Lösningsförslag tentamen TMA945
Tillämpad optimeringslära 990308

1 a) Modell: sök ett maximal flöde mellan nod s och nod t:

max f

då $\Sigma_i x_{si} = f$,

$\Sigma_j x_{ij} - x_{si} = 0, i = 1, \ldots, 7,$

$x_{jt} - \Sigma_i x_{ij} = 0, j = 1, \ldots, 5$

$-\Sigma_j x_{jt} = -f$

$0 \leq x_{si} = 3, i = 1, \ldots, 7; 0 \leq x_{ij} \leq 1, i = 1, \ldots, 7, j = 1, \ldots, 5; 0 \leq x_{\cdot t} \leq (6, 4, 5, 4, 3)$

b) Bågar motsvarande 'x' i tabellen (variabler x_{ij}) stryks.

2 a) Efter tillägg av en slackvariabel s_1) fås:

$\min z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$

då $2x_1 \quad + x_3 - s_1 = 3$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 5$

$x_1, \ x_2, \ \ x_3, s_1 \geq 0$

för att identifiera en tillåten baslösning, löses först Fas-1 problemet att minimera $w = a_1 + a_2 =$
$(3 - 2x_1 - x_3 + s_1) + (5 - 2x_1 - 2x_2 - x_3) = 8 - 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 5_1.$

bas	w	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	a_2	$\bar{b}$	
$-w$	1	-4	-2	-2	1	0	0	-8	x_1 ink. a_1 utg.
a_1	0	$\boxed{2}$	0	1	-1	1	0	3	
a_2	0	2	2	1	0	0	1	5	
$-w$	1	0	-2	0	-1	2	0	-2	x_2 ink, a_2 utg.
x_1	0	1	0	$1/2$	$-1/2$ $1/2$	0	$3/2$		
a_2	0	0	$\boxed{2}$	0	1	-1	1	2	
$-w$	1	0	0	0	0	1	1	0	$\bar{c}_j \geq 0 \forall j$, optimum
x_1	0	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	0	$3/2$	$w_* = 0 \Rightarrow$ tillåten bas
x_2	0	0	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	1	funnen.

Inför

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \cdot (3/2 - 1/2x_3 + 1/2s_1) + 2 \cdot (1 - 1/2s_1) + x_3 \\ &= 13/2 - 1/2x_3 + 1/2s_1 \end{aligned}$$

uttryckt i icke-basvariabler och genomför Fas-2.

bas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	$\bar{b}$	
$-z$	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	$-13/2$	x_2 ink. x_1 utg.
x_1	0	1	0	$\boxed{1/2}$	$-1/2$	$3/2$	
x_2	0	0	1	0	$1/2$	1	
$-z$	1	1	0	0	0	-5	$\bar{c}_j \geq 0, \forall j$, optimum
x_3	0	2	0	1	-1	3	
x_2	0	0	1	0	$1/2$	1	

$x_* = (0, 1, 3)^T, z_* = 5$

bas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	$\bar{b}$	
$-z$	1	1	0	0	0	-5	s_1 ink, x_2 utg.
x_3	0	2	0	1	-1	3	
x_2	0	0	1	0	$\boxed{1/2}$	1	
$-z$	1	1	0	0	0	-5	$\bar{c}_j \geq 0, \forall j$, optimum
x_3	0	2	2	1	0	5	
s_1	0	0	2	0	1	2	

En alternativ optimal extrempunkt är

$$x_* = (0,0,5)^T, z_* = 5.$$

<u>Samtliga</u> optimallösningar ges av mängden.

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 / \bar{x} = \lambda(0,1,3)^T + (1-\lambda)(0,0,5)^T \text{ för något } \lambda \in [0,1]\}.$$

3 a) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - 2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2)^2.$

b) Se kurslitteraturen. Låt $x_0 = (0,0)^T$.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2 - 1) + (x_1 - x_2 - 2) + (x_1 - 2x_2) \\ (x_1 + x_2 - 1) - (x_1 - x_2 - 2) - 2(x_1 - 2x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 - 3 \\ -2x_1 + 6x_2 + 1 \end{bmatrix}.$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \text{ positivt definit} \Rightarrow f \text{ är strikt konvex.}$$

$$p_0 = -\nabla^2 f(x_0)^{-1} \nabla f(x_0) = -\frac{1}{12-4} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

f kvadratisk $\Rightarrow$ optimalt steg i riktning p_0 ges av

$$\alpha_0 = -\frac{\nabla f(x_0)^T p_0}{p_0^T \nabla^2 f(x_0) p_0} = \frac{\nabla f(x_0)^T \nabla^2 (x_0)^{-1} \nabla f(x_0)}{[\nabla^2 f(x_0)^{-1} \nabla f(x_0)]^T \nabla^2 f(x_0) [\nabla^2 f(x_0)^{-1} \nabla f(x_0)]} = 1.$$

$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix}$. I x_1 är $\nabla f(x_1) = (0,0)^T$. Eftersom f är konvex är $x_* = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix}$ den optimala lösningen.

c) Se kurslitteraturen. Låt $x_0 = (0,0)^T.p_0 = -\nabla f(x_0) = (3,-1)^T$.

$$\alpha_0 = -\frac{\nabla f(x_0)^T p_0}{p_0^T \nabla^2 f(x_0) p_0} = \frac{1)}{(3,-1)(11,-12)^T} = 2/9 \quad x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0 = \frac{2}{9}(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = -\nabla f(x_1) = \frac{5}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_1 = -\frac{\nabla f(x_1)^T p_1}{p_1^T \nabla^2 f(x_1) p_1} p_1^T \nabla^2 f(x_1) p_1 = \frac{10}{(1,3)(-3,16)} = 2/9$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 p_1 = \frac{4}{81}\begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. $(P) \min f(x) := \sum_{j=1}^n c_j x_j$

då $g_0(x) := \sum_{j=1}^n x_j^2 - 1 \leq 0$

$g_j(x) := x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$

a) f är linjär och alltså konvex; g_0 är konvex ty $\nabla^2 g_0(x) = 2 \cdot I^n$ är positivt definit, och därför är mängden $\{x \in \mathbb{R}^n | g_0(x) \leq \}$ konvex; g_j är linjär och alltså konkav, och därför är mängden $\{x \in \mathbb{R}^n / x \geq \mathbf{0}\}$ konvex. Eftersom skärningen av konvexa mängder är en konvex mängd, och vi skall minimera en konvex funktion över mängden, är problemet konvext.

b) KKT-villkoren: $(L(x,\lambda,\mu) = f(x) - \lambda g_0(x) - \sum_{j=1}^n \mu_j x_j, \lambda \leq 0, \mu_j \geq 0)$

(1) $\dfrac{\partial L(x,\lambda,\mu)}{\partial x_j} := c_j - 2\lambda x_j - \mu_j = 0, j = 1, \ldots, n,$

(2) $\lambda \leq, \mu_j \geq 0, j = 1, \ldots, n,$

(3) $\lambda(\sum_{j=1}^n x_j^2 - 1) = 0, \mu_j x_j = 0, j - 1, \ldots, n,$

(4) $\sum_{j=1}^n x_j^2 - 1 \leq 0, \quad x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n.$

Låt $\bar{\lambda} = -\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^n (\min\{0, c_j\})^2)^{1/2}$,

$\bar{x}_j = \min\{0, c_j\}/(2\bar{\lambda}), j = 1, \ldots, n,$

$\bar{\mu}_j = \max\{0, c_j\}, j = 1, \ldots, n.$

(1) $c_j - 2\bar{\lambda}\bar{x}_j - \bar{\mu}_j = c_j - \max\{0, c_j\} - \min\{0, c_j\} = 0.$ OK

(2) OK

(3) $\sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2 = 1; \bar{\lambda} > 0$ ger att $\bar{\mu}_j \bar{x}_j = 0.$ OK

(4) OK

c) Genom insättning av (1) i Lagrangefunktionen kan vi uttrycka det Lagrange duala problemet i (λ, μ) som ett explicit konvext problem. Detta har en unik lösning, som är $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$, och den enda KKT-punkten x är den som uppfyller (1), d.v.s. $\bar{x}$. Således är $\bar{x}$ den unika optimallösningen.

$$L(x(\lambda, \mu), \lambda, \mu) = \lambda + \frac{1}{4\lambda} \sum_{j=1}^{n} (c_j - \mu_j)^2 =: L_*(\lambda, \mu).$$

L_* är monoton i μ_j. $\dfrac{\partial L_*(\lambda, \mu)}{\partial \mu_j} = -\dfrac{1}{2\lambda}(c_j - \mu_j) \geq 0$ måste gälla, vilket ger $\bar{\mu}$.

En stationär punkt till L_* måste ha $\lambda > 0$. $\dfrac{\partial L_*(\lambda, \bar{\mu})}{\partial \lambda} = 0$ ger $\bar{\lambda}$.

Alternativ: $\nabla^2_{xx} L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = -2\bar{\lambda} I^n$ (positivt definit) utnyttjas.

---

5. (P) $\quad \min c^T x \quad$ då $Ax = b$, $x \geq \mathbf{0}$ $\qquad$ (D) $\quad \max b^T y \quad$ då $A^T y \leq c$

$$(P)\quad \begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{då } Ax = b \\ &x \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad\qquad (D)\quad \begin{aligned} &\max b^T y \\ &\text{då } A^T y \leq c \end{aligned}$$

Starka dualsatsen: Om det ena problemet av (P) eller (D) har en ändlig optimallösning så har också det andra det, och deras optimala målfunktionsvärden är lika.

Bevis: Antag att x_* löser (P). Antag (utan inskränkning) att x_* är en extrempunkt och betrakta en tillåten baslösning motsvarande x_* och som i en simplextablå uttrycker dess optimalitet:

bas	$-z$	x	$\bar{b}$
$-z$	1	$c^T - c_B^T B^{-1} A$	$-c_B^T B^{-1} b$
x_B	$\mathbf{0}$	$B^{-1} A$	$B^{-1} b$

Sätt $y_* = (B^{-1})^T c_B$, d.v.s. $y_*^T = c_B^T B^{-1}$. Tablån uttrycker optimalitet, d.v.s. att $\bar{c}^T := c^T - c_B^T B^{-1} A \geq \mathbf{0}^T$. Vi får att $c^T - y_*^T A \geq \mathbf{0}^T$, d.v.s. att $A^T y_* = leqc$. Vektorn y_* är därmed tillåten i (D). Dessutom fås att $c^T x_* = c_B^T B^{-1} b = y_*^T b$, d.v.s. att y_* har samma målfunktionsvärde i (D) som x_* har i (P). Eftersom $c^T x \geq b^T y$ gäller för alla (x, y) tillåtna i (P) och (D) $[c^T x \geq x^T A^T y = b^T y]$ måste y_* vara optimal i (D).

---

6. $(P)\quad \max z = 6x_1 - 12x_2 + 20x_3$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{då} & 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 + x_4 \leq 60 & | & y_1 \geq 0 \\
& 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 20 & | & y_2 \leq 0 \\
& x_1, \quad x_2, \qquad\qquad\quad x_4 \geq 0 & & \\
& x_3 \qquad \leq 0 & &
\end{array}
$$

(D) $\min w = 60y_1 + 20y_2$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{då} & 4y_1 + 3y_2 \geq 6 & | & x_1 \geq 0 \\
& 8y_1 + 4y_2 \geq -12 & | & x_2 \geq 0 \\
& 10y_1 + y_2 \leq 20 & | & x_3 \leq 0 \\
& y_1 - 2y_2 \geq 0 & | & x_4 \geq 0 \\
& y_1 \geq 0, y_2 \leq 0 & &
\end{array}
$$

Optimum i (D): $y_* = (3/2, 0)^T, w_* = 90$

Komplementaritet ger: $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ (ty slack i duala bivillkoren (2), (3) och (4)), och att $4x_1 = 60$ (ty $y_1 \neq 0$). Den primala optimallösningen är alltså $x_* = (15, 0, 0, 0)^T$.

Kontroll av primal tillåtenhet ger att samtliga optimalitetsvillkor är uppfyllda.

7 a) Optimalitetsvillkoren för $[p'(x_t)]$ ger

$$\nabla f(y) + \gamma(y - x_t) = \mathbf{0} \leftrightarrow Qy + q + \gamma(y - x_t) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}(Q + \gamma I)y = \gamma x_t - q \Leftrightarrow (Q + \gamma I)\underbrace{y - x_t}_{}p &= \gamma x_t - q - (Q + \gamma I)x_t \\ &= -(Qx_t + q).\end{aligned}$$

b) Om $\{x_t\}$ konvergerar mot x_∞ så måste $\{p_t\} = \{x_{t+1} - x_t\}$ konvergera mot noll. Ur uppdateringsformeln fås att $p_t = (Q + \gamma I)^{-1} \nabla f(x_t)$ för alla t. Sekvensen $\{\nabla f(x_t)\}$ konvergerar mot $\nabla f(x_\infty)$ eftersom f är kontinuerligt differentierbar. Om $\nabla f(x_\infty) \neq \mathbf{0}$ skulle gälla fås ur uppdateringsformeln att $\{p_t\}$ skulle konvergera mot $(Q + \gamma I)^{-1} \nabla f(x_\infty) \neq \mathbf{0}$, ty $(Q + \gamma I)^{-1}$ är positivt definit när $a + \gamma I$ är det. Detta leder till en motsägelse. Således är $\nabla f(x_\infty) = \mathbf{0}$. Eftersom f är konvex är x_∞ ett globalt minimum av f över $\mathbb{R}^n$.