Lösningsförslag tentament TMA945
Tillämpad optimeringslära 980309

1 a) Variabler:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{om maskin } j \text{ används} \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \quad j = 1, \ldots, k$$

y_j= antal enheter som tillverkas i maskin $j, j = 1, \ldots, 4$.

Modell:

minimera $f(x, y) = 400x_1 + 1000x_2 + 600y_3 + 300y_4 + 4y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 5y_4$

då

$$\begin{aligned}
&y_1 \leq 2000x_1 \\
&y_2 \leq 4000x_2 \\
&y_3 \leq 1000x_3 \\
&y_4 \leq 3000x_4 \\
\\
&0.9y_1 + 0.95y_2 + 0.85y_3 + 0.92y_4 \geq 5000 \\
&x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, 4 \\
&y_j \geq 0, \text{ heltal}, j - 1, \ldots, 4
\end{aligned}$$

b) (Ett exempel) Vi kan tänka oss att när vi observerar utfallet i andelen defekta enheter producerar vi några extra enheter i samma maskin, alternativt köps det resterande behovet in utifrån. Det senare alternativet kan modelleras sålunda:

Låt ξ_j vara sannolikheten för defekt produkt i maskin j, och inför en ny variabel, z, som anger det ytterligare antalet enheter som behöver köpas in. Vi antar att varje variabel ξ_j är oberoende och att vektorn ξ tillhör någon mängd W av möjliga utfall w. Vi skriver $\xi_j = \xi_j(w)$. Vi antar att varje enhet som måste köpas in kostar q kronor. Eftersom också z är en stokastisk variabel är den extra kostnaden $q(w) \cdot z(w)$. Följande modell uppfyller efterfrågan med sannolikhet 1, till lägsta förväntade kostnad.

Minimera $f(x, y, z) = 400x_1 + 1000x_2 + 600x_3 + 300x_4 + 4y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 5y_4 + E_\xi[q(w)z(w)]$

då

$y_1 \leq 2000x_1$
$y_2 \leq 4000x_2$
$y_3 \leq 1000x_3$
$y_4 \leq 3000x_1$
$[1-\xi_1(w)]y_1 + [1-\xi_2(w)]y_2 + [1-\xi_3(w)]y_3 + [1-\xi_4(w)]y_4 + z(w) = 5000$

$x_j \geq \{0, 1\}, j = 1, \ldots 4$
$y_j \geq 0, \text{heltal}, \ j = 1, \ldots 4$
$z(w) \geq 0, \text{heltal}$

Med en lämplig diskretisering av utfallsrummet W kan detta sedan konverteras till ett vanligt heltalsproblem, där olika utfall ges olika sannolikheter.

2a) Se sats 6.1, sid. 150 i Nash & Sofer.

b) Se sektion 5.3.4 i Nash & Sofer.

c) ($\Rightarrow$) trivialt
($\Leftarrow$) Antag att det finns en lösning till olikhetssystemet som uppfyller $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i$, för något i. Adderas olikheterna till varandra fås då att $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} < \sum_{i=1}^{m} b_i$, vilket är en motsägelse.

---

3. $f(x) := 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$ har Hessian-matris $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, som är negativt definit. Eftersom f därmed är (strikt) konvex, och det tillåtna området, $S = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 + 2x_2 \leq 2; x_1, x_2 \geq 0]$ är en polyeder (en konvex mängd), gäller olikheten

$$f(x) \leq f(y) + \nabla f(y)^T (x - y) \quad \forall x, y \in S,$$

som används för uppskattningar av det optimala målfunktionsvärdet i Frank-Wolfe metoden.

Iteration 1: $x_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 4 - 4x_1 - 2x_2 \\ 6 - 2x_1 - 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $f(x_0) = 31/2$.

Lös

$$\begin{aligned} \max z_1(y) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (y - x_0) &= 31/2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right] \\ &= 3/2 + y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; z_1(y) = 41/2.$

$\because$ Optimala målfunktionsvärdet tillhör intervallet $[3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}]$.

$$\begin{aligned}
&p_1 = y_1 - x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \\
&f(x_6 + \ell p_1) = f\Big(\frac{1-\ell}{2}, \frac{1+\ell}{2}\Big) = 31/2 + \ell - \frac{\ell^2}{2} = \varphi(\ell) \\
&\ell'(\ell) = 1 - \ell = 0 \Rightarrow \ell 1. \quad x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Iteration 2: $f(x_1) = 4 \because f(x_*) \in [4, 41/2]$.
$\nabla f(x_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Lös

$$\begin{aligned}
\max_{b \in S} z_2(y) &= f(x_1) + \nabla f(x_1)^T (y - x_1) = 4 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 - 0 \\ y_2 - 1 \end{bmatrix} \\
&= 2 + 2y_1 + 2y_2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; z_2(y) = 6$

$p_2 = y_2 - x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$f(x_1 + \ell_{1/2}) = f(2\ell, 1 - \ell) = 4 + 2\ell - 6\ell^2 = \varphi(\ell)$

$\varphi'(\ell) = 2 - 12\ell = 0 \Rightarrow \ell = 1/6 \quad x_2 = (1/3, 5/6)^T.$

Iteration 3: $f(x_2) = 41/6 \quad \because f(x_k) \in [41/6, 41/2]$.
$\nabla f(x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Lös

$$\begin{aligned}
&\max_{y \in S} z_3(y) = f(x_2) + \nabla f(x_2)^T (y - x_2) = 21/6 + y_1 + 2y_2 \\
&\to y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; z_3(y) = 41/6. \because f(x_2) = 41/6
\end{aligned}$$

Optimum: $x_* - (1/3, 5/6)^T; f(x_*) = 41/6$.

---

4. Fas I: Inför slackvariabler $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ och artificiella variabler $q_1, a_2 \geq 0$.

   Minimera $w = a_1 + a_2$.
   Startbas: s_1, a_1, a_2; $\quad w = 7$
   Basbyte: s_1, a_1, x_1 : $\quad w = 5/2$
   Basbyte: s_1, x_2, x_3; $\quad w = 0$. Red kostn. ≥ 0.

   Byte till fas II: maximera $z = x_1 - 3x_2$
   Startbas: s_1, x_2, x_1; $\quad z = -1$
   Basbyte: s_3, x_2, x_1; $\quad z = 0$ Red kostn. ≤ 0.

   $x_* = (3, 1)^T$; $z_* = 0$.

5a) $\min w = 500y_1 + 460y_2 + 420y_3$

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\text{då} & y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & \geq 3 \\
 & 2y_1 & & & + & 4y_3 & \geq 2 \\
 & y_2 & + & 2y_2 & & & \geq 5 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

T.ex.

$$
\begin{aligned}
y &= (5, 0, 0)^T \rightarrow w = 2500 \\
y &= (3, 1, 0)^T \rightarrow w = 1960 \\
y &= (0, 5/2, 1/2)^T \rightarrow w = 1360
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= (460/3, 0, 0) \rightarrow z = 460 \\
x &= (0, 0, 230) \rightarrow z = 1150 \\
x &= (0, 105, 230) \rightarrow z = 1360
\end{aligned}
$$

b) $^* = (0, 5/2, 1.2)$.

I. (Dual tillåtenhet)

$$
\begin{array}{rl}
y_1^* + 3y_2^* + y_3^* &= 8 > 3 \\
2y_1^* + \quad\quad + 4y_3^* &= 2 \\
y_1^* + 2y_2^* \quad\quad &= 5 \\
y^* \geq 0. & \text{OK}
\end{array}
$$

II. (Komplementaritet)

$$
\begin{array}{l}
x_1^*(y_1^* + 3y_2^* + \ \ y_3^* - 3) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0 \\
x_2^*(2y_1^* \qquad\quad + 4y_3^* - 2) = 0 \rightarrow -- \\
x_3^*(\ y_1^* + 2y_2^* \qquad\quad - 5) = 0 \rightarrow -- \\
y_1^*(\ x_3^* + 2x_2^* - \ \ x_3^* - 500) = 0 \Rightarrow -- \\
y_2^*(3x_1^* \qquad\quad + 2x_3^* - 460) = 0 \rightarrow x_3^* = 230 \\
y_3^*(\ x_2^* + 4x_2^* \qquad\quad - 420) = 0 \rightarrow x_2^* = 105. \quad \text{OK}
\end{array}
$$

III. (Primal tillåtenhet)

$$
\begin{array}{l}
x_1^* + 2x_2^* + x_3^* = 440 \leq 500 \quad \text{OK} \\
\qquad\qquad x^* \geq 0. \quad \text{Klart}
\end{array}
$$

6 a) For differentierbara funktioner f och konvexa mängder x gäller följande.

x_* lokalt min till f på $x \Rightarrow \nabla f(x_*)^T(x - x_*) \geq 0 \quad \forall x \in X.$

Låt $x_{*j} > 0$, och välj godtyckligt $j \neq i$. Bilda den tillåtna lösningen

$$x = \begin{cases} 0 & \text{for index } i \\ x_j^* + x_i^* & \text{for index } j \\ x_k^* & \text{for övriga index } k \end{cases}$$

Från ovanstående fås då att $[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}]x_i^* \geq 0$, d.v.s.

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \leq \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}.$$

b) Vi noterar att (1) funktionsberäkningar är dyra, att (2) otillåtenhet är acceptabelt. En möjlig metod är att välja en tillräckligt stor straffparameter för bivilloren och på det obegränsade. Straffade problemet, använda en Newton-likhande descentmetod, där (1) derivator beräknas numeriskt m.h.adifferenskvoter, och (2) "Hessianen" justeras så att den är positivt definit.

---

7 a) KKT-villkoren:

$$\nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla t_i(x) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$$

$$g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m$$

Dessa är nödvändiga fär lokalt optimum om t.e.xdet existerar en inre punkt (ett x med $g_i(x) > 0, \forall i$).

De är tillräckliga för globalt optimum om f är konvex och $g_i, i = 1, \ldots, m$, är konkava, d.v.s. problemet är konvext.

Bevis: Låt (x^*, λ^*) uppfylla KKT-villkoren, och välj en godtycklig tillåten lösning, x. Då följer:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*) && (f \text{ konvex}) \\
& f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla t_i(x)^*)^T(x - x^*) && (\text{KKT } 1) \\
&\geq f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* [g_i(x) - g_i(x^*)] && \begin{pmatrix} g_i & \text{konkava} \\ & \lambda^* \geq 0 \end{pmatrix} \\
&= f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x) && (\lambda^* \geq 0, x \text{ tillåten}) \\
&\geq f(x^*). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

b) Den logaritmiska barriärfunktioen är

$$f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \log(g_i(x)), \mu > 0.$$

Låt x^1, x^2 vara sådana att $g_i(x^1) > 0, g_i(x^*) > 0, \forall i$. Välj $\lambda \in [0, 1]$.

g_i konkav $\Rightarrow g_i(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \lambda g_i(x^1) + (1 - \lambda)g_i(x^2)$

Låt $\phi_i(s) = -\log(s)$.

ϕ_i är avtagande $\Rightarrow$ $\phi_i[g_i(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2]$
$$\leq$$
$$\phi_i[\lambda g_i(x^1) + (1 - \lambda)g_i(x^2)].$$

ϕ_i är strikt konvex $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\phi_i[\lambda g_i(x^1) + (1 - \lambda)g_i(x^2)] < \\
&\lambda \phi_i(g_i(x^1)) + (1 - \lambda)\phi_i(g_i(x^2)), \quad \lambda \in (0, 1), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad g_i(x^1) + g_i(x^2)
\end{aligned}
$$

Anledningen att konvexiteten hos barriärfunktionen är av intresse är att den ska minimeras för olika värden på μ: dess stationaritet är tillräcklig för globalt min för funktionen, och stationaritet är vad standardmetoder garanterar.