Lösning till Tentamen TMA946/MAN280 Optimeringslära 020826

1a) Vi skriver om problemet på standardform och får med s_1 och s_2 som slackvariabler

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{då} & x_1 - \ \ x_2 - s_1 \qquad = 1, \\ & x_1 + \ \ x_2 \qquad + s_2 = 2, \\ & x_1, \quad x_2, \quad s_1, \quad s_2 \geq 0. \end{array}$$

Observera att vi har bytt tecken på målfunktionen då vi hade ett maximeringsproblem. Vi ser ingen uppenbar tillåten bas, därför tar vi och inför en artificiell variabel, vilket ger FASI problemet

$$\begin{array}{rl} \text{minimera} & w = \qquad\qquad\qquad\qquad a \\ \text{då} & x_1 - x_2 - s_1 \qquad + a = 1, \\ & x_1 + x_2 \qquad + s_2 \qquad = 2, \\ & x_1, \quad x_2, s_1, \quad s_2, \quad a \geq 0. \end{array}$$

Vi väljer a, s_2 som vår bas. Vi beräknar reducerade kostnaden, vilken ges av

$$\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$$

vilket för oss blir

$$[0 \quad 0 \quad 0] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad 1 \quad 1]$$

Vi ser att inkommande variabel blir x_1

Viu beräknar

$$y = B^{-1} A_{\text{ink}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

samt

$$\hat{b} = B^{-1} b = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Utgående ges av

$$\text{argmin}_{i,y_i>0}\frac{\hat{b}_i}{y_i}$$

vilket ger att a blir utgående. Ny bas blir x_1, s_2, med basmatris

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Då alla artificiella variabler utgått ur basen vet vi att basen är tillåten. Vi tittar nu på originalproblemet för att hitta en inkommande variabel.

Vi har

$$\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$$

vilket blir

$$[-2 \quad 0] - [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-3 \quad -1]$$

Den inkommande variabeln blir x_2.

P.S.S. som tidigare beräknas

$$y = B^{-1}A_{\text{ink}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den utgående variabeln blir basvariabel 2 dvs. s_2. Ny bas blir x_1, x_2 med basmatris

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har

$$\bar{c}^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$$

vilket blir

$$[0 \quad 0] - [-1 \quad -2]\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[1 \quad 3]$$

Vi kan se att basen är otpimal, ty vi har $\bar{c} \geq 0$.

1b) Lösningen är unik. $\bar{c} > 0$ innebär att målfunktionsvärdet ökar om vi väljer en slackvariabel som inkommande. Vidare är basen icke-degenererad, dvs. det finns endast en bas som ger den givna optimala punkten, vilket vi ser på att $b > 0$. Därmed vet vi att

(a) Att z ökar om vi ökar en inkommande variabel från 0.

(b) Att ett basbyte verkligen innebär att den inkommande får ett värde större än 0.

2. Index

i Materialtäkt, $i = 1$ är grustag 1, $i = 2$ är grustag 2 och $i = 3$ är bergstäkt.

m material, $m = 1$ är flis, $m = 2$ är makadam och $m = 3$ är sand.

n vägverkets lager nummer 1 och 2.

Variabler:

x_i mängd brutet material i respektive materialtäkt

y_m ton flis från anläggning till respektive lager.

z_m ton flis från restlagret till respektive lager.

v_m ton sålt material.

w ton makadam som körs genom krossen.

Målfunktion, summa av kostnader för transport, minus intäkter för försäljning

$$\min \sum_{i=1}^{3} x_1 p_i + \sum_{m=1}^{2} y_m g_m + \sum_{m=2}^{2} z_m h_m - \sum_{m=2}^{3} v_m d_m$$

Inte överskrida kapacitet in i kross

$$t_1 \geq x_3 + w$$

Inte överskrida kapacitet in i sikt

$$t_2 \geq x_1 + x_2$$

Makadam som inte körs i kross skall säljas

$$w + v_2 = k_2 x_3 + a_2(x_1 = x_2)$$

Sand skall säljas

$$v_3 = k_3 x_3 + a_3(x_1 + x_2) + l_3 w$$

Flis skall transporteras bort

$$y_1 + y_2 = k_1 x_3 + a_1(x_1 + x_2) + l_1 w$$

Vi får inte överskrida restlagrets kapacitet

$$z_1 z_2 \leq q$$

Vi skall uppfylla vägverkets behov

$$h_n = z_n + y_n, \quad n = 1, 2,$$

3. Låt B vara den bas vi har innan pivoteringssteget i uppgiften. Vi betraktar problemet $\bar{P}$, som är en modifiering av det ursprungliga problemet P.

   I $\bar{P}$ har vi tagit bort variabeln x_i. Då x_i var den enda tänkbara inkommande variabeln i det ursprungliga problemet har vi att B är en optimal bas till $\bar{P}$, med optimalt värde $\bar{z}$. Varje tillåten lösning till det ursprungliga problemet sådan att $x_i = 0$ är även en lösning till $\bar{P}$. Därför kan det inte existera en tillåten lösning x till P med $x_i = 0$ sådan att $c^T < \bar{z}$. Då en optimal lösning till P har ett värde lägre än z (ty det icke genererade steget ger oss en tillåten lösning med värde lägre än z) vet vi att varje optimal lösning måste ha $x_i > 0$.

4a) Lets write down the 1st and 2nd order optimality conditions

$$\begin{cases} 3x_1 + (1+a)x_2 - 1 = 0 \\ 3x_2 + (1+a)x_1 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \tag{1st}$$

if

$$a = -4 \Rightarrow \text{no solutions}$$

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - \text{arbitrary} \\ x_2 = \frac{1}{3} - x_1 \end{cases} \quad \text{(i.e. mult. solutions.)}$$

$$a \neq -4$$

$$a \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4+a} \\ x_2 = \frac{1}{4+a} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1+a \\ 1+a & 3 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \quad g - (1+a)^2 \geq 0 \qquad \text{(2nd - necessary)}$$

$$a^2 + 2a - 8 \leq 0$$

$$-4 \leq a \leq 2$$

To summerise: for any b iff $-4 < a < 2$ both 1st and 2nd order necessary and sufficient conditions for optimality are satisfied at the unique point $(\frac{1}{4+a}, \frac{1}{4+a})^t$.
If $a = -4 \Rightarrow$ first order nec. conditions are violated $\forall x_1 x_2$.
If $a > 2$ or $a < -4 \Rightarrow$ 2nd order nec. conditions are violated $\forall x_1, x_2$.
If $a = 2 \Rightarrow$ take $x_2 = \frac{1}{3} - x_1 \rightarrow f(x_1, \lambda_2) = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) + 3x_1x_1 - (x_1 + x_2) + 6$ $= \text{const}(b)$ for any $x_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ cannot be an unique min! ■

b) $f(x) = x^{4/3}$

$f'(x) = \dfrac{4}{3}x^{1/3}$

$f''(x) = \dfrac{4}{9}x^{-2/3} \quad (x \neq 0)$

Take $x_0 \neq 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{4}{3}x_0^{1/3} \cdot \left(\frac{4}{9}x_0^{-2/3}\right)^{-1} = x_0 - 3x_0 = -2x_0 \\ x_2 &= -2x_1 = (-2)^2 x_0 \\ &\vdots \\ x_k &= (-2)^k x_0, \text{ which diverges for any } x_0 \neq 0. \end{aligned}$$

The reason is the unboundedness of the second derivative near the optimal solution, so that we cannot use the corresponding convergence result! (in fact, the function is not twice differentiable at $x^* = 0$).

c) The direction d is a descent direction, if $(d, \nabla f) = d^t \nabla f < 0$.

Therefore,

$$[-(I + \mathcal{E}(x))\nabla f(x)]^t \nabla f(x) = -\nabla f^t(x)(I + \mathcal{E}(x))\nabla f(x) < 0$$

This is true, if for any x we can guarantee that $I + \mathcal{E}(x)$ is positive definite matrix, i.e. if all the eigenvalues of $I + \mathcal{E}(x)$ are positive, or all roots of

$((\begin{array}{l} \det(I + \mathcal{E}(x) - \lambda I) \\ \det(\mathcal{E}(x) - (\lambda + 1)I) \end{array}$ are positive.

The latter is true, if all eigenvalues of $\mathcal{E}$ are greater than -1.

5a) The problems (1) and (2) are equivalent, because the objective functions are the same, and 0 are the feasible sets because

$$\forall i : h_i(x)0 \Leftrightarrow \forall i : (h_i(x))^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m}(h_i(x))^2 \leq 0$$

Let's write the 1st order necessary optimality conditions for the both problems

$$\mathrm{P}(1):\begin{cases} h_1(x)=0 \\ \vdots \\ h_m(x)=0 \\ \nabla f(x)=\sum_{i=1}^m \mu_i \nabla h_i(x) \\ \text{some } \mu_1\dots\mu_n \end{cases} \quad \text{vs. } \mathrm{P(x)}\begin{cases} h_1(x)=0 \\ \vdots \\ h_m(x)=0 \\ \nabla f(x)=\mu\cdot\sum_{i=1}^m h_i(x)\nabla h_i(x)\equiv 0! \\ \text{some } \mu\le 0 \text{ [because } h_i(x)=0\forall i] \end{cases}$$

I.e., if $\nabla(x)\neq 0$ at some locally optimal solution for the problem (1), the optimality conditions for the problem (2) are not satisfied. The simplest example is

$$\begin{aligned} &\min x \\ &\text{s.t. } x=0 \end{aligned}$$

with the only feasible [& thus optimal] point $x=0$ at which the gradient of obj. $f-n$ is $1\neq 0$.

The reason for such a huge difference between the two equialent problem for mulations is the even if the LICQ holds at some x^* feasible for P(1), $\nabla(\sum_{i=1}^{\infty}(h_i(x^*))^2)=0$, i.e. LICQ is violated! Furthermore, Slater CQ cannot hold for (2), because

$$\sum_{i=1}^m (h_i(x))^2 \not> 0\forall x.$$

b) $\min\limits_{x=in\mathbb{R}^n} \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ is equivalent to the following (differentiable) problem:

$$\begin{aligned} &\min_{(x\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R})} z \\ &\text{s.t. } \left\{\begin{array}{l|l} f_1(x)-z\le 0 & \mu_1 \\ f_2(x)-z\le 0 & \mu_2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Let's write the optimality conditions for the latter problem:

$$\begin{cases} f_1(x) \le z & (1) \\ f_2(x) \le & (2) \\ \mu_1 \ge 0 & (3) \\ \mu_2 \ge 0 & (4) \\ \mu_1(f_1(x) - z) = 0 & (5) \\ \mu_2(f_2(x) - z) = 0 & (6) \\ \quad 1 - \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad (7) & \Big| \text{ derivative wrt } z \\ \quad \mu_1 \nabla f_1(x) + \mu_2 \nabla f_2(x) = 0 \qquad (8) & \Big| \text{ derivative wrt } x \end{cases}$$

I.e., if (x^*, z^*) is global min $\Rightarrow$ nec. conditions are satisfied. (Slater CQ holds)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists \mu_1, \mu_2 : \quad & \mu_1 \ge 0, \mu_2 \ge 0 && (3\,\&\,4) \\ & \mu_1 \nabla f_1(x^*) + \mu_2 \nabla f_2(x^*) = 0 && (8) \\ & \mu_1 + \mu_2 = 1 && (7) \end{aligned}$$

Since $z^* = \max\{f_1(x^*), f_2(x^*)]$ (otherwise it would'nt be a global min.)

$\Rightarrow$ from (1), (2), (3), (4), (5) and (6) we conclude that $\mu_i = 0$ if $f_i(x) < \max\{f_1(x^*), f_2(x^*)\}, i = 1, 2$ [i.e., if $f_i(x^*) - z < 0$].

6. $S \subset \mathbb{R}^n$ är en konvex mängd om

$$\left. \begin{array}{c} x, y \in S \\ \lambda \in [0,1] \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S$$

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ är en konvex funktion om

$$\left. \begin{array}{c} x, y \in \mathbb{R}^n \\ \lambda \in [0,1] \end{array} \right\} \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Låt $epif = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n=1} | f(x) \le \alpha\}$.

Antag att f är konvex. Låt (x, α_1) och (y, α_2) vara två punkter i $epif$. Betrakta punkten $\lambda(x, \alpha_1) + (1-\lambda)(y, \alpha_2), \lambda \in [0, 2]$ Då gäller att

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda) y) &\le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \\ &\le \lambda \alpha_1 + (1-\lambda) \alpha_2, \end{aligned}$$

dvs $\lambda(x, \alpha_1) + (1 - \lambda)(y, \alpha_2) \in epif$. Alltså är $epif$ konvex.

Antag att $epif$ är konvex. Låt (x, α_1) och (y, α_2) vara två punkter i $epif$. Då ligger också $(\lambda \in [0, 1])\lambda x + (1 - \lambda)y$ i $epif$, och alltså gäller att $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2$. Men detta är ekvivalent med att f är konvex.

7a) En differentiarbar funktion är konvex om

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Alltså gäller att

$$\nabla f(x)^T(y - x) \leq f(y) - f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

f är uppenbart psuedokonvex, för om vänsterledet är ≥ 0 måste högerledet också vara det.

Motexempel mot omvändningen: $f(x) = x^3$.

b) Antag att för $x^* \in x$ gäller att

$$\nabla f(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \forall x \in X.$$

Om f är pseudokonvex följer omedelbart att $f(x) \geq f(x^*) \quad \forall x \in X$, dvs x^* är ett globalt minimum.