Lösningar till tentamen TMA946 010305

1 a) På matrisform med slackvariabler s_1, s_2 får vi

$$\begin{aligned} &\min z = c^T x \\ \text{då} \quad &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

med $c^T = [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 0], b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = [x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då ingen uppenbar bas finnes löser vi fas I med en artificiell variabel tillhörande bivilkor 1. Vi får problemet

$$\begin{aligned} &\max \hat{c}^T \hat{x} \\ &\text{då } \hat{A}\hat{x} = b, \hat{x} \geq 0 \\ &\text{med} \quad \hat{c}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \\ &\qquad \hat{A} = [A| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{x} = [x_1 \quad x_2 \quad s_1 \quad s_2 \quad 9] \end{aligned}$$

Vi har den uppenbara basen s_2, q.

Denna bas ger oss $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Med reducerad kostnad $\bar{\hat{c}}$ får vi

$\bar{\hat{c}} = \hat{c} - \hat{c}_B B^{-1} A$

$$= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-2 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

Inkommande blir x_1.

Vi beräknar $y = B^{-1} A^{x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ samt $\bar{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vi får utgånende som $\operatorname{argmin}_{i, y_i > 0} \dfrac{\bar{b}_i}{y_i} = 2$

Den andra basvariabeln (a) blir utgående. Vi har nu en tillåten bas x_1, s_2.

a är icke-basvar $\Rightarrow a = 0 \rightarrow$ vi är klara med fas I.

Åter till fas II.

Vår bas x_1, s_2 ger oss $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $c_B^T = [-1 \quad 0]$, $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Vi beräknar reducerad kostnad

$\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A =$

$$= [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 0] - [-1 \quad 0]\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 2.5 \quad -0.5 \quad 0]$$

Detta ger oss att s_1 blir inkommande, ty s_1 har störst negativ reducerad kostnad.

Vi beräknar $y = B^{-1}A^{s_1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\bar{b} = B^{-1}b = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

min ratio ger utgående $\operatorname{argmin}_{i, y_i > 0} \frac{\bar{b}_i}{y_i} = 2$ Vår andra basvariabel, s_2 blir utgående. Ny bas blir x_1, s_1.

Beräkna reducerad kostnad

$\left(B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)$

$$\bar{c} = c - c_B^T B^{-1} A = [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 0] - [-1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{c} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$. $\bar{c} \geq 0$, dvs basen är optimal.

Basvariablernas värde blir $\begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

Kontroll!

Insättning ger

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - s_1 &= 2 + 0 - 1 + 0 = 1 \quad \text{OK!} \\ x_1 - x_2 + s_2 &= 1 + 0 + 0 = 1 \quad \text{OK!} \\ z &= c_B^T B^{-1} b = -1 \end{aligned}$$

b) Beräkna reducerad kostnad (varning för förvirrande c!)

$$\bar{c} = c - c_B^T B^{-1} A = [c \quad 2 \quad 0 \quad 0] - [c \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{c} = [0, 2 + c, 0, -c]$

Vi ser att $\bar{c} \geq 0$ för $-2 \leq c \leq 0$.

Föregående bas är därför optimal för $-2 \leq c \leq 0$.

2 a) x lokalt minimum $\Rightarrow \nabla f(x) = \mathbf{0}^n$

c) Motiv: Antag $\nabla f(x) \neq \mathbf{0}^n$. Låt $p = -\nabla f(x)$. Då gäller att $p^T \nabla f(x) = -\|\nabla f(x)\|_2^2 < 0$, d.v.s. p är en descentriktning för f i x. Detta motsäger lokal optimalitet.

b) x lokalt minimum $\Rightarrow \nabla f(x) = \mathbf{o}^n$ och $\nabla^2 f(x)$ positivt semidefinit.

c) Motive: Antag $\nabla f(x) = \mathbf{0}^n$ och $\nabla^2 f(x)$ indefinit. Då existerar ett p så att $\nabla^2 f(x)p = \lambda p$, där λ är ett negativt egenvärde och p motsvègenvecktor. $p^T \nabla^2 f(x) p = \lambda p^T p = \lambda \|p\|_2^2 < 0$ fås. Ur Taylorutvecklingen av f i riktning p fås att $f(x + \ell p) \approx f(x) + \underbrace{\nabla f9x)^T p\ell}_{=0} + \frac{\varphi^2}{2} \underbrace{p^T \nabla^2 f(x) p}_{<0} + O(\ell^3)$ dvs, $f(x + \ell p) < f(x)$ för alla små $\ell > 0$. Alltså är p en descentiriktning.

3 a)

$$
\begin{aligned}
&\text{minimera } d^T x. \\
&\text{då} \quad Ax \geq b \\
&\qquad\;\; c^T x \leq c^T x^* \\
&\qquad\quad\;\; x \geq \mathbf{0}^n
\end{aligned}
$$

där x^* är en godtycklig optimalllösning till ursprungsproblemet.

b) x^* är en optimalllösning till LP-problemet om det finns en dual lösning $y^* \in \mathbb{R}^m$ så att

$$
\text{i)} \quad \left.\begin{aligned} Ax^* &\geq b \\ x^* &\geq \mathbf{0}^n \end{aligned}\right\} \quad \text{Primal tillåtenhet.}
$$

$$
\text{ii)} \quad \left.\begin{aligned} A^* y^* &\leq c \\ y^* &\geq \mathbf{0}^m \end{aligned}\right\} \quad \text{Dual tillåtenhet.}
$$

$$
\text{iii)} \quad \left.\begin{aligned} (y^*)^T (Ax^* - b) &= 0 \\ (x^*)^T (A^T y^* - c) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Komplementaritet.}
$$

Antag att (x^*, y^*) uppfyller i) - iii). Från i) - ii) fås *svag dualitet*:$b^T y^* \leq c^T x^*$. Från iii) fås att

$b^t y^* = (y^*)^T A x^* = c^t x^*$, d.v.s. stark dualitet. Då måste x^* lösa primalen och y^* lösa dualen, eftersom $b^T y = c^T x$ gäller för alla tillåtna par (x, y) [följdsats].

Antag att x^* är en optimallösning till vårt LP-problem. Speciellt är då i) sann. Angtag att x^* är en optimal extrempunkt. Till den finner då en motsvarande optimal baslösning $(x_B, x_N) \geq (0,0)$. Att denna är optimal innebär att $\bar{c}^T := c^T - c_B^T B^{-1} A \geq \mathbf{0}^T$. För x-variablerna fås särskilt, med $(y^*)^T = c_B^T B^{-1}$, att $\bar{c}_x^T = c_x^T - (y^*)^T A \geq \mathbf{0}^T$, d.v.s. $A^T y^* \leq c$. För slackvariablerna fås att $\bar{c}_s^T = \mathbf{0}^T - (y^*)^T I \geq 0^T$, d.v.s. $y^* \geq \mathbf{0}$. Alltså är $y^* := (c_B^T B^{-1})^T$ tillåten i dualen, så för (x^*, y^*) är också ii) uppfyllt. Återstår iii). Från svag dualitet: $b^T y^* \leq (y^*)^T A x^* = (x^*)^T A^T y^* \leq c^T x^*$. Vi har också $c^T x^* = c_B^T x_B = c_B^T B^{-1} b = b^T y^*$, dvs stark dualitet. Likhet ovan ger iii). Klart [Om x^* ej extrempunkt görs ovanstående för en konvexkombination av optimala extrempunkter.]

4. Vi Lagrangerelaxerar $x_1 + x_2 \geq 5 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 5 \geq 0$ och får $\alpha(x, \lambda) = 2x_1 + x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 5)$.

   Det duala problemet blir

$$\begin{aligned}\max_{\lambda \geq 0} \alpha_*(\lambda) &= \max_{\lambda \geq 0} \{ \min_{\substack{0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 4}} 2x_1 + x_2 - \lambda(x_1 + x_2 - 5)\} \\ &= \max_{\lambda \geq 0} \{5\lambda + \min_{0 \leq x_1 \leq 4} (2-\lambda)x_1 + \min_{0 \leq x_2 \leq 4} (1-\lambda)x_2\}.\end{aligned}$$

   För $\lambda = 0, 1, 2, 3$ får vi därför

$$\begin{aligned}\lambda = 0 &\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, \alpha_*(\lambda) = 0 \\ \lambda = 0 &\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = ?, \alpha_*(\lambda) = 5 \\ \lambda = 2 &\Rightarrow x_1 = ?, x_2 = 4, \alpha_\alpha(\lambda) = 6 \\ \lambda = 3 &\Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 4, \alpha_*(\lambda) = 3\end{aligned}$$

   $\lambda = 2$ ger bäst dual lösning.

   Om x^* är den primalt optimala punkten, så vet vi att $\alpha_*(2) \leq f(x^*)$, d.v.s. $t \leq f(x^*)$ för $\lambda = 2$ så ser vi att om vi väljer $x_1 = 1$ så får vi $\lambda g(x) = 0$, dvs komplementaritet.

   Prövar vi med $x = [1, 4]$ så får vi $x_1 + x_2 \geq 5, 0 \leq x_{1,2} \leq 4$ samt $f(x) = 6$.

   Då x tillåten vet vi att $f(x^*) \leq f(x) = 6$. Vi har därför en övre gräns på 6.

5. Vi definierar variabler:

   X_{mni} = Mängd varor av typ i som skickas fån central n till kund m,

   $Y_{nk} = 1$ om vi bygger en central av typ k på plats n, 0 annars.

   $Z_{mn} = 1$ om vi skickar en bil från n till m, 0 annars.

   U_{mi} = Mängd behov av vara i som ej tillfredställs hos kund m.

   $V_m = 1$ om kund m ej får vad de vill ha, 0 annars.

Vi får målfunktion:

$$\text{minimera} \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} X_{mni}q_{mni} \quad \text{(rörlig transportkostnad)}$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} Z_{mn}p_{mn} \quad \text{(kostnad för att skicka bilar)}$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} Y_{nk}d_{k} \quad \text{(kostnad för att bygga centraler)}$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{3} U_{mi}s_{i} \quad \text{(rörligt straff för att ej uppfylla behov)}$$

$$+\sum_{m=1}^{M} V_{m}t \quad \text{(fast straff för att ej uppfylla behov)}$$

Då

$$\sum_{m=1}^{M} x_{mni} \leq \sum_{k=1}^{K} Y_{nk}d_{ki}, \quad \forall n, i$$

(vi får ej skicka för mycket från våra centraler)

$$\sum_{k=1}^{K} Y_{n}k \leq 1 \quad \forall n$$

(max en central per plats)

$$X_{mni} \leq Z_{mn}b_{mi} \quad \forall m, n, i$$

(vi måste skicka en bil om vi skall transporterna något)

$$\sum_{n=1}^{N} X_{mni} + U_{mi} \geq b_{mi} \quad \forall m, i$$

(vi måste tillgodose kundens behov eller ta straffet.)

$$U_{mi} \leq b_{mi}V_{m} \quad \forall m, i$$

(om kunden ej får vad de vill ha måste vi betala det fasta straffet.)

6. Iteration 1: $x^0 = (0,0)^T$. $f(x^0) = 0$. $[LBD, UBD] = (-\infty, 0]$.
$\nabla f(x^0) = (-24, -20)$. Lös $\min_{y \in X} \nabla f(x^0)^T y = -24y_1 - 20y_2$. Optimum i $y^0_{LP} = (6,2)^T$. f är konvex, så $f(x^0) + \nabla f(x^0)^T (y^*_{LP} - x^0) = 0 + (-24,-20)(6,2) = -172 \leq f^*$. $[LBD, UBD] = [-172, 0]$. Sökriktning: $p^0 = y^0_{LP} - x^0 = (6,2)^T$.

Linjesökning: $\min_{\ell \in [0,1]} f(x^0 + \ell pp^0) = f \begin{bmatrix} 6\ell \\ 2\ell \end{bmatrix} = \ldots = 80\ell^2 - 184\ell = \varphi(\ell)$.
$\varphi'(\ell) = 160\ell - 184 = 0 \to \ell = 184/160 > 1 \Rightarrow$ Sätt $\ell_0 = 1$.
$x^1 = x^0 + \ell_o p^0 = (6,2)^T$.

Iteration 2: $f(x^1) = \varphi(1) = -104$. $[LBD, UBD] = [-172, -104]$.
$\nabla f(x^1) = (0, -12)^T$. Lös $\min_{y \in X} \nabla f(x^0)^T y = -12y_2$.
Optimum i $y^2_{LP} = /(\text{t.ex.})/ = (2,6)^T$.
$f(x^0) + \nabla f(x^1)^T (y^1_{LP} - x^1) = -104 + (0,-12)((2,6)^T - (6.2)) = -152$.
$[LBD, UBD] = [-152, 104]$. Sökriktning: $p^1 = y^T_{LP} - x^1 = (-4,4)^T$.
Linjesökning $\min_{\ell = [0,1]} f(x^1 + \ell p^1) = f((6 - 4\ell, 2 + 4\ell)^T) = \ldots =$
$64\ell^2 - 48\ell - 104 = \varphi(\ell)$. $\varphi'(\ell) = 128\ell - 48 = 0 \to \ell_1 = 3/8$.
$x^2 = x^1 + \ell_1 p^1 = (9/2, 7/2)^T$. $f(x^2) = -113$. $[LBD, UBD] = [-152, -113]$.

7 a) $T(f) = \sum_{a \in d} \int_0^{f_a} t_a(s) ds \to$

$\nabla T(f) = t(f)$, där t är vektorn och element t_a.

Eftersom t är monoton (t_a är strikt växande), så är integralen av t, dvs T, konvex.

b) Om (3b) insätts i ingegralen, dvs f_a elimineras, fås problemet att minimera

$$\sum_{a \in d} \int_0^{\sum_{r,r} \sum_r \delta_{ra} h_r} t_a(s) ds,$$

då $\sum_r h_r = d_{rq}, \forall Ip, q),$ | π_{pq} Lagr.mult.
$h_r \geq 0, \forall r, \forall (p,q)$ | γ_r

KKT:

1. Dual tillåatenhet: $\nabla_h L(h, \bar{n}, \gamma) = 0, \gamma \geq 0$
2. Komplementaritet: $h_r \cdot \gamma_r = 0 \quad \forall r$
3. Primal tillåtenhet: $h_r \geq 0, \Sigma h_r = d_{pq} \quad \forall c(p,q)$

$$L(h, \pi, \gamma) = \sum_{a \notin A} \int_0^{\sum_{(p,q)} \sum_r \delta_{ra} h_r} t_a(s) dr - \sum_{(r+q)} \pi_{pq} (\sum_r h_r - d_{pq}) - \sum_{(p,q)} \sum_r \gamma_r h_r$$

$\underline{\gamma_r = c_r(h) - \bar{n}_{pq}}$. $\because \gamma_r \geq 0 \Leftrightarrow \underline{c_r(h) \geq \pi_{pq} \forall (p,q)}$ (nr.1)

nr 2: $\underline{h_r \cdot (c_r(h) - \pi_{pq}) = 0}, \forall (p,q)$. Detta är precis Wardges villkor (2a)-(2b) i tesen, och 3 motsvaras av kravet (1) i tesen.