

Eftersom A har full radrag existerar inversen av AA^T. Detta ger att

$$\lambda^* = -(AA^T)^{-1}Ay.$$

Insätter λ^* i uttrycket

$$\begin{aligned} x(\lambda^*) &= y - A^T(AA^T)^{-1}Ay \\ &= [I - A^T(AA^T)^{-1}A]y. \end{aligned}$$

Att visa att $x(\lambda^*)$ är den globala optimala lösningen är nu elementärt: vi kan visa från de ovan gjorda beräkningarna att KKT-villkoren är uppfyllda, och konvexiteten hos problemet ger resultatet.

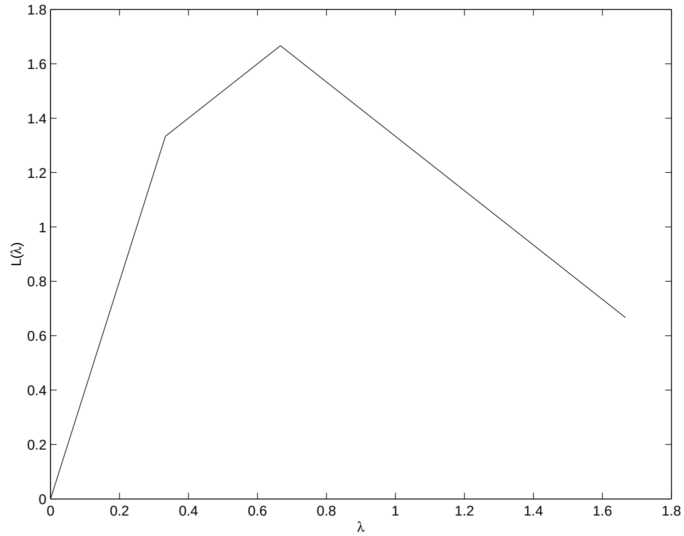
3.4.4 Låt $X = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x_j = 1, j = 1, 2\}$.
$L(x, \lambda) := f(x) - \lambda \cdot (3x_1 + 2x_2 - 4), \lambda \geq 0$. Lagrangeduala problemet är då att

$$\max_{\lambda \geq 0} L(\lambda), \tag{LD}$$

där $L(\lambda) = \min_{x \in X} L(x, \lambda)$. Utvecklas $L(x, \lambda)$ fås:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= 4\lambda + \min_{0 \leq x_1 \leq 1}\{(1 - 3\lambda)x_1\} + \min_{0 \leq x_2 \leq 1}\{(1 - 2\lambda)x_2\} \\ &= \begin{cases} 4\lambda, & 0 \leq \lambda \leq 1/3 \\ 1 + \lambda, & 1/3 \leq \lambda \leq 1/2 \\ 2 - \lambda, & 1/2 \leq \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda_* = 1/2; L(\lambda_*) = 3/2.$



Figur 19: Bild till upg 3.4.4

Problemet är konvext och det existerar en inre punkt i det tillåtna området. Stark dualitet gäller alltså, och en primal optimallösning kan lösas ut ur optimalitetsvillkoren:
Motsvarigheten till "$\nabla_t L(x_*, \lambda_*) = \mathbf{0}$" i KKT i det konvexa fallet är att x_* löser $\min_{x \in X} L(x, \lambda_*)$, d.v.s. x_* löser $\min_{0 \leq x_1 \leq 1} \{-\frac{1}{2} x_1\}$ och $\min_{0 \leq x_2 \leq 1} \{0, x_2\}$, med optimallösning $x_1 = 1$ och $x_2 \ni [0, 1]$.
Komplementaritet ger ($\lambda_* > 0$!) att $3x_1 + 2x_2 = 4$. Med $x_1 = 1$ ger det att $x_2 = 1/2$.
Primal tillåtenhet gäller eftersom $x \in X$ och det linjära bivillkoret (1) är uppfyllt med likhet.
Så $x_* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ är den unika optimallösningen.
(Notera att $f(x_*) = 3/2 = L(\lambda_*)$.)

3.4.5

a)

$$h(\lambda) = \min_{x \in X} \quad f(x) - \lambda g(x)$$

b)

$$\max_{\lambda \geq 0} h(\lambda) = \min_{x \in X} \quad f(x) - \lambda g(x)$$

c) Låt $q = inf_{x \in X} f(x)$ vara den optimala värdet hos problemet (P). För alla tillåtna lambda har vi $h(\lambda) \leq q$. För alla tillåtna x har vi $f(x) \geq q$

3.4.6 Lagrangerelaxera och bestäm den duala målfunktionen

$$\varphi(\lambda, \mu) = \min_{x \geq 0} \{\sum \sum x_{ij} \ln(x_{ij}) + \sum \lambda_j (b_j - \sum x_{ij}) + \sum \mu_i (a_i - \sum x_{ij})\} =$$
$$= \sum \lambda_j b_j + \sum \mu_i a_i + \min_{x \geq 0} \{\sum \sum x_{ij} (\ln(x_{ij}) - \lambda_j - \mu_i)\} =$$

$= \sum \lambda_j b_j + \sum \mu_i a_i + \min_{x \geq 0} h(x)$
$h(x)$ konvex $\Longrightarrow$ Om $\nabla h(\hat{x}) = 0$ och $\hat{x} \geq 0$ så är $\hat{x}$ ett tillåtet globalt optimum.
$\frac{dh(x)}{dx_{ij}} = \ln(x_{ij}) - \lambda_j - \mu_i + 1 = 0 \Rightarrow x_{ij}(\lambda, \mu) = e^{\lambda_j + \mu_i - 1} (> 0)$
Duala problemet:

$$(D) \quad \begin{array}{l} \max \sum \lambda_j b_j + \sum \mu_i a_i + \sum \sum x_{ij}(\lambda, \mu)(\ln(x_{ij}(\lambda, \mu)) - \lambda_j - \mu_i) = \\ \max \sum \lambda_j b_j + \sum \mu_i a_i - \sum \sum e^{\lambda_j + \mu_i - 1} \\ \text{då } \lambda \in R^n \quad , \quad \mu \in R^m \end{array}$$

3.4.7 Lagrangesubproblem: $h(u) = \min 6x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + u(24x_1 + 24x_2 - 360)$ då $x_3 \geq 1$
Separerar i ett problem för varje variabel. Lösning: $x_1 = -2u$, $x_2 = -3u$ $x_3 = 1$.
Dualt problem: $\max h(u) = -60u^2 - 360u + 1 \Rightarrow u = -3 \Rightarrow x_1 = 6$, $x_2 = 9$, $f(x^*) = 541$.

3.4.8 Vi får

$$y(\lambda) = \min_{x_1 \geq 1, x_2 \geq 2} \quad 2x_1^3 + \tfrac{1}{2}x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - \lambda(2 - x_1 - x_2)$$

Efter omskrivning blir detta

$$y(\lambda) = \min_{x_1 \geq 1, x_2 \geq 2} \quad 2x_1^3 + (\lambda - 2)x_1 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + (\lambda - 4)x_2 - 2\lambda$$

Insättning ger lösningar för $\lambda = 1$ som $x = (1, 3)$ och för $\lambda = 2$ som $x = (1, 2)$ med målfunktionsvärden -5.5 samt -4. -4 är alltså en undre gräns för optimala värdet. Insättning av $x = (1, 1)$ ger den övre gränsen -3.5.

3.4.9

a) $\lambda^* = 6/7, \quad x_1^* = 3/7, \quad x_2^* = 2/7, \quad f(x^*) = h(\lambda^*) = 3/7$

b) $\lambda_1^* = 8/3, \quad \lambda_2^* = 0, \quad x_1^* = 4/3, \quad x_2^* = 2/3, \quad f(x^*) = h(\lambda^*) = 8/3$

3.4.10

$$\begin{array}{lllllll} \lambda = 1 & \Rightarrow & x_1 = 1, & x_2 = 2 & \text{otillåten,} & h(1) = 6 & \\ \lambda = 2 & \Rightarrow & x_1 = 1, & x_2 = 5/2 & \text{otillåten,} & h(2) = 43/4 & \\ \lambda = 3 & \Rightarrow & x_1 = 3, & x_2 = 3 & \text{tillåten,} & h(3) = 9 & f(3,3) = 21 \\ \multicolumn{7}{l}{43/4 \leq f(x^*) \leq 21} \end{array}$$

3.4.11 $x_1 = \lambda + 1/2, \quad x_2 = \lambda, \quad h(\lambda) = -3\lambda^2 + 4\lambda - 1/2$
$\lambda^* = 2/3, \quad x_1^* = 7/6, \quad x_2^* = 2/3 \quad h(\lambda^*) = f(x^*) = 5/6$

3.4.12 $h(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{5} - 6\lambda - \frac{9}{2+3\lambda}$

$$\begin{array}{lll} \lambda = 0 \Rightarrow h(\lambda) = -9/2 & x_1 = 3/2, \quad x_2 = 0 & \text{otillåten} \\ \lambda = 1 \Rightarrow h(\lambda) = -8 & x_1 = 3/5, \quad x_2 = 1/5 & \text{tillåten} \end{array}$$

$f(3/5, 1/5) = -67/25, \quad -9/2 \leq f(x^*) \leq -67/25$

3.4.13 $\lambda = 0 \;\Rightarrow\; h(\lambda) = 2 \quad x_1 = 0,\; x_2 = 1,\; x_3 = 0$ otillåten
$\lambda = 1 \;\Rightarrow\; h(\lambda) = 20/3 \quad x_1 = 2,\; x_2 = 1,\; x_3 = 1/3$ otillåten
$\lambda = 2 \;\Rightarrow\; h(\lambda) = 20/3 \quad x_1 = 2,\; x_2 = 1,\; x_3 = 2/3$ tillåten

$f(2,1,2/3) = 22/3, \qquad 20/3 \le f(x^*) \le 22/3$

3.4.14 Det Lagrangeduala problemet är

$$\max h(\lambda)$$
$$\text{där } h(\lambda) = \min_x \{f(x) + \lambda_1(1 - x_1 - x_2) + \lambda_2(x_1 - x_2 - 3)\}$$

$\lambda = (0,0)^T \Rightarrow x = (1,-1)^T$ (otillåten), $h(\lambda) = -3 \Rightarrow$ LBD=-3
$\lambda = (1,1)^T \Rightarrow x = (1,0)^T$ (tillåten), $f(x) = -2,\; h(\lambda) = -4$
$\Rightarrow \text{UBD} = -2,\; \text{LBD} = -4$
$-3 \le f(x^*) \le -2$

3.4.15 -

3.4.16 -

3.4.17 -

3.4.18 -

3.4.19 -

3.4.20 -

3.4.21 -

3.4.22 -

3.4.23 Vi Lagrangerelaxerar $x_1 + x_2 \ge 5 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 5 \ge 0$ och får $\alpha(x,\lambda) = 2x_1 + x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 5)$.
Det duala problemet blir

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \ge 0} \alpha_*(\lambda) &= \max_{\lambda \ge 0}\{ \min_{\substack{0 \le x_1 \le 4 \\ 0 \le x_2 \le 4}} 2x_1 + x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 5)\} \\ &= \max_{\lambda \ge 0}\{5\lambda + \min_{0 \le x_1 \le 4} (2-\lambda)x_1 + \min_{0 \le x_2 \le 4} (1-\lambda)x_2\}. \end{aligned}$$

För $\lambda = 0,1,2,3$ får vi därför

$$\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, \alpha_*(\lambda) = 0$$
$$\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = ?, \alpha_*(\lambda) = 5$$
$$\lambda = 2 \Rightarrow x_1 = ?, x_2 = 4, \alpha_\alpha(\lambda) = 6$$
$$\lambda = 3 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 4, \alpha_*(\lambda) = 3$$

$\lambda = 2$ ger bäst dual lösning.

Om x^* är den primalt optimala punkten, så vet vi att $\alpha_*(2) \le f(x^*)$, d.v.s. $t \le f(x^*)$ för $\lambda = 2$ så ser vi att om vi väljer $x_1 = 1$ så får vi $\lambda g(x) = 0$, dvs komplementaritet. Prövar vi med $x = [1, 4]$ så får vi $x_1 + x_2 \ge 5, 0 \le x_{1,2} \le 4$ samt $f(x) = 6$.
Då x tillåten vet vi att $f(x^*) \le f(x) = 6$. Vi har därför en övre gräns på 6.

3.4.24 -

3.4.25 -

3.5 Karush-Kuhn-Tucker

3.5.1 Nej det är inte en KKT-punkt, och ej optimum

3.5.2 -

3.5.3 Ja, det är en KKT-punkt och optimum.

3.5.4 Global maximum antas för $x = 8$ och $y = 5$.

3.5.5 Minimum antas för $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$.

3.5.6 $c \le -1$.

3.5.7

a) Primal tillåtenhet:
$$\begin{aligned} g_1(x) &= -2x_1 + 2x_2 - 1 \\ g_2(x) &= -2x_1 + \ \ x_2 \\ g_3(x) &= - \ \ x_1 \\ g_4(x) &= \qquad\ \ x_2 \end{aligned}$$

Med $\bar{x}(0, \frac{1}{2}) : g_1(\bar{x}) = 0, g_2(\bar{x}) > 0, g_3(\bar{x}) = 0, g_4(\bar{x}) > 0$

Komplementaritet: från ovan fås att $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$

Dual tillåtenhet:
$$\begin{aligned} &\nabla f(x) = (8x_1 - 6x_2 + 1, 4x_2 - 6x_1)^T \\ &\nabla g_1(x) = (-2, 2)^T \\ &\nabla g_3(x) + (-1, 0)^T \end{aligned}$$

Med $\bar{x} = (0, \frac{1}{2}) : \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) - \lambda_3 \nabla g_3(\bar{x}) = (0, 0)^T$,

d.v.s. $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\quad \lambda_1 = 1, \lambda_3 = 0$

$\lambda = (1, 0, 0, 0)^T \ge \mathbf{0}$. KKT-villkoren är uppfyllda!

b) Svaret är att $\bar{x}$ är ett globalt minimum. Att verifiera det är inte lätt, beroende på att f inte är en konvex funktion, så att problemet faktiskt inte är konvext. (Vi kan verifiera att $\bar{x}$ uppfyller andra ordningens nödvändiga krav för lokalt minimum, men inte andra ordningens tillräckliga krav för lokalt minimum.)

Det enda sättet att verifiera att $\bar{x}$ är ett globalt minimum är att resonera som följer.

Uppenbarligen är f en funktion som växer mot $+\infty$ i alla tillåtna riktningar. Eftersom den tillåtna mängden är sluten och icke-tom och f är kontinuerlig, kan vi dra slutsatsen att f måste anta sitt minsta värde på den tillåtna mängden, alltså att det *existerar* (Weierstrass Sats!) en optimallösning till problemet. Eftersom den tillåtna mängden är konvex och har en inre punkt kan vi också konstatera att varje lokalt (och globalt förstås!) minimum måste vara en KKT-punkt. Strategin här blir alltså att finna samtliga KKT-punkter och visa att $\bar{x}$ (om det finns fler KKT-punkter än den) är den bästa. (Detta är egentligen ingen metod för att finna en optimallösning, men här finns knappast något bättre alternativ.)

Innan vi börjar kan vi först konstatera att bivillkor (2) är redundant, eftersom det följer av teckenkraven på x. Det underlättar analysen att ta bort det. Vi kommer i tur och ordning att gissa vilka bivillkor som är aktiva.

1. Inga bivillkor är aktiva. Då fås som KKT:
   $\nabla f(x) = \mathbf{0}$, dvs $(8x_1 - 6x_2 + 1, -6x_1 + 4x_2) = (0, 0)$, d.v.s.
   $x = (1, 3/2)^T$. Detta är en otillåten punkt.
2. Alla bivillkor är aktiva. Uppenbarligen omöjligt, ty $x = (0, 0)^T$ är otillåtet.
3. Bivillkor (1) är aktivt. Då fås som KKT:

   $$\begin{bmatrix} 8x_1 - tx_2 + 1 \\ -6x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   En parametrisk lösning är:
   $(x_1, x_2) = (1, 3/2) - \lambda_1(1, 1), \lambda_1 \geq 0$. Med kraven (2) och (3) fås att $\lambda_1 = [1, 3/2]$. Insättning i f ger också att $f(x) = 1$ för alla x på denna form. Så $x = 1, 3/2) - \lambda_1(1, 1), \lambda - [1, 3/2]$ är samtliga KKT-punkter, med samma målfunktionsvärde. Notera att med $\lambda_1 = 1$ fås $x = \bar{x}$!
4. Bivillkor (2) är aktivt. Med $x_1 = 0$ fås ur KKT att också $x_2 = 0$, vilket ger en otillåten punkt.
5. Bivillkor (3) är aktivt. Ger också $x = (0, 0)^T$.
6. Bivillkor (1) och (2) är aktivt. Ger $x = (0, 1/2)^T$, d.v.s. $\bar{x}$.
7. Bivillkor (1) och (3) är aktivt. Ger $x = (1/2, 0)$ som är otillåtet.

detta är samtliga kombinationer. Ur detta fås att mängden av KKT-punkter är

$$x = (1, 3/2)^T - \lambda_1(1, 1)^T, 1 \leq \lambda_1 \leq 3/2.$$

Samtliga dessa har målfunktionsvärde 1, och är alltså globalt optimala. Ibland dessa återfinns $\bar{x}$.

3.5.8

$(P) \min f(x) := \sum_{j=1}^n c_j x_j$
då $\quad g_0(x) := \sum_{j=1}^n x_j^2 - 1 \leq 0$
$\quad g_j(x) := x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$

a) f är linjär och alltså konvex; g_0 är konvex ty $\nabla^2 g_0(x) = 2 \cdot I^n$ är positivt definit, och därför är mängden $\{x \in \mathbb{R}^n | g_0(x) \leq\}$ konvex; g_j är linjär och alltså konkav, och därför är mängden $\{x \in \mathbb{R}^n / x \geq \mathbf{0}\}$ konvex. Eftersom skärningen av konvexa mängder är en konvex mängd, och vi skall minimera en konvex funktion över mängden, är problemet konvext.

b) KKT-villkoren: $(L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \lambda g_0(x) - \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \lambda \leq 0, \mu_j \geq 0)$

(1) $\dfrac{\partial L(x, \lambda, \mu)}{\partial x_j} := c_j - 2\lambda x_j - \mu_j = 0, j = 1, \ldots, n,$

(2) $\lambda \leq, \mu_j \geq 0, j = 1, \ldots, n,$

(3) $\lambda(\sum_{j=1}^n x_j^2 - 1) = 0, \mu_j x_j = 0, j - 1, \ldots, n,$

(4) $\sum_{j=1}^n x_j^2 - 1 \leq 0, \quad x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n.$

Låt $\quad \bar{\lambda} = -\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^n (\min\{0, c_j\})^2)^{1/2},$
$\quad \bar{x}_j = \min\{0, c_j\}/(2\bar{\lambda}), j = 1, \ldots, n,$
$\quad \bar{\mu}_j = \max\{0, c_j\}, j = 1, \ldots, n.$

(1) $c_j - 2\bar{\lambda}\bar{x}_j - \bar{\mu}_j = c_j - \max\{0, c_j\} - \min\{0, c_j\} = 0.$ OK

(2) OK

(3) $\sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2 = 1; \bar{\lambda} > 0$ ger att $\bar{\mu}_j \bar{x}_j = 0.$ OK

(4) OK

c) Genom insättning av (1) i Lagrangefunktionen kan vi uttrycka det Lagrange duala problemet i (λ, μ) som ett explicit konvext problem. Detta har en unik lösning, som är $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$, och den enda KKT-punkten x är den som uppfyller (1), d.v.s. $\bar{x}$. Således är $\bar{x}$ den unika optimallösningen.

$$L(x(\lambda, \mu), \lambda, \mu) = \lambda + \frac{1}{4\lambda} \sum_{j=1}^n (c_j - \mu_j)^2 =: L_*(\lambda, \mu).$$

L_* är monoton i μ_j. $\dfrac{\partial L_*(\lambda, \mu)}{\partial \mu_j} = -\dfrac{1}{2\lambda}(c_j - \mu_j) \geq 0$ måste gälla, vilket ger $\bar{\mu}$.

En stationär punkt till L_* måste ha $\lambda > 0$. $\dfrac{\partial L_*(\lambda, \bar{\mu})}{\partial \lambda} = 0$ ger $\bar{\lambda}$.

Alternativ: $\nabla_{xx}^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = -2\bar{\lambda} I^n$ (positivt definit) utnyttjas.

3.5.9

a) KKT-villkoren:

$$\nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla t_i(x) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$$

$$g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m$$

Dessa är nödvändiga fär lokalt optimum om t.e.xdet existerar en inre punkt (ett x med $g_i(x) > 0, \forall i$).

De är tillräckliga för globalt optimum om f är konvex och $g_i, i = 1, \ldots, m$, är konkava, d.v.s. problemet är konvext.

Bevis: Låt (x^*, λ^*) uppfylla KKT-villkoren, och välj en godtycklig tillåten lösning, x. Då följer:

$$\begin{aligned}
f(x) &\geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) && (f \text{ konvex}) \\
& f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla t_i(x)^*)^T (x - x^*) && (\text{KKT 1}) \\
&\geq f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* [g_i(x) - g_i(x^*)] && \begin{pmatrix} g_i \text{ konkava} \\ \lambda^* \geq 0 \end{pmatrix} \\
&= f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) && (\lambda^* \geq 0, x \text{ tillåten}) \\
&\geq f(x^*). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

b) Den logaritmiska barriärfunktioen är

$$f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \log(g_i(x)), \mu > 0.$$

Låt x^1, x^2 vara sådana att $g_i(x^1) > 0, g_i(x^*) > 0, \forall i$. Välj $\lambda \in [0, 1]$.

g_i konkav $\Rightarrow g_i(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \lambda g_i(x^1) + (1 - \lambda) g_i(x^2)$

Låt $\phi_i(s) = -\log(s)$.

ϕ_i är avtagande $\Rightarrow$

$$\begin{gathered}\phi_i[g_i(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2] \\ \leq \\ \phi_i[\lambda g_i(x^1) + (1 - \lambda) g_i(x^2)].\end{gathered}$$

ϕ_i är strikt konvex $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\phi_i[\lambda g_i(x^1) + (1 - \lambda) g_i(x^2)] < \\
&\lambda \phi_i(g_i(x^1)) + (1 - \lambda) \phi_i(g_i(x^2)), \quad \lambda \in (0, 1), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad g_i(x^1) + g_i(x^2)
\end{aligned}$$

Anledningen att konvexiteten hos barriärfunktionen är av intresse är att den ska minimeras för olika värden på μ: dess stationaritet är tillräcklig för globalt min för funktionen, och stationaritet är vad standardmetoder garanterar.

3.5.10

$$(P)\begin{cases} \min & f(x) \\ \text{då} & Ax = b \end{cases}$$

Om $\bar{x}$ är ett lokalt optimum till (P) och Δx är sådant att $A\Delta x = 0$ så måste $\nabla f(\bar{x})\Delta x = 0$, ty annars skulle det finnas en tillåten descentriktning i $\bar{x}$, vilket motsäger vårt antagande att $\bar{x}$ är lokalt optimum. Vi kan alltså dra slutsatsen att (P') nedan har optimalvärdet 0.

$$(P')\begin{cases} \min & \nabla f(\bar{x})x \\ \text{då} & Ax = 0 \end{cases}$$

och att (P'):s duala problem har en tillåten lösning, dvs det finns ett μ sådant att $\mu^T A = \nabla f(\bar{x})$. Sätt $\lambda = -\mu$. Det finns alltså ett λ så att $\nabla f(\bar{x}) + \lambda^T A = 0$. v s v.

3.5.11 $\bar{x}_j^* = e^{-1-\lambda b_j}$, $j = 1, .., n$ där λ är den unika lösningen till ekvationen $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} b_j e^{-1-\lambda b_j} = b_0$.

3.5.12 $\bar{x}_j^* = \frac{\sum \sqrt{a_k b_k}}{b_0} \sqrt{b_j/a_j}$, $j = 1, .., n$.

3.5.13 a $= 9/2$

3.5.14

a) -

b) $x^* = (11,\ 8)^T$ och $\lambda^* = (0,\ 6)^T$

3.5.15

a) -

b) Punkten $x = (0\ 1\ 2)^T$ är ett globalt optimum.

3.5.16

a) KKT-villkoren:

$$\begin{aligned} x_1 - 10x_2 + 2y_1 + 2y_2x_1 &= 0 \\ -10x_1 + 20x_2 + 2y_1x_2 - 2y_2 &= 0 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2^2 &\leq 5 \\ x_1^2 - 2x_2 &\leq 2 \\ y_1(2x_1 + x_2^2 - 5) &= 0 \\ y_2(x_1^2 - ax_2 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Svar: Ja.

b) Nej, ty problemet är ej konvext (undersök målfunktionen).

3.5.17 KKT-villkoren:

$$\begin{aligned}
2(x-2)+2u_1x+4.5u_2 &= 0\\
2(y-1)-4.5u_1+u_2 &= 0\\
u_1, u_2 &\geq 0\\
x^2-4.5y &\leq 0\\
4.5x+y &\leq 11\\
u_1(x^2-4.5y) &= 0\\
u_2(4.5x+y-11) &= 0
\end{aligned}$$

3.5.18 Jämför med optimalitetsvillkoren i LP-avsnittet.

3.5.19 Nej, punkten uppfyller ej Karush-Kuhn-Tucker villkoren.

3.5.20

a) -

b) Punkten $(\epsilon,\ \epsilon)^T,\ \epsilon > 0$ ligger på ett godtyckligt litet avstånd från origo och har målfunktionsvärde $-\epsilon^2 < 0$, alltså kan inte origo vara lokalt minimum.

3.5.21

a) Ja, $\bar{x}$ är en KKT punkt

b) Nej, ty punkten $x = (2,\ 2)^T$ (tex) är tillåten och har ett bättre målfunktionsvärde. (Problemet är ej konvext).

3.5.22 x^* löser problemet $\min \nabla f(x^*)^T x$, då $x \in X \Rightarrow \nabla f(x^*)^T x \geq \nabla f(x^*)^T x^*,\ \forall x \in X$
$\Rightarrow \nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0,\ \forall x \in X$
f konvex på $X \Rightarrow f(x^*) \geq f(x^*) + f(x^*)^T (x - x^*),\ \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geq f(x^*),\ \forall x \in X$
$\Rightarrow x^*$ löser $\min f(x)$, då $x \in X$ V.S.V

3.5.23

a) Alla riktningar d sådana att $\nabla f(x)^T d < 0$ är descentriktningar.

b) Går ej att avgöra!

c) Eftersom det tillåtna området är samma i (P) och i LP-problemet, erhålles en UBD genom $f(x^{LP})$. LBD kan dock ej garanteras i det allmänna fallet. Men om $c = \nabla f(\tilde{x})$, för någon tillåten lösning $\tilde{x}$, då ger $f(\tilde{x}) + \nabla f(\tilde{x})^T (\bar{x} - \tilde{x})$ en LBD, om $\bar{x}$ är LP-lösningen.

3.5.24 -

3.5.25 -

3.6 Frank-Wolfe

3.6.1

a) -

b) $x^1 = (12/5,\ 4/5)^T \Rightarrow \text{UBD} = f(x^1) = 8$

3.6.2

a) $x^* = (2/3, 2/3)$, $f(x^*) = -32/9$ =LBD=UBD.

b) hessianen är positivt definit vilket ger oss att funktionen är konvex.

3.6.3 4 iterationer ger $x^* = (4, 2)$, $f(x^*) = 80$ =LBD=UBD.

3.6.4

a) Hessianen är semidefinit (använd egenvärden).

b) $x^{(1)} = (2, 8/9)$.

3.6.5 $x^* = (1.5, 0.5)$, $f(x^*) = 17/4$ =UBD=LBD.

3.6.6

$f(x) := 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$ har Hessian-matris $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, som är negativt definit. Eftersom f därmed är (strikt) konvex, och det tillåtna området, $S = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 + 2x_2 \leq 2; x_1, x_2 \geq 0]$ är en polyeder (en konvex mängd), gäller olikheten

$$f(x) \leq f(y) + \nabla f(y)^T(x - y) \quad \forall x, y \in S,$$

som används för uppskattningar av det optimala målfunktionsvärdet i Frank-Wolfe metoden.

Iteration 1: $x_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$; $\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 4 - 4x_1 - 2x_2 \\ 6 - 2x_1 - 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $f(x_0) = 31/2$.

Lös

$$\begin{aligned} \max z_1(y) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(y - x_0) &= 31/2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right] \\ &= 3/2 + y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $z_1(y) = 41/2$.

$\because$ Optimala målfunktionsvärdet tillhör intervallet $[3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}]$.

$$p_1 = y_1 - x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$f(x_6 + \ell p_1) = f\Big(\frac{1-\ell}{2}, \frac{1+\ell}{2}\Big) = 31/2 + \ell - \frac{\ell^2}{2} = \varphi(\ell)$$

$$\ell'(\ell) = 1 - \ell = 0 \Rightarrow \ell 1. \quad x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Iteration 2: $f(x_1) = 4 \because f(x_*) \in [4, 41/2]$.
$\nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Lös

$$\max_{b \in S} z_2(y) = f(x_1) + \nabla f(x_1)^T (y - x_1) = 4 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 - 0 \\ y_2 - 1 \end{bmatrix}$$
$$= 2 + 2y_1 + 2y_2$$

$\Rightarrow y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; z_2(y) = 6$
$p_2 = y_2 - x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
$f(x_1 + \ell_{1/2}) = f(2\ell, 1 - \ell) = 4 + 2\ell - 6\ell^2 = \varphi(\ell)$
$\varphi'(\ell) = 2 - 12\ell = 0 \Rightarrow \ell = 1/6 \quad x_2 = (1/3, 5/6)^T$.
Iteration 3: $f(x_2) = 41/6 \quad \because f(x_k) \in [41/6, 41/2]$.
$\nabla f(x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Lös

$$\max_{y \in S} z_3(y) = f(x_2) + \nabla f(x_2)^T (y - x_2) = 21/6 + y_1 + 2y_2$$
$$\rightarrow y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; z_3(y) = 41/6. \because f(x_2) = 41/6$$

Optimum: $x_* - (1/3, 5/6)^T; f(x_*) = 41/6$.

3.6.7

$x^0 = (0,0)^T$, $x^*_{LP0} = (2,2)^T$ LBD = -9
$x^1 = (2,2)^T$ UBD = 3, $x^*_{LP1} = (2,0)^T$ LBD = -1
$x^2 = (2,1)^T$ UBD = 2, $x^*_{LP2} = (2,0)^T$ (tex) LBD = 2
LBD = UBD STOPP!! Opt i $x^* = (2,1)^T$, $f^* = 2$

3.6.8

a) $f(x^0) = 12 \Rightarrow UBD = 12$
Linjärisering $\Rightarrow \min z = 8x_1 + 22x_2 - 18 \Rightarrow x_{LP} = (0,1)^T \Rightarrow$ LBD=4
Linjesökning $\Rightarrow t^0 = 1 \Rightarrow x^1 = (0,1)^T \Rightarrow$ UBD=6

b) Problemet är konvext ty Hessianen är positivt definit för alla tillåtna punkter ($x_2 \geq 1$). Alltså är avvikelsen till optimala målfunktionsvärdet högst 2 (UBD – LBD).

3.6.9 -

3.6.10 -

3.6.11 $x = (1, \ -1)^T, \ f^* = 0$

3.7 Övrigt

3.7.1

a) Problem:

Minimera $\displaystyle\sum_{j=i}^{n} f_j(x_j)$

$$\text{Då} \left[\begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = k & | & \alpha^* \\ & | & \\ x_j \leq 1, \forall j & | & \beta_j^*, \forall j \\ & | & \\ x_j \geq 0, \forall j & & \end{array} \right.$$

KKT-villkoren kan sammanfattas som följer:
För varje $j = 1, \ldots, n$ gäller att

$$\begin{array}{rll} x_j^* = 0 & \Rightarrow f_j'(x_j^*) \geq \alpha^* & \text{och } \beta_j^* = 0 \\ x_j^* \in (0,1) & \Rightarrow f_j'(x_j^*) = \alpha^* & \text{och } \beta_j^* = 0 \\ x_j^* = 1 & \Rightarrow f;_j\,(x_j^*) \leq \alpha^* & \text{och } \left\{ \begin{array}{l} f_j'(x_j^*) + \beta_j^* = \alpha^*, \\ \beta_j^* \geq 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Dessutom: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j^k = k.$

Lagrangefunktionen väljs till $L(x, \alpha, \beta) = \Sigma_j f_j(x_j)$
$-\alpha(\Sigma_j x_j - k) + \Sigma_j \beta_j (x_j - 1)$; KKT fås ur

- $\dfrac{\partial L(x,\alpha,\beta)}{\partial x_j} \geq 0, \dfrac{\partial L(x,\alpha,\beta)}{\partial x_j} \cdot x_j = 0, x_j \geq 0$
- $\dfrac{\partial L(x,\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = 0, \dfrac{\partial L(x,\alpha,\beta)}{\partial \beta_j} \leq 0, \dfrac{\partial L(x,\alpha,\beta)}{\partial \beta_j} \cdot \beta_j = 0, \beta_j \leq 0$
- $\Sigma x_j = k$

b) Antag att brytpunkten, dvs det j för vilket $r > k$ inträffar, är j^*. Det gäller då enligt algoritmen att $x_j^* = 1$ för alla $j = 1, 2, \ldots, j^* - 1$ och att $x_{j^*}^* - k - (j^* - 1)$.

Sätt $\alpha^* = -cj^*$. Vi uppfyller därmed att

$j = 1, \ldots, j^* - 1$: $x^* = 1$ och $f_j'(x_j^*) = c - c_j \leq \alpha^*$, dvs $c_j \geq c_{j^*}$ för $j < j^*$ (följer ur sorteringen).

$j = j^*$: $x_{j^*} \in [0,1]$ och $f_j'(x_j^*) = -c_{j^*} = -\alpha^*$

$j = j^*$: $x_j^* = 0$ och $f_j'(x_j^*) = -c_j \geq \alpha^* = -c_j^*$. dvs $c_j \leq c_{j^*}$ för $j > j^*$ (följer ur sorteringen).

$$\text{För} \begin{bmatrix} \\ \\ j > j_{j^*}, \text{sätt } \beta_j^* = 0 \\ j = 1, \ldots, j^* - 1, \text{sätt } \beta_j^* = \alpha^* - f_j'(x_j^*) = -c_{j^*} + c_j \geq 0 \\ j = j^*, \text{sätt } \beta_j^* = 0 \end{bmatrix}$$

Vi xxxx därmed samtliga KKT-villkor!

3.7.2 Problem: $\min f(x)$ då $g(x) \geq 0, x \in X$, med
$f(x) = -2x_1 + x_1^2 - x_2 + 2x_2^2, g(x) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 3$
$X = [0,2] \times [0,2]$.
givet ett iterat (x^t, λ^t) är subproblemet i SQP:

$$\begin{array}{ll} \min \nabla_x L(x^t,\lambda^t)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla_x^2 L(x^t,\lambda^t) & (L(x,\lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)) \\ \text{då} \quad g(x^t) + \nabla g(x^t) p \geq 0 & \\ \quad\quad {}' x^t + p \in X & \end{array}$$

Vi har $x^0 = (0,0)^T$ och väljer $\lambda^0 = 0$. Då följer att $L(x, \lambda^0) = f(x)$ och vi får som subproblem (med $p = x - x^0$) (ty $\nabla g(x^0) = 0$)

$$\begin{array}{ll} \min f(x) & \text{Sätt } \nabla f(x) = \mathbf{0} =: x = (1, 1/4)^T \in X. \\ \text{då } x \in X & \text{Så } p^0 = x - x^0 = (1, 1/4)^T. \end{array}$$

Med max-steg 1 i riktning p kan inte X överskridas. Vi inkluderar bara g i straffunktionen:

$$g(x) := \min_{\ell \in [0,1]} f(x^0 + \ell p^0) + 10 * \psi(x^0 + \ell p^0), \psi(x) = \min \frac{1}{2}\{g(x), 0\}^2$$

Vi använder Armijos steglängdsregel med acceptansparameter 0.1 och får:

$$q(x^0 + \ell p^0) - q(x^0) \leq 0.1 \ell \nabla w(x^0)^T p^0$$

uppfyllt med $\ell = 1 \quad \because x^1 = x^0 + p^0 = (1, 1/4)^T$.
($\approx -1.05 \leq 0.1 \cdot (-9/4)$).

3.7.3

a) For differentierbara funktioner f och konvexa mängder x gäller följande.

x_* lokalt min till f på $x \Rightarrow \nabla f(x_*)^T (x - x_*) \geq 0 \quad \forall x \in X$.

Låt $x_{*j} > 0$, och välj godtyckligt $j \neq i$. Bilda den tillåtna lösningen

$$x = \begin{cases} 0 & \text{for index } i \\ x_j^* + x_i^* & \text{for index } j \\ x_k^* & \text{for övriga index } k \end{cases}$$

Från ovanstående fås då att $[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}] x_i^* \geq 0$, d.v.s.

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \leq \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}.$$

b) Vi noterar att (1) funktionsberäkningar är dyra, att (2) otillåtenhet är acceptabelt. En möjlig metod är att välja en tillräckligt stor straffparameter för bivilloren och på det obegränsade. Straffade problemet, använda en Newton-likhande descentmetod, där (1) derivator beräknas numeriskt m.h.adifferenskvoter, och (2) "Hessianen" justeras så att den är positivt definit.

3.7.4

För ett värde på barriär parametern $\mu > 0$ är det obegränsade problemet

$$\text{minimera}_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) - \mu \cdot \log(x_1 + 2x_2 - 10)$$

entydigt lösbaart, enligt följande:

$$x_1 - \frac{\mu}{x_1 + 2x_2 - 10} = 0; 2x_2 - -\frac{2\mu}{x_1 + 2x_2 - 10} = 0$$

ger att $x_1 = x_2$ måste gälla; den resulterande kvadratiska ekvationen $3x_1^2 - 10x_1 - \mu = 0$ har två rötter, varav bara en, $x_1(\mu) = 5/3 + \sqrt{25/9 + \mu/3}$, är (strikt) tillåten i bivillkoret. Då $\mu \to 0$ går $x_1(\mu) = x_2(\mu)$ mot $10/3$.
Man visar sedan att $x^* = (\frac{10}{3}, \frac{10}{3})^T$ är en KKT-punkt. Bivillkoret är bindande, och $\lambda^* = 10/3 \geq 0$, ur det duala systemet. Eftersom problemet är konvext så är x^* optimal.

3.7.5 minimera $f(x) := 61.8 + 5.72x_1 + 0.0175(x_3)^{0.85} + 0.0094(x_4)^{0.75} + 0.006t, xx_3$

då

$$
\begin{aligned}
t_2 x_1 &\geq d_1 t_1 + d_2(t_2 - t_1) \\
x_2 &\geq p_0 \\
x_2 &= 36.25 \frac{(d_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{t_1} \ln\left(\frac{x_2}{p_0}\right) \\
x_1 &= 348,300 \frac{(d_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{x_2} \\
x_j &\geq 0, \forall j
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$
minimera $f(x) := 61.8 + 5.72x_1 + 0.0175x_3^{0.85} + 0.0094x_4^{0.75} + 0.0036x_3$
då

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &:= x_1 - 17.5 \geq 0 \\
g_2(x) &:= x_2 - 200 \geq 0 \\
h_1(x) &:= x_3 - 24\frac{1}{6}(40 - x_1) \ln\left(\frac{x_2}{200}\right) = 0 \\
h_2(x) &:= x_4 - 139,320(40 - x_1)/x_2 = 0 \\
g_3, \ldots, g_6(x) &:= x_1, \ldots, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Vi kontrollerar om KKT-villkoren är uppfyllda i
$\bar{x} = (17.5, 473.7, 468.8, 6618)^T$:

$$g_1(\bar{x}) = 0, g_2(\bar{x}) > 0, h_1(\bar{x}) \approx 0, h_2(\bar{x}) \approx 0, g_3, \ldots, g_6(\bar{x}) > 0.$$

Aktiva olikhetsvillkor alltså enbart bivillkor 1.

$$
\begin{aligned}
\nabla g_1(\bar{x}) &= (1, 0, 0, 0)^T \\
\nabla H_1(\bar{x}) &= (24\frac{1}{6} \ln(\bar{x}_2/200), 24\frac{1}{6}(40 - \bar{x}_1)/(200\bar{x}), 1, 0)^T \approx (20.84, 0.005739, 1, 0)^T \\
\nabla H_2(\bar{x}) &= (139,320/\bar{x}_2, 139,320(40 - \bar{x}_1)/\bar{x}_2^2, 0, 1)^T \approx (294.1, 13.97, 0, 1)^T \\
\nabla f(\bar{x}) &= (5.72, 0, 0.85 \cdot 0.0175\bar{x}_3^{-0.15} + 0.0036, 0.75 \cdot 0.0094\bar{x}_4^{-0.25}) \approx \\
&\quad (5.72, 0, 0.00513, 0.0007896).
\end{aligned}
$$

Finn en lösning till

$$\nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) - \mu_1 \nabla h_1(\bar{x}) - \mu_2 \nabla h_2(\bar{x}) = \mathbf{0}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 20.84 & 294.1 \\ 0 & 0.005739 & 13.97 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 5.72 \\ 0 \\ 0.009513 \\ 0.0007816 \end{bmatrix} \Rightarrow
$$

$\bar{\mu}_1 = 0.009513 (\geq 0!)$ och $\bar{\mu}_2 = 0.0007816 (\geq 0!)$ ur rad 3 - 4, vilket i rad 1 ger att $\bar{\lambda}_1 = 5.292 (\geq 0!)$. Ekvation 2 uppfylls inte exakt med dessa val, men felet är litet:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \nabla f(\bar{x}) - \bar{\lambda}_1 \nabla g_1(\bar{x}) - \bar{\mu}_1 \nabla h_1(\bar{x}) - \bar{\mu}_2 \nabla h_3(\bar{x}) = (0, 0.011, 0, 0)^T$$

vilket innebär att $\|\nabla_x L(\bar{x}\bar{\lambda}, \bar{\mu})\| = 0.011$. En ytterligare bild av att $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ är att betrakta som en acceptabelt nära stationär punkt till L är att det vanligt förekommande avbrottskriteriet i obegränsad optimering, applicerat på $\min_x L(x, \bar{\lambda} < \bar{\mu})$,

$$\|\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})\| \leq \epsilon(1 + |L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})|), \epsilon > 0$$

är uppfyllt med $\epsilon \approx 6 \cdot 10^{-5}$. Eftersom $\bar{x}$ är primalt tillåten (approximativt), $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \geq \mathbf{0}, \bar{x}$ och $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ är komplementära och $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ är en stationär punkt till $L(\cdot, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ (approximativt), betraktar vi $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ som en approximativ KKT-punkt.
Betraktar vi sedan $\nabla^2_{xx} L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ finner vi att den är mycket nära en nollmatris. Vi uppfyller alltså också den andra ordningens nödvändiga villkor för ett lokalt minimum (åtminstone approximativt).
Studerar vi nu problemet närmare ser man att x_1 dominerar kostnadsbidraget kraftigt. Vi kan också se att $\bar{\lambda}_1$ är stor, vilket indikerar att en minskning av dess värde skulle ha blivit effekten av en lägre undre gräns. Om vi betraktar x_1 som fixt på sin lägsta nivå kan vi betrakta problemet som ett optimeringsproblem enbart i x_1, eftersom x_2 och x_4 ges av värdena hos x_1 och x_2. Målfunktionen, satt i x_2, är av formen $k_1(\text{lu } x_2)^{0.85} + k_2 x_2^{-0.75}$ för några $k_1, k_2 > -$. För de stora värden av x_2 som krävs är funktionen mycket flack, d.v.s. linjär. Detta antyder också av att $\nabla_w L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ är nära noll. I det intressanta området är alltså optimeringsproblemet i det närmaste att betrakta som ett LP-problem, snarare om det (icke-konvex) ILP-problem som vi ser i urspringsformuleringen. Vi kan troligen lita på att $\bar{x}$ är en bra lösning, efatersom KKT-villkoren är både nödvändiga och *tillräckliga* för global optimalitet hos LP-problem. (Det faktum att utskriften gavs med få signifikanta siffror gör att vi inte kan räkna med att kunna uppfylla optimalitetsvillkoren exakt, och eftersom ursprungsdata optimalitetsvillkoren exakt, och eftersom ursprungsdata troligen är bekräftade med fel är $\bar{x}$ att betrakta som ett tillräckligt bra närmevärde.)
Notering och en alternativ analys:
Vi kan se att modellen är olyckligt formulerad. Till exempel ser vi att x_1 dominerar kostnaden totalt, till priset av att övriga variablers värden blir nästan försumbara. Ett bättre angreppssätt hade varit att skala variablerna så att deras inflytande blivit mer jämbördiga.
Utdata från programmet kan också användas på ett annorlunda sätt än vi gjorde. Eftersom x_3 och x_4 är funktioner av x_1 och x_2 borde en rimligare approximation av deras optimala värden ha utnyttjat sambanden (2c) och (2d) givet värdena hos x_1 och x_2. Med denna modifiering hade vi vunnit flera saker. (1) Vi hade uppfyllt alla bivillkor, speciellt de fysikaliska sambanden (2c) och (2d). (2) Vi hade därmed sluppit flelet i KKT-villkoren $(\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \mathbf{0})$ vars värde i analysen föranleder en viss betänksamhet. Notera att felet (residualen) som är 0.011, är flera storleksordningar större än högerleden. En numerisk analytiker skulle hävda att lösningen $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ (speciellt $\bar{\mu}$) inte har särskilt många korrekta siffror...; vi hade också fått en annorlunda lösning om vi hade angripit systemet annorlunda. Vi noterar slutligen att med utnyttjar de av en omskrivning av f i (x_1, x_2) kan visa att KKT-villkoren gäller, inklusive andra ordningens villkore.

3.7.6

a) Optimalitetsvillkoren för $[p'(x_t)]$ ger

$$\begin{aligned}
&\nabla f(y) + \gamma(y - x_t) = \mathbf{0} \leftrightarrow Qy + q + \gamma(y - x_t) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \\
&(Q + \gamma I)y = \gamma x_t - q \Leftrightarrow (Q + \gamma I)\underbrace{y - x_t)}p \ = \gamma x_t - q - (Q + \gamma I)x_t \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = -(Qx_t + q).
\end{aligned}$$

b) Om $\{x_t\}$ konvergerar mot x_∞ så måste $\{p_t\} = \{x_{t+1} - x_t\}$ konvergera mot noll. Ur uppdateringsformeln fås att $p_t = (Q + \gamma I)^{-1}\nabla f(x_t)$ för alla t. Sekvensen $\{\nabla f(x_t)\}$ konvergerar mot $\nabla f(x_\infty)$ eftersom f är kontinuerligt differentierbar. Om $\nabla f(x_\infty) \neq \mathbf{0}$ skulle gälla fås ur uppdateringsformeln att $\{p_t\}$ skulle konvergera mot $(Q + \gamma I)^{-1}\nabla f(x_\infty) \neq \mathbf{0}$, ty $(Q + \gamma I)^{-1}$ är positivt definit när $a + \gamma I$ är det. Detta leder till en motsägelse. Således är $\nabla f(x_\infty) = \mathbf{0}$. Eftersom f är konvex är x_∞ ett globalt minimum av f över $\mathbb{R}^n$.

3.7.7

a) Brantaste lutningsmetodens sökriktning ges till exempel av $\min \nabla f(x^t)^T p + 1/(2\gamma)\|\rho\|^2$, ty första ordningens villkor är att $\nabla f(x^t) + (1/\gamma)\rho = 0^n$, d.v.s. $\rho = -\gamma\nabla f(x^t)$. Motsvarande p från $\min \nabla f(x^t)^T\rho$ då $\|p\| \leq \Delta$ fås genom att betrakta det ekvivalenta problemet $\min \nabla f(x^t)^T p$. Eftersom målfunktionen då $\|p\|^2 \leq \Delta^2$ är linjär är bivillkoret med nödvändighet bindande, varför vi får att, för något $\lambda > 0$,

$$\nabla f(x^t) + 2\lambda \cdot \rho = 0^n \text{ eller } \rho = -1/(2\lambda)\nabla f(x^t),$$

dvs samma riktning som minus gradienten av f i x^t i båda fallen.

b) I. Ett ekvivalent problem är

$$\begin{aligned}
&\min \psi_t(p) \\
&\text{ då } \|p\|^2 \leq \Delta_t^2.
\end{aligned}$$

första ordningens nödvändiga krav ger att

$$\begin{gathered}
\nabla\psi_t(\rho) + \lambda\rho = \mathbf{0}^n, \text{ dvs} \\
\nabla f(x^t) + \nabla^2 f(x^t)\rho + \lambda\rho = \mathbf{0}^n, \text{ eller} \\
[\nabla^2 f(x^t) + \lambda I^n]\rho = -\nabla f(x^t).
\end{gathered}$$

Andra ordningen nödvändiga krav ger att

$$\nabla^2 f(x^t) + \lambda I^n \text{ är positivt semidefinition 7.}$$

II. Om $\lambda = 0$ fås att p är Newtonriktningen. Då λ ökar mot ∞ fås i stället en sökriktning som i limes är brantaste lutningsriktningen. (Det förra händer om Δ_t är start nog medan det senare inträffar när Δ_t blir allt mindre. För att se det kan man använda relationen $\Delta_t \geq \|p\| = \|(\nabla^2 f(x^t) + \lambda I)^{-1}\nabla f(x^t)\|$.)
Fördelen med en trustregion är att medan en sökmetod fixerar sökningen så får den här variera (med Δ_t) så att metoden bättre anpassas till problemets egenskaper.

3.7.8

Fall I: $\{\nabla f(x^T)\} \to 0^n, \{x^t\}$ och $\{f(x^t)\}$ divergerar.
Exempel: $f(x) = -\log x; \{x^t\} \to \infty, \{f(x^t)\} \to -\infty, \{f'(x^t)\} \to 0$

Fall II: $\{\nabla f(x^t)\} \to 0^n, \{x^t\}$ divergerar , $\{f(x^t)\}$ konvergerar.
Exempel: $f(x) = 1/x; \{x^t\} \to \infty, \{f(x^t)\} \to 0, \{f(x^t)\} \to 0$

Fall III: $\{\nabla f(x^t)\} \to 0^n, \{x^t\}$ är begränsad, $\{f(x^t)\}$ är begränsad.
Exempel: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x; x^t = \begin{cases} 1 + 1/t, & t \text{ udda} \\ -1 - 1/t & t \text{ jämna} \end{cases}$
$\{x^t\}$ har två hopningspunkter, ± 1, och $\{f(x^t)\}$ har två hopningspunkter $\pm 2/3$.

Fall IV: $\{\nabla f(x^t)\} \to 0^n, \{x^t\}$ är begränsad, $\{f(x^t)\}$ konvergerar.
Exempel: $f(x) = x^2 - 1; x^t$ som ovan; $\{f(x^t)\} \to 0$.

Fall V: $\{\nabla f(x^t)\} \to 0^n, \{x^t\}$ och $\{f(x^t)\}$ konvergerar.
Exempel: f som ovan, $x^2 - 1 + 1/t$

3.7.9

a) $[p_1(\rho)] \quad \min \pi(x, \rho) = f(x) + (\rho/2) \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x)$

$p_2(\mu)] \quad \min \beta(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^{n} \log(g_j(x))$

b) $p_1(\rho)] \quad \nabla_x \pi(x, \rho) = \nabla f(x) + \rho \sum_{i=1}^{m} \nabla h_i(x) h_i(x) = \mathbf{0}$

Sätt $\lambda_i(\rho) = -\rho h_i(x)$, vilket ger $\nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\rho) \nabla h_i(x) = \mathbf{0}$

$[p_2(\mu)] \quad \nabla_x \beta(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^{r} \nabla g_i(x)/g_j(x) = \mathbf{0}$

Sätt $\lambda_j(r) = \mu/g_j(x)$, vilket ger $\begin{cases} \nabla f(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(\mu) \nabla g_; (x) = \mathbf{0} \\ \lambda_j(\mu) \geq 0, \forall j \\ \lambda_j(\mu) g_j(x) = \mu, \forall j \end{cases}$

Om x konvergerar mot en KKT-punkt då $\rho \to +\infty$ resp. $\mu \to 0$ går $\lambda_i(\rho)$ resp. $\lambda_j(\mu)$ mot multiplikatorer.

3.7.10

a) Låt $(\hat{A}, \hat{b})$ vara de rader i (A, b) som motsvarar de bivillkor som är aktiva i x_*, d.v.s. där $a_i^T x_* = b_i$. Att det inte existerar en tillåten riktning i x_* som samtidigt är en descentriktning kan beskrivas som att det inte finns ett $p \in \mathbb{R}^n$ med $\nabla f(x_*)^T p < 0$ och $\hat{A} p \geq \mathbf{0}$.

Optimalitetsvillkor. Om x_* är ett lokalt min existerar $\hat{\lambda}_* \geq \mathbf{0}$ så att $\nabla f(x_*) = \hat{A}^T\hat{\lambda}_*$.

b) tolka: $x = p; B = \hat{A}; c = \nabla f(x_*)$. Då är utsagan att det <u>inte</u> existerar en tillåten descentriktning i x_* ekvivalent med att systemet I <u>inte</u> har en lösning. Farkas Lemma leder då till att systemet II har en lösning. Tolkas II i detta problem fås, med $y = \hat{\lambda}_*$, att det existerar $\hat{\lambda}_* \geq \mathbf{0}$ så att $\hat{A}^T\hat{\lambda}_* = \nabla f(x_*)$, d.v.s. första ordningens nödvändiga krav!

3.7.11

a) $a > \dfrac{9}{8}$

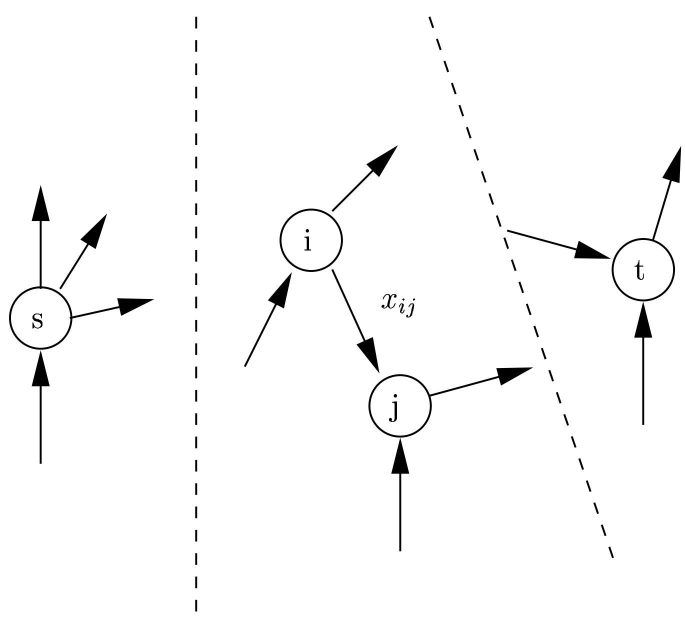
b) Nej, ty $d^T\nabla f > 0$.

c) $a > \dfrac{9}{8}$

4 Nätverksproblem

4.1 Modellering

4.1.1



a)

Figur 20: Bild till upg 4.1.1

$$x_{ij} = \text{ flöde på båge } (i,j)$$
$$f = \text{flödesstyrka genom grafen}$$

Maxflödesproblemet:
maximera f

$$\text{då} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} f & i = s \\ 0 & \neq s,t \\ -f & i = t \end{array} \right. \\ \\ u_{ij} \geq x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E \\ f \quad \text{fri} \end{array} \right.$$

b) Inför dualvariabler π_i för nodjämviktsvillkoren och α_{ij} för kapacitetsvillkoren.

Dualt problem:
minimera $\displaystyle\sum_{(i,j)\in E} u_{ij}\alpha_{ij}$

$$\text{då} \left[\begin{array}{r} \pi_i - \pi_j + \alpha_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E \\ \pi_t - \pi_s = 1 \qquad\qquad\quad \\ \alpha_{ij} \geq 0. \quad \forall (i,j) \in E \\ \pi_i \text{ fri}, \quad i \in N \qquad\; \end{array} \right.$$

Låt $S \in N$ vara sådant att $s \in S, t \notin S$. Då beskriver mängderna S och $N \backslash S$ ett <u>snitt</u> i grafen. Maxflödes-minusnittsteoremet säger att f^* (den maximala flödesstyrkan) är lika med den minimala kapaciteten hos något snitt i grafen, vilket kan uttryckas som $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S \\ j\notin s}} u_{ij}$, vilken minimeras över $S \subset N$.

Motivering mha LP-dualitet:

Sätt

$$\pi_i = \left\{ \begin{array}{lll} 0, & i \in s & \text{(0 på } s\text{-sidan,} \\ 1, & i \notin s & \text{1 på } t\text{-sidan)} \end{array} \right.$$

$$\alpha_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & (i,j) \in E, i \in S, j \notin s \\ 0 & \end{array} \right. \qquad \text{(bågar över snittet)}$$

Detta är en dualt tillåten lösning, och målfunktionsvärdet är lika med $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in s, j\notin s}} u_{ij}$, d.v.s. styrkan hos snittet definerat av nodmändgen s. Svag dualitet visar att f^* inte kan överstiga styrkan hos något snitt. Den minimala styrkan motsvarar ett flöde x där lflödet av maximalt (u_{ij}) på varje båge som passerar över snittet. Eftersom $f = \displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in s \\ i\in s, j\notin s}} u_{ij}$ gäller där måste x vara optimalt och f den maximala flödesstyrkan.

4.1.2

a) Modell: sök ett maximal flöde mellan nod s och nod t:

$\max f$

då $\Sigma_i x_{si} = f,$
$\Sigma_j x_{ij} - x_{si} = 0, i = 1, \ldots, 7,$
$x_{jt} - \Sigma_i x_{ij} = 0, j = 1, \ldots, 5$
$-\Sigma_j x_{jt} = -f$
$0 \leq x_{si} = 3, i = 1, \ldots, 7; 0 \leq x_{ij} \leq 1, i = 1, \ldots, 7, j = 1, \ldots, 5; 0 \leq x_{\cdot t} \leq (6, 4, 5, 4, 3)$

b) Bågar motsvarande 'x' i tabellen (variabler x_{ij}) stryks.

4.1.3 Lagrangerelaxera kapacitetsvillkoren (andra bivillkorsgruppen) $\Rightarrow$ duala problemet $\max\limits_{u \geq 0} h(u)$ (u är multiplikatorvektorn) där den duala funktionen $h(u)$ ges av Lagrangesubproblemet

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in B} (c_{ij} + u_{ij}) {x^k}_{ij} - \sum_{(i,j) \in B} u_{ij} u_{ij} \\ \text{då} & Ax^k = d^k, \ k \in K \\ & {x^k}_{ij} \geq 0, \ k \in K, \ (i,j) \in B \end{array}$$

Problemet separerar i k st minkostnadsflödesproblem (ett för varje varutyp). Problemen löses växelvis, starta med givna u:n, lös lagrangesubproblemet vilket ger en indikation på hur de nya u:na skall väljas. Multiplikatoruppdatering:

$$u_{ij}^{\text{ny}} = u_{ij} + \alpha * (\underbrace{\sum_{(i,j) \in B} (\sum_{k \in K} {x^k}_{ij} - u_{ij})}_{\substack{> 0 \rightarrow \text{öka } u_{ij} \\ < 0 \rightarrow \text{minska } u_{ij}}}),$$

där α är en steglängd.

4.1.4 Om villkoren (1) relaxeras fås

$$\begin{aligned} L(v) = & \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} v_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} - b_i) \\ = & \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + v_i a_{ij}) x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} b_i v_i \\ \text{då} & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, .., n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, .., m; \ j = 1, .., n \end{aligned}$$

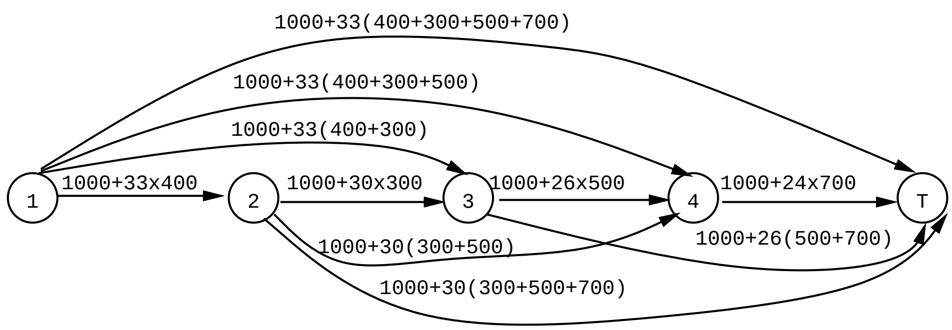
där $v_i \geq 0, i = 1, .., m$ är multiplikatorerna till de relaxerade bivillkoren (1). Problemet separerar i n stycken halvtillordningsproblem.

Om villkoren (2) relaxeras fås

$$
\begin{aligned}
L(u) = \quad & \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} u_j (\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - 1) \\
= \quad & \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + u_j) x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} u_j \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \quad i = 1,..,m \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,..,m; \; j = 1,..,n
\end{aligned}
$$

där $u_j, j = 1,..,n$ är Lagrangemultiplikatorerna till de relaxerade bivillkoren (2). Problemet separerar i m st kappsäcksproblem.
Halvtillordningsproblemet har heltalsegenskap, vilket *inte* gäller för kappsäcksproblem. Den första relaxationen ger alltså en optimistisk uppskattning som sammanfaller med LP-optimalvärdet, medan den andra relaxationen typiskt ger en starkare (högre) optimistisk uppskattning.

4.1.5 Nätverk:



En båge från nod i till nod j symboliserar att lådtyp i används för att tillgodose efterfrågan av lådor typ i t o m $j-1$.

4.1.6 Transportproblem med 4 källor (2 fabriker i 2 tidsperioder) samt 4 sänkor (2 varuhus i 2 perioder). Inför ett skenvaruhus med efterfrågan 192-185=7. Kostnaden på bågarna är en summa av tillverknings- lagerhållnings- och transportkostnader.

4.1.7 Variabeldefinition:

$$\begin{array}{rcl} x_{ij} & = & \text{Flöde från } i \text{ till } j \\ y_i & = & \text{Produktionsnivå} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \min z = g(y) + \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{då} & \sum_j x_{ij} & = & y_i \\ & \sum_i x_{ij} & = & b_j \\ & y_i & \leq & s_i \\ & x_{ij} & \geq & 0 \\ & x_{ij}, y_j & \geq & 0, \text{ heltal} \end{array}$$

4.2 Övrigt

4.2.1 Maximera sannolikheten att samtalet ej bryts. Bågkostnad = (1 - sannolikheten för avbrott). Sök väg med maximal produkt (multiplikativ målfunktion). Bästa väg: A-C-E. Sannolikhet för avbrott är 1 - 0.6 = 0.4.

4.2.2

a) s_i flöde från källa i.

t_j flöde till sänka j.

x_{ij} flöde på båge (i, j).

c_{ij} enhetskostnad för flöde på båge (i, j).

$$\begin{array}{rll} \min z = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} & \\ \text{Då} & \sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i & \forall i \in 1 \dots m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = t_j & \forall j \in 1 \dots n \\ & x_{ij} \geq 0 & \forall i \in 1 \dots m, \forall j \in 1 \dots n \end{array}$$

b) y_i dualvariabel till källa i.

z_j dualvariabel till sänka j.

$$\begin{array}{rll} \max w = & \sum_{i=1}^m y_i s_i + \sum_{j=1}^n z_j t_j & \\ \text{Då} & y_i + z_j \leq c_{ij} & \forall i = 1 \dots m, j = 1 \dots n \end{array}$$

c) Om alla ingående konstanter är heltaliga finns det en optimal läsning som är heltalig. Transportproblem har denna egenskap (Dess matris är totalt unimodulär).

d) $\sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_i \left(\sum_j x_{ij} \right) = \sum_i s_i = k$ där k är en konstant som anger totala tillgången.

Antag att konstanten λ adderas till målfunktionen dvs $\hat{c}_{ij} = c_{ij} + \lambda$

$$z = \sum_i \sum_j \hat{c}_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j (c_{ij} + \lambda) x_{ij} = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \lambda \sum_i \sum_j x_{ij}$$
$$= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \lambda k$$

4.2.3 Optimala bågar: $(1,3)$, $(2,4)$, $(1,5)$, $(4,6)$, $(5,6)$, $(6,7)$. Kostnad 21.

4.2.4

a) -

b) i) $d(n_s) = 1, \quad d(n_t) = -1$
ii) $d(n_s) = 6, \quad d(n_i) = -1 \quad (i = 1, .., 5, t)$

c) Billigaste väg: $s \to 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to t$. Kostnad = 7

d) Väg med maximal kapacitet: s-2-5-t. Kapacitet = 6

e) -

4.2.5 Målfunktion

$$\min \sum_i \sum_j (c_{ij} + d) x_{ij}$$

där d är ett stort tal (större än dyraste väg i nätverket)

4.2.6 Sök maxflöde från s till T. De bågar som ingår i minsnittet representerar de vägsträckor som ska sprängas. Spräng d-T, b-e och f-T. 26 lådor dynamit åtgår.

4.2.7

a) Givet att samtliga högerledskoefficienter i problemet är heltal, så kommer LP-relaxationen av problemet alltid att ha en heltalig optimallösning.

b) Billigaste väg problem, maxflödesproblem och tillordningsproblem.

4.2.8

a) $v_4^* \leq v_1^* \leq v_2^*, \; v_4^* \leq v_3^* \leq v_2^*$

b) $v_4^* = v_1^* \leq v_3^* = v_2^*$

4.2.9

a) Billigaste vägträd: $(1,3)$, $(3,4)$, $(2,5)$, $(3,5)$, $(4,6)$.

b) $-5 \leq c_{34} \leq -7$

c)

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 3x_{13} - x_{14} + 6x_{21} + 2x_{32} + 3x_{35} + 2x_{36} - 6x_{34} + 7x_{46} - 2x_{52} - 8x_{54} + 3x_{65} & & \\
\text{då} & x_{13} + x_{14} - x_{21} & = & 5 \\
& x_{21} - x_{32} - x_{52} & = & -1 \\
& x_{32} + x_{35} + x_{36} - x_{34} - x_{13} & = & -1 \\
& x_{46} - x_{14} - x_{34} - x_{54} & = & -1 \\
& x_{52} + x_{54} - x_{35} - x_{65} & = & -1 \\
& x_{65} - x_{36} - x_{46} & = & 1 \\
& x_{ij} & \geq & 0
\end{array}
$$

d) Duala lösningen = nodpriserna. $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = -3$, $y_4 = 3$, $y_5 = -6$, $y_6 = -4$

e) $y_j = -\min_i \{c_{ij} - y_i\}, \quad j = 1,..,n, \quad y_1 = 0$

f) Nej, ty nätverket är ej acykliskt

4.2.10

a) $f^* = 9$

b) Maximala flödet mellan två noder är lika kapaciteten hos det snitt med lägst kapacitet som skiljer noderna åt. (Kapacitet hos ett snitt är summan av maximalt flöde hos de bågar som korsar snittet).

c) Basbågar: $(s,1)$, $(s,2)$, $(1,4)$, $(2,5)$, $(3,t)$, $(3,5)$. $\hat{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j = 0$ för dessa basbågar. $\Rightarrow y_s = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = -1$, $y_3 = -1$, $y_4 = -2$, $y_5 = -2$, $y_t = -2$ Övriga bågar: $\hat{c}_{s3} = 0$, $x = u$ OK, $\hat{c}_{13} = 1$, $x = u$ ej optimalt, $\hat{c}_{32} = 1$, $x = l$ OK, $\hat{c}_{34} = 0$, $x = l$ OK, $\hat{c}_{4t} = \hat{c}_{5t} = 1$, $x = u$ ej optimalt $\Rightarrow$ Lösningen ej optimal

4.2.11

a) Nej! Om alla högerled i LP-formuleringen är heltaliga blir dock optimum alltid heltaligt.

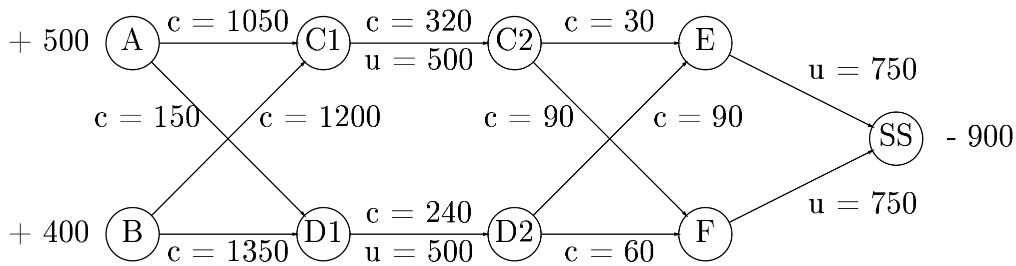
b) $6 \cdot 6 = 36$

c) Ja, men endast om nätverket är acykliskt.

d) Raderna i anslutningsmatrisen är linjärt beroende.

4.2.12

4.2.13



a) $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(3,6)$, $(5,6)$, $(6,7)$, $(6,8)$, $(6,9)$, $(6,10)$, $(10,11)$. Kostnad 28

b) Ta bort bågen från trädet. Vi erhåller en skog av två träd T_1 och T_2. Vi behöver bara betrakta alla bågar mellan T_1 och T_2 och välja den billigaste för att återkoppla dessa till ett uppspännande träd. Här kan någon av bågarna $(2,5)$, $(2,6)$, $(4,6)$ eller $(4,7)$ väljas.

4.2.14

a) Opt.villkor $y_j \geq y_i - c_{ij}$ (likhet om bågen ingår i BV-trädet). Det givna trädet är ej optimalt ty $y_5 = -19 \not\geq -10 = -6 - 4 = y_3 - c_{35}$

b) BV-träd: $(s,1)$, $(1,4)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(3,5)$, $(5,6)$.

4.2.15

a) I. Falskt II. Falskt III. Falskt

b) I. Sant II. Sant III. Sant

4.2.16

a) $(1,2),(2,3),(2,6),(4,5),(5,6),(5,7),(5,8),(6,9)$

b) I. Om $(i,j) \notin$ billigaste uppspännande träd, trädet fortfarande optimal
Om $(i,j) \in$ billigaste uppspännande träd, hitta den billigaste bågen i snittet!

II. (i,j) införs $\Rightarrow$ En cykel i trädet. Ta bort den dyraste bågen i cykeln $\Rightarrow$ nytt billigaste uppspännande träd.

5 Heltalsprogrammering

5.1 Modellering

5.1.1

Vi definierar index:

$i, i = 1 \dots 3$ Nummer på arbetsplats.

$k, k = 1 \dots 2$ Nummer på telejack.

Samt variabler

x_i, y_i Koordinater för arbetsplats i.

$t_{i,k}$ Indikatorvariabel, värdet är 1 om arbetsplats i är ansluten till jack k.

z Längsta avståndet till fönstret.

Vi får problemet : Minimera avståndet för sämsta arbetsplatsen:

$$\min \quad z \tag{10}$$

Då arbetsplatserna finns i rummet:

$$\frac{d}{2} \leq x_i \leq l - \frac{d}{2}, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{11}$$

$$\frac{d}{2} \leq y_i \leq b - \frac{d}{2}, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{12}$$

Då arbetsplatserna ej inkräktar på varandra:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq d^2, \quad \forall i = 1 \dots 3, \forall j = 1 \dots 3, i \neq j \tag{13}$$

Då sladden räcker:

$$t_{1,k}((x_i - \frac{l}{2})^2 + (y_i - 0)^2) \leq a_i^2, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{14}$$

$$t_{2,k}((x_i - l)^2 + (y_i - \frac{b}{2})^2) \leq a_i^2, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{15}$$

Vi måste ansluta varje arbetsplats till exakt ett telejack:

$$t_{i,1} + t_{i,2} = 1, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{16}$$

$$t_{i,k} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1 \dots 3, \forall k = 1, 2 \tag{17}$$

Vi skall se till att z är längre än avståndet till fönstret för den sämsta arbetsplatsen:

$$b - y_i \geq z, \quad \forall i = 1 \dots 3 \tag{18}$$

Hela uppgiften blir då minimera (1) under uppfyllande av (2) - (9) .

5.1.2 Vi definierar variabler:

X_{mni} = Mängd varor av typ i som skickas fån central n till kund m,

Y_{nk} = 1 om vi bygger en central av typ k på plats n, 0 annars.

Z_{mn} = 1 om vi skickar en bil från n till m, 0 annars.

U_{mi} = Mängd behov av vara i som ej tillfredställs hos kund m.

V_m = 1 om kund m ej får vad de vill ha, 0 annars.

Vi får målfunktion:

$$\text{minimera} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} X_{mni} q_{mni} \quad \text{(rörlig transportkostnad)}$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} Z_{mn} p_{mn} \quad \text{(kostnad för att skicka bilar)}$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} Y_{nk} d_k \quad \text{(kostnad för att bygga centraler)}$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{3} U_{mi} s_i \quad \text{(rörligt straff för att ej uppfylla behov)}$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} V_m t \quad \text{(fast straff för att ej uppfylla behov)}$$

Då

$$\sum_{m=1}^{M} x_{mni} \leq \sum_{k=1}^{K} Y_{nk} d_{ki}, \quad \forall n, i$$

(vi får ej skicka för mycket från våra centraler)

$$\sum_{k=1}^{K} Y_n k \leq 1 \quad \forall n$$

(max en central per plats)

$$X_{mni} \leq Z_{mn} b_{mi} \quad \forall m, n, i$$

(vi måste skicka en bil om vi skall transporterna något)

$$\sum_{n=1}^{N} X_{mni} + U_{mi} \geq b_{mi} \quad \forall m, i$$

(vi måste tillgodose kundens behov eller ta straffet.)

$$U_{mi} \leq b_{mi} V_m \quad \forall m, i$$

(om kunden ej får vad de vill ha måste vi betala det fasta straffet.)

5.1.3

a) Variabler:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{om tomt } i \text{ används} \\ 0, & \text{annars.} \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{om vårdcentral på tomt i servar område } j \\ 0, & \text{annars} \qquad i = 1, 2, \ldots, 5; j = 1, 2, \ldots, 18 \end{cases}$$

Modell:

$$\text{Minimera } \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{18} a_j d_{ij} y_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\text{då} \quad & \sum_{i=1}^{t} c_i x_i \leq b && \text{(budget)} \\
& \sum_{j=1}^{18} a_j y_{ij} \leq k_i x_i, i = 1, 2, \ldots, t && \text{(kapacitet)} \\
& \sum_{i=1}^{5} x_i = 2 && \text{(byggplan)} \\
& \sum_{i=1}^{5} y_{ij} = 1, j = 1, 2, \ldots, 18 && \text{tillordning)} \\
& x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, 5 \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, 5; j = 1, 2, \ldots, 18
\end{aligned}$$

Problem av typen kapaciterad lokalisering.
"$y_{ij} \in \{0, 1\}$" kan bytas mot "$y_{ij} \geq 0$" pga heltalsegenskap (unimodularitet) i y_{ij} och tillordningsvillkoren.

b) Byt målfunktionen mot

$$\text{minimera } \max_{i,j}\{d_{ij} y_{ij}\}.$$

5.1.4

Index: $i = \text{individ}$ $(i = 1, \ldots, 6)$
$j = \text{veckodag}$ $(j = 1, \ldots, 6)$

Kostnader: $p_{ij} = \text{poäng för dag } j \text{ satt av individ } i$

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{om individ } i \text{ behärskar espressomaskinen} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Modell:

a)

- Variabler:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om individ } i \text{ arbetar dag } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- Bivillkor:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_i x_{ij} = 4, j = 1, \ldots, 6 (\text{ personalbehov}) \\ &\textstyle\sum_i c_i x_{ij} \geq 1, j = 1, \ldots, 6 (\text{ maskinkompetens}) \\ &\textstyle\sum_j x_{ij} \leq 4, i = 1, \ldots, 6 (\text{ arbetsbegränsning}) \\ &x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \end{aligned}$$

- Målfunktion: maximera lyckan $= \sum_i \sum_j p_{ij} x_{ij}$

b) Ny variabel: $z = \text{lyckan hos den sämst lottade.}$
Ny modell: maximera z.

$$\begin{aligned} \text{då} \quad &\textstyle\sum_j p_{ij} x_{ij} \geq z, i = 1, \ldots, 6 \\ &\textstyle\sum_i c_{ij} = 4, j = 1, \ldots, 6 \\ &\textstyle\sum_i c_{ij} x_{ij} \geq 1, j = 1, \ldots, 6 \\ &x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j, z \text{ fri} \end{aligned}$$

Kommentar: den egentliga målfunktionen är att maximera den lägsta lyckan d.v.s. att maximera $f(x) := \min_i (\sum_j p_{ij} x_{ij})$. Eftersom denna funktion inte är linjär konverteras den enligt ovanstående med hjälp av en extra variabel.

5.1.5 Variabeldeklaration:

$$\begin{aligned} y_t &= 1 \text{ om vi rekryterar i månad } t, 0 \text{ annars } (t = 1, \ldots, 10). \\ x_{st} &= \text{antalet nyrekryterande den förste i månad } s \text{ som avskedas den siste.} \\ &\quad \text{i månad } t \ (s = 1, \ldots, 10 : t = 1, \ldots, 10) \\ \ddot{o}_t &= \text{överbemaning under månad } t \ (t = 1, \ldots, 10). \end{aligned}$$

Modell: $\min f(y, \ddot{o}) = \sum^{10} t = 1 s_t y_t + \sum_{t=1}^{10} c_t \ddot{o}_t$

då

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{k=t}^{10} x_{ik} = r_t + \ddot{o}_t \quad (t = 1, \ldots, 10) \tag{19}$$

$$x_{st} = 0 (t = 1, \dots, 9, s \geq t - 2) \tag{20}$$

$$\sum_{t=s}^{10} x_{st} \leq M \cdot y_t (t = 1, \dots, 10) \quad (M \gg 0) \tag{21}$$

$$y_t \in \{0, 1\} \quad (t = 1, \dots, 10)$$

$$x_{st} \geq 0, \text{ heltal } (s = 1, \dots, 10 : t = 1, \dots, 10)$$

$$\ddot{o}_t \geq 0, \text{heltal } (t = 1, \dots, 10)$$

(1): antalet arbetande under månad t = kravet + överbemanning;

(2): förbjudet att avsheda någon före tre månader om start före månad 9_j

(3): ej anställning ($x > 0$) om inte rekrytering skett ($y > 0$)

5.1.6

Variabeldef.: x_{ijk} = antal ärenden av type i som flyter in under vecka j och behandlas under vecka k, $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = j, \dots, n$.
Bivillkor:

- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} a_i x_{ijk} \leq b_k, k = 1, \dots, n$ (kapacitet)
- $\sum_{k=j}^{n} x_{ijk} = h_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ (alla ärenden behandlas)
- $x_{ijk} \geq 0$, heltal, $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$, (def.)
  $k = j, \dots, n$

Förslag på målfunktion

$$\text{minimera } f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} k x_{ijk}$$

5.1.7

a) Variabler:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{om maskin } j \text{ används} \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \quad j = 1, \dots, k$$

y_j= antal enheter som tillverkas i maskin $j, j = 1, \dots, 4$.

Modell:

minimera $f(x, y) = 400x_1 + 1000x_2 + 600y_3 + 300y_4 + 4y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 5y_4$

då

$$
\begin{aligned}
&y_1 \leq 2000x_1\\
&y_2 \leq 4000x_2\\
&y_3 \leq 1000x_3\\
&y_4 \leq 3000x_4\\
&\\
&0.9y_1 + 0.95y_2 + 0.85y_3 + 0.92y_4 \geq 5000\\
&x_j \in \{0,1\}, j = 1, \ldots, 4\\
&y_j \geq 0, \text{ heltal}, j - 1, \ldots, 4
\end{aligned}
$$

b) (Ett exempel) Vi kan tänka oss att när vi observerar utfallet i andelen defekta enheter producerar vi några extra enheter i samma maskin, alternativt köps det resterande behovet in utifrån. Det senare alternativet kan modelleras sålunda:

Låt ξ_j vara sannolikheten för defekt produkt i maskin j, och inför en ny variabel, z, som anger det ytterligare antalet enheter som behöver köpas in. Vi antar att varje variabel ξ_j är oberoende och att vektorn ξ tillhör någon mängd W av möjliga utfall w. Vi skriver $\xi_j = \xi_j(w)$. Vi antar att varje enhet som måste köpas in kostar q kronor. Eftersom också z är en stokastisk variabel är den extra kostnaden $q(w) \cdot z(w)$. Följande modell uppfyller efterfrågan med sannolikhet 1, till lägsta förväntade kostnad.

Minimera $f(x, y, z) = 400x_1 + 1000x_2 + 600x_3 + 300x_4 + 4y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 5y_4 + E_\xi[q(w)z(w)]$

då

$$
\begin{aligned}
&y_1 \leq 2000x_1\\
&y_2 \leq 4000x_2\\
&y_3 \leq 1000x_3\\
&y_4 \leq 3000x_1\\
&[1 - \xi_1(w)]y_1 + [1 - \xi_2(w)]y_2 + [1 - \xi_3(w)]y_3 + [1 - \xi_4(w)]y_4 + z(w) = 5000\\
&\\
&x_j \geq \{0,1\}, j = 1, \ldots 4\\
&y_j \geq 0, \text{heltal}, \ j = 1, \ldots 4\\
&z(w) \geq 0, \text{heltal}
\end{aligned}
$$

Med en lämplig diskretisering av utfallsrummet W kan detta sedan konverteras till ett vanligt heltalsproblem, där olika utfall ges olika sannolikheter.

5.1.8 Inför

$$
z_i = \begin{cases} 1 \text{ om balk } i \text{ utnyttjas} \\ 0 \text{ annars} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, M
$$

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ om längd } l_j \text{ läggs in på balk } i & i = 1, 2, \ldots, M \\ 0 \text{ annars} & j = 1, 2, \ldots, N \end{cases}
$$

$y_i =$ spillet från balk i $\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, M$

Vi får följande problem:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{M} y_i \\
\text{då} & \left\{ \begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = 1 & j = 1, 2, \ldots, N \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_{ij} l_j + y_i = z_i L_i & i = 1, 2, \ldots, M \\
x_{ij},\ z_i \in \{0, 1\},\ y_i \geq 0 &
\end{array} \right.
\end{array}
$$

5.1.9 Variabeldefinition:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{om låt } j \text{ från skiva } i \text{ hamnar på CD nr } k \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Givna konstanter:

$a_{ij} =$ speltid i sek för låt j på skiva i

$c_{ij} =$ poäng för låt j på skiva i

$$
\begin{array}{lll}
\max z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{2} c_{ij} x_{ijk} & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{2} x_{ijk} \geq 2 & i = 1, \ldots, 6 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{10} a_{ij} x_{ijk} \leq 3600 & k = 1, 2 \\
& x_{ij1} + x_{ij2} \leq 1 & i = 1, \ldots, 6,\ j = 1, \ldots, 10 \\
& x_{ijk} \in \{0, 1\} & \forall\ i, j, k
\end{array}
$$

5.1.10 Variabeldefinition:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{om spelare } j \text{ startar} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\max z = \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 \\
\text{då} \quad & \sum_{j=1}^{7} x_j = 5 \\
& x_1 + x_3 + x_5 + x_7 \geq 3 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 2 \\
& x_2 + x_4 + x_6 \geq 1 \\
& \sum_{j=1}^{7} p_j x_j \geq 10 \\
& \sum_{j=1}^{7} s_j x_j \geq 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{7} r_j x_j \geq 10 \\
& x_3 + x_6 \leq 1 \\
& x_2 + x_3 = 1 \\
& x_4 + x_5 \geq 2x_1 \\
& x_j \in \{0, 1\}, \ \forall \ j
\end{aligned}$$

5.1.11 Variabeldefinition:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{om brandstation } j \text{ är kvar} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\min z = \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \\
\\
\text{då} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1 + x_2 + x_5 \geq 1 \\
& x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\
& x_2 + x_4 + x_5 \geq 1 \\
& x_3 + x_4 \geq 1 \\
\\
& x_j \in \{0, 1\}, \ \forall j
\end{aligned}$$

5.1.12 Variabeldefinition:

$x_j =$ antal inköpta plankor av längd j meter, $j = 1, 2, 4$

$$x_5 = \begin{cases} 1 & \text{om 5-meters paketet köps} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{om vi får rabatt för 1-meters plankorna} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$y_2 =$ dito 2-meters

$y_4 =$ antal “gratisbrädor” av längd 4 m

$$
\begin{aligned}
\min z = \quad & 36x_1 + 70x_2 + 145x_4 + 15 * 170x_5 - 50y_1 - 50y_2 \\[1em]
\text{då} \quad & x_1 + 2x_2 + 4(x_4 + y_4) + 5 * 15x_5 \geq 90 \\
& 15y_1 \leq x_1 \\
& 15y_2 \leq x_2 \\
& 10y_4 \leq x_4 \\
& x_4 \leq \mathrm{M}(1 - x_5) \\
& x_1, x_2, x_4, y_4 \geq 0, \text{heltal} \\
& y_1, y_2, x_5 = 0/1
\end{aligned}
$$

5.1.13 Variabeldefinition:
$x_{ij} =$ starttid för jobb i på maskin j

$$
y_{ikj} = \begin{cases} 1 & \text{om jobb } i \text{ körs efter jobb } k \text{ på maskin } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}
$$

$$
\min z
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{då} & z \geq x_{i3} & i = 1,2,3 \\
& \left.\begin{array}{l} x_{ij} + t_{ij} \leq x_{kj} + \mathrm{M}y_{ikj} \\ x_{kj} + t_{kj} \leq x_{ij} + \mathrm{M}(1 - y_{ikj}) \end{array}\right\} & \begin{array}{l} j = 1,2,3 \\ i,k = 1,2,3, \; i \neq k \end{array} \\
& x_{ij} + t_{ij} \leq x_{i(j+1)} & i = 1,2,3, \; j = 1,2 \\
& x_{ij} \geq 0 & i = 1,2,3, \; j = 1,2 \\
& 0 \leq y_{ikj} \leq 1, \text{heltal} & i,k = 1,2,3, \; i \neq k, \; j = 1,2
\end{array}
$$

5.1.14 Variabeldefinition:

$$
\begin{aligned}
x_j &= \text{antal möbler som köps in av typ } j \; (j = \text{antal sittplatser}) \\
y_1 &= \begin{cases} 1 & \text{om fler än 15 fåtöljer köps} \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \\
y_2 &= \begin{cases} 1 & \text{om fler än 25 fåtöljer köps} \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \\
y_3 &= \begin{cases} 1 & \text{om Linus köper 3-sitssoffor} \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \\
y_4 &= \begin{cases} 1 & \text{om Linus köper 4-sitssoffor} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{\min z = 3.5x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 - 10y_1} \\
\text{då} & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & +5y_2 & \geq & 50 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & x_4 & +5y_2 & \geq & 25 \\
& & & & & x_1 & \geq & 10 \\
& & & & & x_3 & \leq & y_3 \\
& & & & & x_4 & \leq & y_4 \\
& & & & y_3 & +y_4 & \leq & 1 \\
& & & & & x_1 & \geq & 15y_1 \\
& & & & & x_1 & \geq & 25y_2 \\
& & & & & x_j & \geq & 0, \; \text{heltal} \\
& & & & & y_j & \in & \{0, \; 1\}
\end{array}
$$

5.1.15 Givna storheter:

d_{ij} = Transportkostnad ($/m^3$ snö) från sektor i till avstjälpningsplats j
v_i = årlig volym av snö i sektor i (m^3/år)
V_j = årlig kapacitet hos avstjälpningsplats j (m^3/år)
f_j = årlig kostnad för att hålla avstjälpningsplats j öppen

Variabler:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om snön från sektor } i \text{ körs till avstjälpningsplats } j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{om avstjälpningsplats } j \text{ används} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} \min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}v_i x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j & & \\ \text{då} & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq V_j & & \forall\, j \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & & \forall\, i \\ & x_{ij} \leq y_j & & \forall\, i,\ j \\ & x_{ij}, y_j \in \{0,1\} & & \forall\, i,\ j \end{array}$$

5.1.16 Låt A,B,C samt dummyn D, och 1,2,3 samt 4 (beredskap) vara noder i ett transportproblem. Optimallösning $x_{A1} = 400$, $x_{A2} = 200$, $x_{B2} = 200$, $x_{B3} = 100$, $x_{B4} = 100$, $x_{C3} = 200$, $x_{D3} = 300$.

5.1.17 Endast påstående (iii) är sant.

5.1.18 -

5.2 Branch and bound

5.2.1 $x_1^* = 0, x_2^* = 2, x_3^* = x_4^* = 1, z^* = 15$

5.2.2

a) Om n är jämn: De $n/2$ st bästa"variablerna = 1, övriga = 0.
Om n är udda: De $(n-1)/2$ st bästa"variablerna = 1, övriga = 0.

b) I trädsökningsmetoder får vi förgrena över samtliga variabler innan något "händer". Förfarandet kan bli värre än fullständig uppräkning. Prova själv på ett litet exempel!

5.2.3

a) $x_1^* = 3, x_2^* = 1, z^* = 23$

b) $2x_1 + 3x_2 \leq 12$, $2x_1 + x_2 \leq 7$
$x_1 \geq 0$, $x_1 \leq 3$, $x_2 \geq 0$

c) $x_1 \leq \min\{\left[\frac{12}{2}\right], \left[\frac{7}{2}\right]\} = 3$
$x_2 \leq \min\{\left[\frac{12}{3}\right], \left[\frac{7}{1}\right]\} = 4$

Sätt $x_1 = y_1 + 2y_2, \quad y_1, y_2 \in \{0, 1\}$
$x_2 = y_3 + 2y_4 + 4y_5, \quad y_3, y_4, y_5 \in \{0, 1\}$

5.2.4

a) $z_1 \leq z_2$, $z_1 \leq z_3$, $z_1 \leq z_4$, $z_3 \leq z_4$

b) $w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq w_4 \geq w_5$

c) $w_3 \leq z_4$ om vi kapar grenen eftersom den optimistiska uppskattningen var sämre än bästa tillåtna lösning (pessimistisk uppskattning)

$z_4 = w_4 < w_3$, om vi hittar en bättre heltalslösning i nod 4.

5.2.5

a) Fel 1: $z(4) > z(5)$ Efter en förgrening kan en undre gräns ej minska i minproblem. Fel 2: $z(9) > z(3) = 65 \Rightarrow$ Nod 9 borde kapas.

b) i) Ja, denna LP-lösning kan inte ligga i konvexa höljet av heltalslösningarna.

ii) Nej, LP-lösningen kan vara heltalig (dock ej optimal). I så fall ligger den i konvexa höljet. Men den kan också vara utanför höljet.

5.2.6

a) x^* är ett lokalt minimum $\Leftrightarrow$ $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in B(x^*)$, där $B(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x - x^*\| \leq \epsilon\}$ för ett tillräckligt litet $\epsilon > 0$.

x^* är ett lokalt minimum $\Rightarrow \nabla f(x^*) = \mathbf{0}^n$.

b) x^* är ett lokalt minimum $\Leftrightarrow f(x^*) \leq f(x), \forall x \in B(x^*) n S$.

x^* är ett lokalt minimum $\Rightarrow \exists \lambda_* \geq \mathbf{0}^m$ så att

- $\nabla f(x^*) = A^T \lambda_*$.
- $\lambda_*^T(Ax^* - b) = 0$
- $Ax^* \geq b$.

5.2.7 Lösning: $x_1 = x_4 = 1, x_2 = x_3 = x_5 = 0$.

5.2.8 facit saknas

5.2.9

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 2 + y_1\mathrm{M} \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 8 - y_2\mathrm{M} \\ y_1 + y_2 &= 1 \\ 0 \le y_i \le 1, &\quad \text{heltal},\ i = 1,2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & x_3 = 0y_3 + 5y_4 + 9y_5 + 12y_6 \\ & y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1 \\ & 0 \le y_i \le 1, \text{heltal},\ i = 3,4,5,6 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_4 + x_5 &\le 2 + y_7\mathrm{M} \\ x_4 &\le 1 + y_8\mathrm{M} \\ x_5 &\le 5 + y_9\mathrm{M} \\ x_4 + x_5 &\ge 3 - y_{10}\mathrm{M} \\ y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} &\le 2 \\ 0 \le y_i \le 1, &\quad \text{heltal},\ i = 7,8,9,10 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_6 &\le 4 \Rightarrow y_{11} = 0 \Rightarrow x_7 \ge 6 \\ x_6 &\ge 5 \Rightarrow y_{11} = 1 \Rightarrow x_7 \le 3 \\ x_6 &\le 4 + y_{11}\mathrm{M} \\ x_6 &\ge 5 - \mathrm{M}(1 - y_{11}) \\ x_7 &\ge 6 - y_{11}\mathrm{M} \\ x_7 &\le 3 + \mathrm{M}(1 - y_{11}) \\ & 0 \le y_{11} \le 1, \text{heltal} \end{aligned}$$

5.2.10 $x^* = (1\ 0\ 1\ 1)^T$

5.2.11 $x^* = (1\ 0\ 1\ 0)^T$, $z^* = 12$

5.2.12

a) -

b) -

c) -

d) -

5.2.13 $x^*_{HP} = (2,2)^T$, $z^*_{HP} = 12$.

5.2.14

a) $x^* = (3,1)^T,\ z^* = 39$

b) Man måste känna till $(0,0)^T,\ (3,0)^T,\ (3,1)^T,\ (0,4)^T$ för att beskriva konvexa höljet matematiskt.

$$K = \{x \mid x = \lambda_1(0,0)^T + \lambda_2(3,0)^T + \lambda_3(3,1)^T + \lambda_4(0,4)^T,$$
$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \ge 0,\ \forall\ i\}$$

c) $2x_1 + 3x_2 \le 12 + M(1-y)$
$2x_1 + x_2 \le 7 + My$
$x_1,\ x_2 \ge 0$, heltal, $y = 0/1$
M stort tal

5.2.15 Variabeldefinition:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{om investering görs i projekt j} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & z = 7x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_4 & & \\ \text{då} & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 & \leq & 6 \\ & x_i & \in & \{0\ ,\ 1\} \end{array}$$

Lösning $x^* = (0,0,1,1)^T$ $z^* = 9$

5.3 Övrigt

5.3.1 -

5.3.2 -

5.3.3 -

5.4 Snittmetoder

5.4.1

a) Heltalssnitt: rad (1): $2x_1 + x_2 \geq 4$, rad (2) $x_1 + x_2 \geq 3$

b) De två snitten från a) samt icke-negativitet bildar det konvexa höljet.

c) Nej, ty snittet skär bort den tillåtna heltalslösningen $(2,1)^T$.

5.4.2

a) Tillåtna heltalspunkter: $(2,0)^T$, $(1,2)^T$, $(0,3)^T$, $(0.4)^T$. Konvexa höljet defineras av $x_1 \geq 0$, $2x_1 + x_2 \leq 4$, $3x_1 + 2x_2 \geq 6$.

b) Heltalssnitt: $2x_1 + x_2 \geq 3$ (z-raden), $4x_1 + 3x_2 \geq 8$ (x_2-raden). Inget snitt är en fasett.

c) -

5.4.3 -

6 Repetition

6.1 Repetition

6.1.1

a) Sant. Bevistekniken (motsägelsetype) visar väsentligen att Q måste vara positivt semidefinit på det tillåtna underrummet för att ett lokalt minimum ska kunna finnas. Så i praktiken har vi därför ett konvext problem, under denna förutsättning.

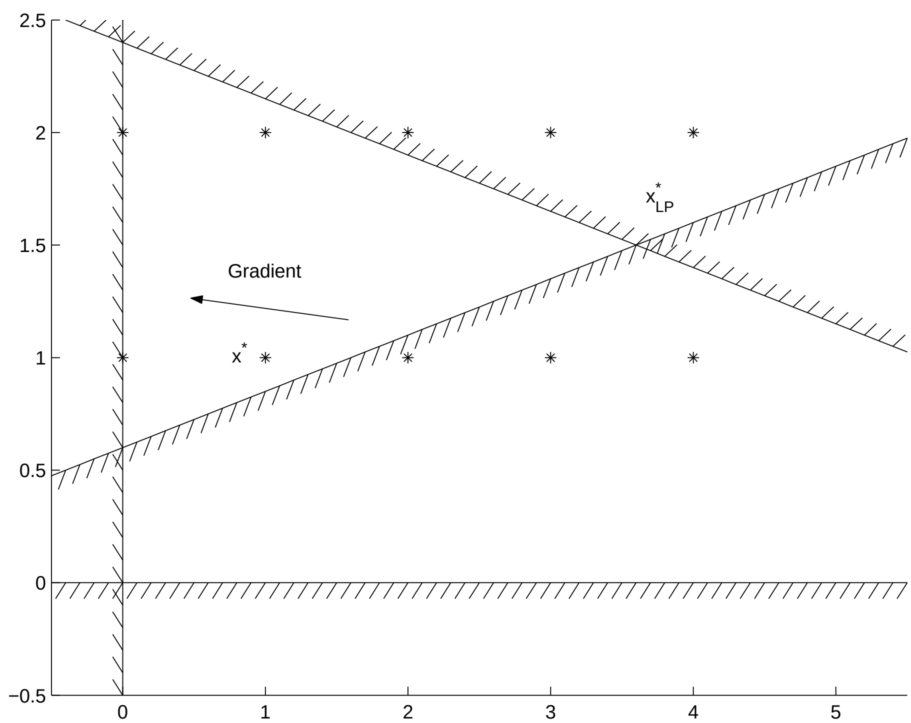
b) Falskt. Motexempel: $f(x) = x^3; x = 0; d = -1$.

c) Falskt.

6.1.2

a) False, because there are LP problems that lack feasible solutions or finite optimal solutions.

b) False, by counter-example: no rounding (upwards or downwards) is even feasible; not even the nearest feasible solution is optimal! (See Figure 21.)

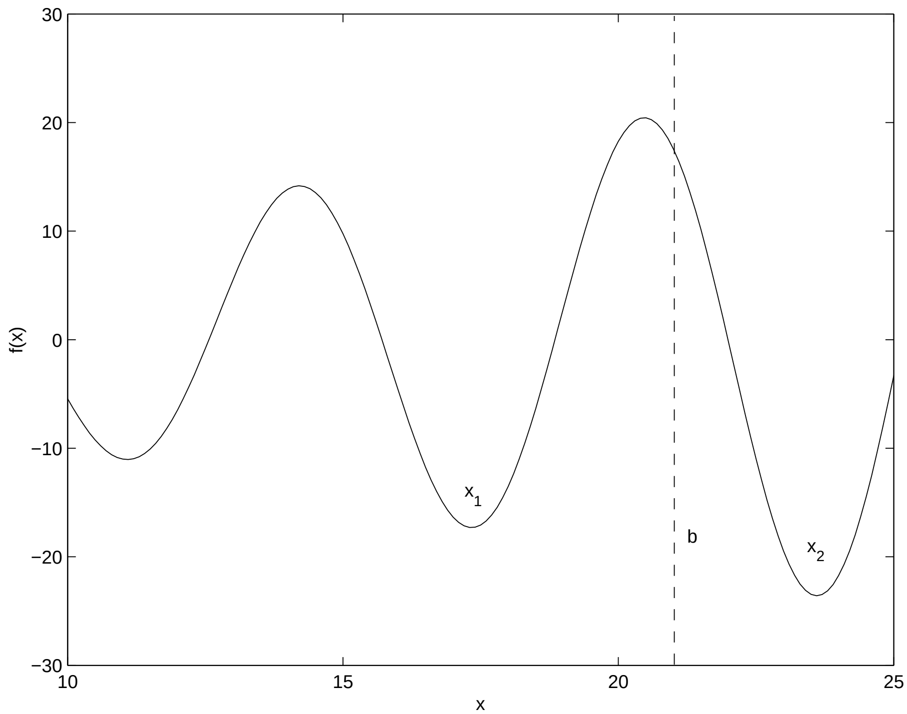


Figur 21: Image for exercise 6.1.2

c) False, unless f is convex:

In Figure 22, x_1 is a global minimum, where $g(x_1) = x_1 < b$. But if the constraint is removed, then x_2 is a global minimum and $f(x_2) < f(x_1)$, so the constraint is not redundant.

6.1.3



Figur 22: Image for exercise 6.1.2

a) Falskt

b) Sant

c) Sant

d) Sant

e) Sant

f) Falskt

6.1.4 Some hints to the answers are given below. Thiese are not complete answers.

a) $f(x)$ is strictly convex, $g_i(x)$ are strictly concave (other possibilities exist).

b) Advantage:Quick. Disadvantage: First and second derivatives are required.

c) If a problem is convex, we know that every local optimum is a global optimum.

d) $\min \sum_{i=1}^{m}(a_i(x))^2$ (Other possibilities exist).

e) At least one basic variable has the value 0.

f) No leaving variable is found (Same as $B^{-1}A_{ink} <= 0$.

g) The dual problem has no feasible solution.

h) The point which has the lowest function value in a small neighbourhood. $\exists \epsilon . f(\bar{x}) \leq f(x) \forall ||x - \bar{x}|| < \epsilon$

i) That a basis is re-visited during the course of the simplex algorithm. In order for this to occur, the problem must be degenerate.

j) -

k) -

l) No, not generally. Yes if the function is convex, everywhere everywhere and the line-searches are exact.

6.1.5 a) False, b) True, c) True, d) True, e) True, f) True, g) False, h) True, i) True, j) False, k) True, l) True, m) False, n) True, o) False, p) False, q) True, r) False, s) True, t) False, u) False

6.1.6 a) True, b) True, c) False, d) True, e) False, f) False, g) True, h) False, i) False, j) True, k) True, l) False, m) False