Lösning till Tentamen TMA946/MAN280 Optimeringslära 020529

1a) Vi skriver om problemet på standardform och får med s_1 och s_2 som slack-variabler

$$\begin{array}{rrcl} \text{minimera} & z = -2x_1 - x_2 & & \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 - s_1 & = 1, \\ & -2x_1 + x_2 + s_2 & = 1, \\ & x_1, \quad x_2, \quad s_1, \quad s_2 & \geq 0 \end{array}$$

Observera att vi har bytt tecken på målfunktionen då vi hade ett maximeringsproblem. Vi ser ingen uppenbar tillåten bas, därför tar vi och inför en artificiell variabel, vilket ger FASI problemet

$$\begin{array}{rrcl} \text{minimera} & w = & & a \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 - s_1 \quad a & = 1, \\ & -2x_1 + x_2 + s_2 & = 1, \\ & x_1, \quad x_2, \quad s_1, \quad s_2, \quad a & \geq 0. \end{array}$$

Vi väljer a, s_2 som vår bas. Vi beräknar reducerade kostnaden, vilken ges av

$$\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$$

vilket för oss blir

$$[0 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ '0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad -2 \quad 1]$$

vi ser att inkommande variabel blir x_2

Vi beräknar

$$y = B^{-1} A_{\text{ink}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

samt

$$\hat{b} = B^{-1} b = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Utgående ges av

$$\text{argmin}_{i, y_i > 0} \frac{b_i}{y_i}$$

vilket ger att a blir utgående. Ny bas blir x_2, s_2, med basmatris

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Då alla artificiella variabler utgått ur basen har vi att basen är tillåten. Vi tittar nu på originalproblemet för att hitta en inkommande.

Vi har

$$\bar{c}^T = c^t + N - c_B^t B^{-1} N$$

vilket blir

$$[-2 \quad 0] - [-1 \quad 0]\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[-3 \quad -1]$$

den inkommande variablen blir x_1.

P.S.S. som tidigare beräknas

$$y = B^{-1}A_{\text{ink}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$
$$\hat{b} = B^{-1}b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

När vi nu tittar på utgående kriteriet

$$\text{argmin}_{y_i>0}\frac{b_i}{y_i}$$

hittar vi ingen utgående. Detta innebär att oavsett hur mycket vi ökar s_1 får vi aldrig en otillåten punkt. Därmed vet vi att problemet är obegränsat.

Vi kan verifiera detta genom att titta på den punkt vi stod i med x_1, s_2 som bas. Där har vi $x_2 = s_1 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$, en tillåten punkt.

Med hjälp av y ovan ser vi att värdet på x_1 och s_2 kommer att ökas med 1 respektive 2 för varje enhet vi ökar s_1 därmed har vi att punkterna $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (1, 0, 0, 3) + \lambda(1, 0, 1, 2)$ är tillåtna för $\lambda \geq 0$, samt att målfunktionenens värde går mot ∞.

1b) Svag dualitte ger omedelbart att duala problemet saknar lösning.

2. Vad vi söker är en metod att från en primal tillåten lösning hitta en dual tillåten lösning. Vi har problemet

$$\text{minimera} \quad c^T x \tag{1}$$

$$\text{Då} \quad Ax \geq 1 \tag{2}$$

$$x \geq 0 \tag{3}$$

Dualen till detta problemg ges av

$$\text{maximera} \quad \mathbf{1}^T y \tag{4}$$

$$\text{Då} \quad y^T A \leq c^T \tag{5}$$

$$y \geq 0 \tag{6}$$

Om vi tittar på den reducerade kostnaden för det primala problemet så ges denna av

$$\bar{c} = c^T - c^T B^{-1} A$$

Om vi sätter $y^T = c_B^T B^{-1}$ så har vi vidare att

$$c^T - y^T A \geq 0 \rightarrow y^T A \leq c^T.$$

Men

$$c^T - y^T A \geq 0$$

precis då vi har en primal optimal bas. Detta ger att ju närmre optimum vi kommer, desto närmre en dual tillåten lösning kommer y.

Vår heuristik bygger därför på att ta en primalt tillåten lösning och från denna skapa en dualt tillåten lösning. En metod för att skapa en dualt tillåten låsning lyder som följer

steg 0. Bilda $y = c_B^T B^{-1}$

steg 1. Hitta i sådant att $y^T A_{.,i} > c_i$. Om sådant i ej existerar, avsluta ty y är tillåten.

steg 2. Hitta k så att $y_k > 0$ samt $A_{k,i} = 1$.

steg 3. sänk värdet på y_k tills dess att $y_k = 0$ eller $y^T A_{.,i} = c_i$.

steg 4. Gå till steg 1.

Detta kommer att ge oss en tillåten dual lösning y och därmed en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet. Dessutom kommer den undre gränsen att närma sig det riktiga optimalvärdet då vi kommer närmare och närmare en optimal bas.

Vi vet att metoden kommer att hitta en tillåten lösning, då vi för varje gång vi passerar steg 3 antingen gör ett bivillkor tillåtet eller sätter en y-komponent till 0. Då $y = 0$ är en tillåten lösning kommer denna metod att terminera.

3a) Vi tillåter att $g_i(x) > 0$ till en kostnad genom att införa en "bristvariabel" a_i:

$$g_i(x) - a_i \leq 0.$$

Om $g_i(\bar{x}) > 0$ fås att $a_i > 0$;

Om $g_i(\bar{x}) \leq 0$ är $a_i = 0$ möjligt.

Om vi alltså inför bivillkoret

$$a_i \geq 0$$

kommer a_i bara bli nollskilt om x är otillåten i bivillkor i, och för tillåtna x ser vi till att $a_i = 0$.

Låt p vara proportionalitetskonstanten ($p > 0$). Ny modell:

$$\begin{aligned}
&\text{maximera}_{(x,a)} \varphi(x,a) := f(x) - p\sum_{i=1}^{m} a_i \\
&\text{då} \quad g_i(x) - a_i \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
&\qquad\qquad\quad a_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
&\qquad\qquad h_j(x) = 0.
\end{aligned}$$

Notera att eftersom, för varje givet $\bar{x}$, maximeringen av $\varphi(\bar{x}, \cdot)$ är, för varje i, ekvivalent med att minimera a_i

$$\text{då} \quad a_i \geq 0, a_i \geq g_i(\bar{x})$$

med globalt $\min a_i = \max\{0, g_i(\bar{x})\}$. Ett ekvivalent problem är därför att

$$\begin{aligned}
&\text{maximera } f(x) - p\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g, (\bar{x})\} \\
&\text{då } h(x) = \mathbf{0}^\ell
\end{aligned}$$

dvs. den klassiska exakta straffunktionsansatsen.

3b) SQP är en Newton-metod, som normalt kräver att f, g och $h \in C^2$. Quasi-Newton-modifieringar finns, men ett krav är

$*$) $f, g, k \in C^1$ (en gång kontinuerligt differentierbara)

Förutom detta fordras förstås att den punkt som nås är optimal. SQP är en lokal metod som bygger på att uppfylla KKT-villkoren. Följaktligen kvävs att dessa är tillräckliga för globalt min:

$*$) f är konvex, g_i är konvexa och h_j är affina funktioner.

Även om det fordras andra tekniska krav för ett global optimallösning ska hittas (det måste t.ex. finnas en!) är ovanstående de krav som är mest självklara och enkla att nedteckna.

4a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} \underbrace{(x+1)^2}_{f_1(x)} + \underbrace{(x-1)^2}_{f_2(x)}.$

$f(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2 = 2x^2 + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 2, \quad x^* = 0.$

$\alpha = \frac{1}{2}, x_0 = 2 \quad \boxed{\nabla f_1 \equiv 1, \nabla f_2 \equiv 1}$

Steg 1: $x_0^{(0)} = 2$

$x_0^{(1)} = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2+1) \cdot 1 = -1$

$x_0^{(2)} = -1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1-1) = 1$

$\underline{x_1 = 1}$♣

Steg 2: $x_1^{(0)} = 1$

$x_1^{(1)} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+1) - 1$

$x_2^{(2)} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1-1) = 1$

$\underline{x_2 = 1}$♣

4b) $\alpha \in (0,1)$
$y_k = x_k - 2\alpha(x_k+1) \cdot 1$
$x_{k+1} = y_k - 2\alpha(y_k - 1) \cdot 1$

Antag att $\{(x_k, y_k)\} \to (x^*, y^*)$

Då:

♣samma punkt! Kommer inte att konvergera mot 0 (vi har inte minne!)

$$\begin{cases} y^* = x^* - 2\alpha(x^*+1) \\ x^* = y^* - 2\alpha(y^*-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-2\alpha)x^* - y^* = 2\alpha \\ -x^* + (1-2\alpha)y^* = -2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^* = -y^* \\ (2+2\alpha)x^* = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* = \frac{\alpha}{1\cdot\alpha} \\ y^* = -\frac{\alpha}{1\cdot\alpha} \end{cases}$$

om $\alpha \to 0$ då $x^*(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \to 0$, dvs. mot den optimala lösningen.

5. Variabler: $x_j = \begin{cases} 1, & \text{om kontrakt skrivs med verkstad } j, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$

$j = 1, 2, 3$

$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{om återförs. i utnyttar verkstad } j \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$

$i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3$

Konstanter: k_j = kostnad för kontrakt med verkstad j (inkr)
c_{ij} = kostnad för återf. att anlita verkstad j (inkr)
b_i = service behov hos återf. i (i h/dag)
v_j = kapacitet hos verkstad j (i h/dag)
k = budget för kontrakt (inkr)

$((k_j)_{j=1,2,3} = (150, 160, 100)$
$(c_{ij})_{i,j}$ ges i tablell.
$(b_i)_{i=1,2,3,4} = (5, 3, 3, 4)$
$(v_j)_{j=1,2,3} = (10, 10, 7)$
$k = 350)$

Modell: minimera $f(x,y) = \sum_{j=1}^{3} k_j x_j + \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} y_{ij}$
då

$$\sum_{i=1}^{4} b_i y_{ij} \leq v_j x_j,\ j = 1,2,3 \tag{1}$$
$$\sum_{j=1}^{3} v_j y_{ij} \geq b_i,\ i = 1,2,3,4 \tag{2}$$
$$\sum_{j=1}^{3} y_{ij} \leq 1,\ i = 1,2,3,4 \tag{3}$$
$$\sum_{i=1}^{4} y_{i1} \leq 2, \tag{4}$$
$$\sum_{j=1}^{3} k_j x_j \leq k \tag{5}$$
$$x_j \in \{0,2\}, j = 1,2,3,4 \tag{6}$$
$$y_{ij} \in \{0,1\}, i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4$$

(1) a) $y_{ij} = 0$ om $x_j = 0$, dvs kan ej utnyttja verkstad om ej kontrakt skrivits.
    b) total kapacitet hos verkstad överskrids ej.

(2) efterfrågan hos återförsäljare, av service, tillfredställs.

(3) varje återförsäljare skickar uppdrag till max en verkstad.

(4) verkstad 1 har högst serva två återförsäljare.

(5) kontraktsbudget överskrids ej.

(6) fysikaliska/logiska villkor.

6a) $\min x^2$
då $\sin(x) \leq -1$

$x \in \{y | \sin(y) \leq -1\} \Leftrightarrow x_k = -\frac{\delta}{2} + 2\delta k, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ varje punkt $x_k = -\frac{\delta}{2} + 2\delta k$ är ett lokallt min (och xxx, faktiskt)

Global min $\min_{k \in \mathbb{Z}} (x_k)^2$ om $k = 0$ dvs $x^* = -\frac{\delta}{2}$.

KKT ser inte tillräckliga (problemet är inte xxxx)

$$\text{Nödvändiga?}\begin{cases} 2x + \lambda\cos(x) = 0 & (1) \\ \sin(x) \le -1 & (2) \\ \lambda(\sin(x)+1) = 0 & (3) \\ \lambda \ge 0 & (4) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow x = x_k$ för något $k, \Rightarrow \sin(x) + 1 = 0$
$\Rightarrow (3)\forall\lambda \geq \Rightarrow (n)$.

$x = x_k \Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0$ – omöjligt!

Alltså, KKT är inte nödvändiga ty varje x_k är lok min!

b) $$FJ : \begin{cases} \alpha 2x + \lambda\cos(x) = 0 & (1) \\ \sin(x) \le -1 & (2) \\ \lambda(\sin(x)+1) = 0 & (3) \\ (\alpha, \lambda 0 \ge 0, (\alpha,\lambda) \neq 0 & (4) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow x = x_k = -\frac{\delta}{2} + \delta k$, något $k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow (3)\forall\lambda \geq 0$

$x = x_k \Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow (1)$ och (4) för varje $\lambda > 0, \alpha = 0$!

Så varje x_k uppfyller FJ-villkoren.

6c) $\min y$

då $$\left\{\begin{array}{r|l} x^2 + y^2 \le & g_1(x,y) \le 0 \\ x^3 \ge y^4 & g_2(x,y) \le 0 \end{array}\right.$$

Om vi kan hitta något $\lambda \geq 0, \lambda \neq 0$

så att $\lambda_1 \nabla\rho_1 + \lambda_2\nabla\rho_2 = 0$ $(*)$

$\lambda_1 g_1 = 0$

$\lambda_2 \rho_2 = 0$

$g_1 \le 0, \rho_2 \le 0$

då uppfyller vi FJ-villkoren med $\alpha = 0$.

Om $\quad (x,y)=(0,0) \Rightarrow$

$$g_1 = -1 \qquad \nabla \rho_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 0$$

$$\varphi_2 = 0 \qquad \nabla \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda_2 > 0$$

har vi $(*)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ (\alpha, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,\lambda) \forall \lambda > 0 \end{cases}$$

uppfyller FJ.

7a)

$$C^* := \underset{x \in G}{\text{minimum}} \; \ell(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \subseteq G}}{\leq} \underset{x \in X}{\text{minimum}} \; \ell(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \ell \leq f \\ p:X}}{\leq} \underset{x \in X}{\text{minimum}} \; f(x) =: f^*$$

b) Vi identifierar:

- $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m\}$
- $G = \mathbb{R}^n$
- $L(x) = \theta(x) := f(x) + \sum_{i=1}^m v_i g_i(x) + pP(g(x))$, där $P(y) \begin{cases} = 0, & y = \mathbf{0}^m \\ > 0, & y \neq \mathbf{0}^m \end{cases}$

Vi har altså:

i) $X \subseteq G$, ty $X \subseteq \mathbb{R}^n$
ii) $\ell(x) = f(x)$ på X ty där är $g(x) \equiv \mathbf{0}^m$

Vi är klara.

c) Vi behöver samtliga av följande förutsättningar:

i) problemet ska ha en tillåten lösning
ii) problemet ska ha en optimal lösning
iii) SAP-algoritmen ska vara tillämpbar
iv) problemet ska vara konvext

v) nedför kravet att f, g_i, k_j samtliga är *minst* en gång kontinuerligt differentierbar.

vi) nedför kravet att f är konkav, g_i är konvex för alla i och k_j är affin för alla j.