

INSTUDERINGSUPPGIFT 4 (integral)

Det är "räkna ut uppgifter", du får inte lösningar utan bara svar. Räkna dem, samtliga var tentamensuppgifter.

A) Beräkna den effektiva strömstyrkan i_1^2 definierad av $i_1^2 \equiv \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} i(t)^2 dt$ för en växelström $i(t) = i_0 \cos \omega t$ med vinkelfrekvens ω .

B) Beräkna $\int_{-8}^8 \frac{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{|x|}}{1 + \sqrt[3]{x^2}} dx$.

C) Bestäm primitiva funktioner till $\frac{1}{\sqrt{x + x\sqrt{x}}}$ resp. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$.

D) Låt $f(x) = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$. Visa att $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{\sinh x}{1 + \cosh x}$, beräkna $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ och bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $F(0) = \ln 2$.

E) Beräkna $\int_0^\infty \frac{\cosh(x) - x \sinh(x)}{(\cosh(x))^2} dx$.

F) Är $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x + e^{-x})} dx$ konvergent eller divergent?

G) Beräkna längden av kurvan $C : r = r(t) = (t, t^2 - 4, t)$, $-2 \leq t \leq 2$.

svar: **A)** $\frac{i_0}{\sqrt{2}}$ **B)** $12 - 3\ln 5$ **C)** $4\sqrt{1 + \sqrt{x}}$ resp. $2\ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)$

D) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm 1$, $F(x) = \ln(1 + \cosh x)$ **E)** 0 **F)** konvergent **G)** $6\sqrt{2} + \ln(2\sqrt{2} + 3)$

Extrauppgifter

Följande uppgifter har varit tentamensuppgifter (utom 9b):

9. Funktionen f definieras på följande sätt:

$D_f =]0, \infty[$, $f(1) = 0$ och för $1 \neq a \in D_f$ är $f(a)$ areamåttet av det område i xy -planet som begränsas av kurvorna $y = ae^{|x|}$ och $y = e^{a|x|}$.

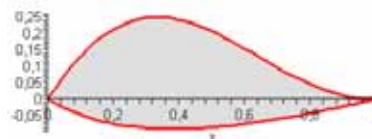
a) Visa att $f(a) = f\left(\frac{1}{a}\right)$ för $a \in D_f$.

b) Beräkna $f(x)$ och rita kurvan $y = f(x)$ ($x \in D_f$).

c) Visa att $f(4)$ inte är ett rationellt tal.

10. Domkyrkan i Ulm har ett 161 m högt torn med en spiraltrappa som man kan gå upp i. Hur lång tid tar det dig att nå utsiktsplattformen på 150 m höjd, om du startar i punkten $(\sqrt{3}, 0, 0)$ och går 1 km/h längs gånglinjen $r(v) = (\sqrt{3} \cos v, \sqrt{3} \sin v, v)$?

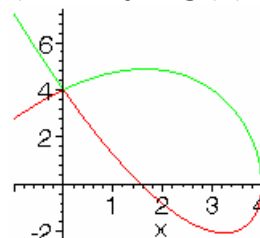
11. Låt $f(x) = x + \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\sin \frac{\pi x}{2} + 1} - 1$ och $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2} - \left(\sin \frac{\pi x}{2}\right)^2$.



a) Visa att $f(x) < 0$ för $0 < x < 1$.

b) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

12. Beräkna arean av området innanför den ögla som definieras genom $y^2 = (4-x)(x^2 + x + 2y - 4)$.



svar:

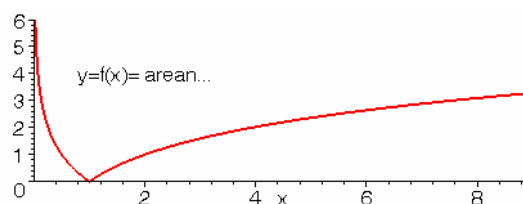
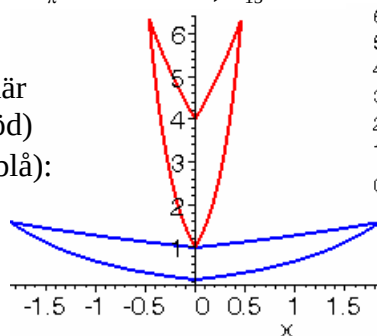
9b) $f(x) = 2 \operatorname{sgn}(x-1) \left(x^{\frac{x}{x-1}} + \frac{1}{x} - x - x^{\frac{1}{x-1}} \right)$, $0 < x \neq 1$

10) 18 minuter

11) $\frac{2(1-\ln 2)}{\pi}$

12) $\frac{256}{15}$

Området i 9a) ser ut så här
för $a = 4$ (övre, röd)
och för $a = \frac{1}{4}$ (undre, blå):



REPETITIONSFRÅGOR inl. matem. analys för F1, 06

Moment 3: integral, kurvor

- Vad är en primitiv funktion till f ? Kan du motivera varför en kontinuerlig funktion har en primitiv funktion (hur "konstruerar" man en primitiv funktion)?
- Vad är $\int f(x) dx$ resp. $\int_a^b f(x) dx$? Kan du visa att $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$, oberoende av vilken primitiv funktion F till f man väljer?
- Hur definieras funktionerna $\ln(x)$ och $\exp(x)$?
Kan du visa logaritmlagarna och räknelagarna för exponentialfunktionen?
- Hur lyder formlerna för variabelsubstitution och för partiell integration?
- Kan du partialbråksuppdelna rationella funktioner?
- Vad är en Riemann-summa?
- Är summan/produkten av två jämna funktioner jämn? Av udda funktioner?
Av en udda och en jämn funktion?
- Kan du (formulera och bevisa) integralkalkylens medelvärdessats?
- Hur definieras (konvergent/divergent) generaliserad integral?
- Kan du (formulera och bevisa) jämförelsesatsen för generaliserade integraler?
- Vad är en (C^m) -kurva i $\mathbb{R}^3$? Båglängdselementet? Längden av en kurva?

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 3

A) Vi hade $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sqrt{2 + \frac{1}{x-1}}}, & \text{då } x > 0 \\ \frac{-1}{1 + \sqrt{2 + \frac{1}{x-1}}}, & \text{då } x < 0 \end{cases}$ (se lösning till instud. uppg. 2), detta ger derivatan

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{-1}{\left(1 + \sqrt{2 + \frac{1}{x-1}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2 + \frac{1}{x-1}}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}, \text{ alltså är } f'(x) < 0 \text{ för } x < 0 \text{ och}$$

$f'(x) > 0$ för $0 < x < \frac{1}{2}$, det ger att f är str. avtagande i $]-\infty, 0[$ och str. växande och därmed injektiv i vardera intervall. Det största värde som f antar i $]0, \frac{1}{2}]$ är alltså $f(\frac{1}{2}) = 1$ och eftersom $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \frac{1}{2}$ (instud. uppg. 2) och f är kontinuerlig på $]0, \frac{1}{2}]$, så ger s.o.m.v. att f antar där alla värden mellan $\frac{1}{2}$ och 1, analogt ger $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\frac{1}{2}$ och $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 - \sqrt{2}$ att f antar i $]-\infty, 0[$ alla värden mellan $-\frac{1}{2}$ och $1 - \sqrt{2}$ (se V_g i instud. uppg. 2), alltså är $V_f =]-\frac{1}{2}, 1 - \sqrt{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1]$.

B) $f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt[3]{x} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{3}$ är kontinuerlig i varje punkt $x > 0$, ty f är sammansatt av funktioner som är kontinuerliga i $]0, \infty[$; f är kontinuerlig även i 0, ty

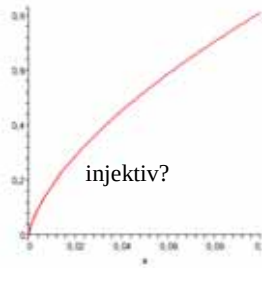
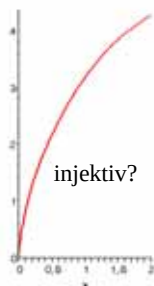
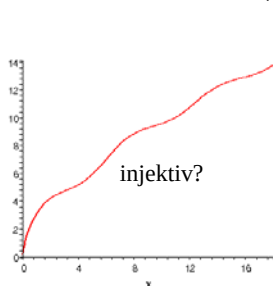
$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{3} \sqrt{x} \ln x + \sqrt{x} \frac{\sin x}{x} + \frac{7}{3} \sqrt{x} \right) = \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 = f(0) \text{ (standardgränsvärden och}$$

$$\text{kontinuitet av } \sqrt{} \text{)}. \text{ Vidare är för } x > 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) + \frac{\sqrt{x} \cos x - \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}}{x} + \frac{7}{6\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{x \ln x + 2x + 6x \cos x - 3 \sin x + 7x}{6x\sqrt{x}} = \frac{x \ln x + 6x(1 + \cos x) + 3(x - \sin x)}{6x\sqrt{x}} > 0 \text{ ty varje}$$

summand i täljaren är > 0 . Alltså är f strängt växande i $]1, \infty[$ och därmed injektiv på $[1, \infty[$. Till sist: $f' \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0+$, det finns alltså ett $\delta > 0$ så att $f'(x) < -1$ för alla $x \in]0, \delta[$; f är alltså strängt avtagande i $[0, \delta]$, och därmed $f(\delta) < f(\frac{\delta}{2}) < 0$. Men f är kontinuerlig på $[\delta, 1]$ och $f(1) > 0$, s.o.m.v. ger då att f antar värdet $f(\frac{\delta}{2})$ även i någon punkt $x_0 \in [\delta, 1]$, alltså är f ej injektiv i $]0, 1[$ ($f(\frac{\delta}{2}) = f(x_0)$, $\frac{\delta}{2} \neq x_0$). Grafen till

$$f(x) = \sqrt{x} \ln \sqrt[3]{x} + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{3} \text{ visar hur lätt man kan bli vilseledd av figurer:}$$



- C) a)** f är deriverbar och därmed kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$ och $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$ är kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$ ty f och f' är sammansatta av deriverbara funktioner för $x \neq 0$ ($\cos(x)$, $\frac{1}{x}$, $\sin(x)$...). Då undersöker vi om f är deriverbar i 0, d.v.s. om $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ har ett gränsvärde då Δx går mot 0:

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x} \right| = |x \cos \frac{1}{x}| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

instängningslagen ger då att $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$ existerar, d.v.s. att f är deriverbar i 0 med

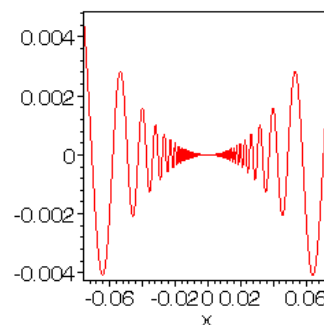
$f'(0) = 0$. Därmed är f även kontinuerlig i 0 (visa detta även direkt). Men f' saknar gränsvärde då x går mot 0, ty $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} = 0$ och $\sin \frac{1}{x}$ saknar gränsvärde då x går mot 0, eftersom $\sin \frac{1}{x}$ antar i varje intervall $]-\delta, \delta[$ alla värden mellan -1 och 1 , $f'(x)$ kan alltså inte gå mot ett gränsvärde då x går mot 0.

b) För $x > \frac{2}{\pi}$ är $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} > 0$ ($0 < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$), f är alltså strängt växande och därmed injektiv på $[\frac{2}{\pi}, \infty[$ (slutet intervall, ty f är kontinuerlig).

c) $f''(x) = 2 \cos \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} > 0$ ty $f''(\frac{2}{\pi}) = \pi$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 2$ och för $x > \frac{2}{\pi}$ är $f'''(x) = -\frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} < 0$, dvs f'' är str. avt. $\Rightarrow f''(x) > 2 \Rightarrow f$ strängt konvex på $[\frac{2}{\pi}, \infty[$.

d) g är injektiv (ty f är), $Dg^{-1}(\frac{9}{2\pi^2}) = \frac{1}{Dg(a)}$ där $g(a) = a^2 \cos \frac{1}{a} = \frac{9}{2\pi^2}$; försök med $a = \frac{3}{\pi}$:

bingo ($\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$), alltså är svaret: $Dg^{-1}(\frac{9}{2\pi^2}) = \frac{1}{Df(\frac{3}{\pi})} = \frac{1}{\frac{2 \cdot 3}{\pi} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{6 + \sqrt{3}\pi}$.



En tentamensuppgift:

Låt $f(x) = x \arctan \frac{1}{x} + \ln \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$, $D_f =]0, \infty[$.

- Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet och asymptoter; ange även V_f . (6p)
- Ange en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(1, \frac{\pi + \ln 4}{4})$. (2p)
- Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}(\frac{\pi + \ln 4}{4})$. (4p)
- Bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $F(1) = \frac{\pi + \ln 4}{4}$. (6p)

svar:

a) f är strängt konvex, asymptoter är $x = 0$ och $y = 1$, $V_f =]1, \infty[$, **b)** $(\pi - 4)x - 4y = -4 - \ln 4$

c) $\frac{4}{\pi - 4}$ **d)** $F(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan \frac{1}{x} + \arctan x + x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + x - 1 \right)$

