TMA 965 : Diskret Matematik D3-VT03

Inlämningsuppgift 1

Följande allmäna regler gäller för alla inlämningsuppgifterna (se också Kurs PM:et) :

1. Motivera (bevisa) alla svar.
2. Uppge vilka du samarbetet med.
3. Spara uppgifterna (med kommentarer) när du får tillbaka dem.

Uppvärmning

1. Ett gäng av 8 högerhändig och 6 vänsterhändig pingis spelare finns i ett rum. På hur många sätt kan de paras ihop så att varje par utom ett har både en högerhändig och en vänsterhändig spelare?

2. Hur många vägar av minimal längd, längs kanter, finns det från origon till punkten $(1, 1, ..., 1)$ i enhetskuben ?

3. När matematikern Gauβ var 9 år gammal så satt han uttråkad i skolan en dag och bevisade följande nuförtiden välkända formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

I dagens skolor brukar man ofta bevisa denna formel med induktion på n - gör det ! Men Gauβ hade ett annat bevis - har du ?

4. Låt S vara en ändlig mängd. Bevisa *kombinatoriskt* att antalet delmängder till S som har ett jämnt antal element är lika med antalet delmängder som har ett udda antal element.

(OBS! På föreläsningen bevisade vi detta m.h.a binomialsatsen. Med ett 'kombinatoriskt' bevis menar jag att du skall beskriva en explicit 1-1 korrespondens mellan de 'jämna' och de 'udda' delmängderna.)

5 (a). Världens bästa klubbfotbollslag, Liverpool FC (!!!), hade i fjol (jag har inte hängt med alla förändringarna under sommaren !) en trupp bestående av 22 spelare : 3 målvakter, 6 försvarare, 9 mittfältare och 4 anfallare. Deras tränare föredrar spelsystemet 4-4-2, dvs målvakt + 4 försvarare + 4 mittfältare + 2 anfallare. Hur många olika laguppställningar har han då att välja ifrån, när alla spelarna är friska, om inbördesordningen i varje lagdel är (i) väsentlig (ii) oväsentlig.

Att lämna in onsdag den 28 januari

1. 3.2.2 i boken, sidan 49 (1985 upplaga).
Suppose we have a number of different subsets of $\{1, 2, \ldots, 8\}$, with the property that each one has four members, and each member of $\{1, 2, \ldots, 8\}$ belongs to exactly three of the subsets. How many subsets are there? Write down a collection of subsets which satisfies the conditions.

2. 3.5.4 i boken sidan 55 (1985 upplaga).
Let $(n)_m = n(n-1)\ldots,(n-m+1)$. By interpreting the result in terms of ordered selections, show that

$$(n)_m(n-m)_{r-m} = (n)_r$$

for any positive integers satisfying $n > r > m$.

3. 3.7.7 i boken sidan 60 (1985 upplaga).
How many five-digit telephone numbers have a digit which occurs more than once?

4. En familj har 9 medlemmar, 5 manliga och 4 kvinnlig. De ska spela ett spel där man måste först välja tre domare, två som är mänliga och en som är kvinnlig. Då måste de andra 6 paras ihop så att varje par har en man och en kvinna. På hur många sätt kan man göra detta?

5. Låt q_n vara antalet ord av längd n i alfabetet $\{a, b, c, d, e, f\}$ som innehåller ett udda antal b. Bevisa att

$$q_{n+1} = 6^n + 4q_n.$$

(Ledning : Dela upp orden av längd $n+1$ m.a.p. om de börjar med ett b eller inte).

6. Ungefär 4.1.7 i boken sidan 66 (1985 upplaga).
Prove the following identity combinatorially.

$$\binom{s-1}{0} + \binom{s}{1} + \ldots + \binom{s+n-2}{n-1} + \binom{s+n-1}{n} = \binom{s+n}{n}$$

Övningar från tidigare år

1. En ORDNAD trippel (a, b, c) av heltal sägs vara en *aritmetisk följd* (AF) om $b - a = c - b$. Ange en formel för antalet AF:er som består av tal från $\{1, 2, ..., n\}$.

2. Ange och bevisa en väldigt enkel formel för

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$$

OBS! Du får fler poäng om ditt bevis inte använder formeln för $\binom{n}{k}$.

3. Mer fotboll ! På VM deltar 32 länder. Till gruppspelet skulle lagen lottas i 8 grupper med 4 lag i varje. Antag att lottningen sker fritt. På hur många olika sätt kan lagen lottas (inbordesordningen i varje grupp är ovasentlig, men inte ordningen av grupperna själva) ?

(ANMÄRKNING : I det riktiga VM:et sker lottningen inte fritt. Det finns villkor som gör det väldigt svårt att räkna ut antalet möjligheter ... försök om du vill !)

4. Låt $n \geq k \geq i$ vara tre positiva heltal. Bevisa *kombinatoriskt* att

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}. \tag{1}$$

OBS! Med ett 'kombinatoriskt' bevis, menar jag att du ska undvika att använda formeln för binomialkoefficienterna. I stället ska du visa att båda sidorna av (1) räknar samma saker, men på två olika sätt. Frågan är vad dessa saker är !

Ytterligare övningar

Se inlämningsuppgifterna från föregående år. Det finns länkar från kurshem-sidan.