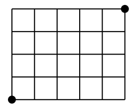
Motivera alla svar. Ange vilka ni samarbetat med.

Uppvärmning



1. På hur många sätt kan man ta sig från $(0,0)$ till (n,k) i planet, om man bara får gå längs kanter i heltalsgittret och bara ta steg uppåt eller till höger?
2. På hur många olika sätt kan man placera 8 torn på ett schackbräde så att inget torn kan ta ett annat?
3. På hur många olika sätt kan man placera 12 personer runt ett (runt) bord, om man bara bryr sig om den inbördes ordningen?
4. Visa att $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n$, både kombinatoriskt och med hjälp av binomialsatsen.
5. Antag att vi ska gå från origo till punkten $(1,1,\ldots,1)$ längs kanter i den d-dimensionella enhetskuben. På hur många sätt kan det ske?
6. Antag att vi har $2n$ personer som skall paras ihop två och två. På hur många olika sätt kan detta göras?
7. Antag att n personer ska placera sig på platser numrerade från 0 till och med k. På hur många sätt kan detta göras, om varje plats får innehålla godtyckligt många personer?

Lämnas in senast tisdagen den 19 september, klockan 13.15.

1. (a) Visa kombinatoriskt och algebraiskt att $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$.

   (b) Förenkla $\displaystyle\sum_i\sum_k \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$.
2. Till en mängd med $n > 0$ element innehåller hälften av delmängderna ett jämnt antal element och hälften ett udda antal element. Visa detta kombinatoriskt, d v s ange en explicit bijektion mellan båda mängder av delmängder. Varför behövs att $n > 0$?
3. Hur många heltal $1 \leq k \leq 2006$ är inte delbara med varken 2, 3 eller 7? Hur många är delbara med 7, men varken 2 eller 3?
4. Visa att antalet vägar i heltalsgittret med steg av typen $(1,0)$ och $(0,1)$, som börjar i $(0,0)$, slutar i (n,n) och aldrig går över diagonalen, är det n-te *Catalantalet* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
   Ledning. Betraktar vägar från $(1,0)$ till $(n+1,n)$ som aldrig träffar diagonalen och beräknar först antalet vägar som träffar eller går över diagonalen genom att spegla (i diagonalen) den första delen av varje väg (tills den träffar diagonalen).

5. Visa att antalet sätt att multiplicera $n+1$ symboler är också det n-te *Catalantalet* C_n. Multiplikationen specifieras med parenteser, det räcker faktiskt med högerparenteser, eller annat multiplikationstecken (omvänd polsk notation).

Bonusproblem (inget samarbete)

6. Visa att antalet sätt att dela upp en konvex $(n+2)$-hörning i trianglar genom att dra $n-1$ diagonaler utan skärningspunkter är också det n-te *Catalantalet* C_n.

7. Placera n punkter på en cirkel och dra kordan mellan varje par av punkter. Antag att punkterna är *generiskt placerade*, d v s att det inte finns tre kordor som skär varandra i en punkt. Bestäm antalet områden inuti cirkeln (ge en enkel formel och visa den kombinatoriskt).
Ledning. Kolla de första fallen och formulera en gissning. Denna gissning är troligen felaktig. Kolla ett (par) fall till och försök skriva resultatet som en enkel summa av binomialtal.

Ytterligare övningar

1. Hur många telefonnummer med fem siffor finns det som har minst en upprepad siffra?

2. Låt n och k vara naturliga tal. Hur många följder finns det av naturliga tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ så att $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq k$?

3. Förenkla $\sum_k k\binom{n}{k}$, helst med ett kombinatoriskt resonemang.

4. På hur många sätt kan talet $n+1$ skrivas som en summa av 1-or och 2-or (där ordningen spelar roll)? Exempelvis kan 4 skrivas på 5 olika sätt:

$$1+1+1+1, \quad 1+1+2, \quad 1+2+1, \quad 2+1+1, \quad 2+2.$$

När ni väl har gissat svaret kan ni antingen ge ett induktivt bevis, eller konstruera en bijektion till en "känd" mängd med lika många element (för varje n).

5. Ge ett kombinatoriskt bevis av identiteten $\displaystyle\sum_{n=k}^{m} \binom{n}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.

6. Hur många olika halsband kan man göra av 20 lika stora kulor i 20 olika färger? Antag att halsbandet är slutet, d v s att det inte går att säga var det "börjar". (Svaret är inte lika med $n!$ för något n.)

7. Hur många av delmängderna till mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$ innehåller åtminstone ett udda tal?