TMA970 Inledande matematisk analys F/TM

Lösningar 16/1-2013

1. (a) konvergent; (b) divergent;
(c) konvergent; (d) konvergent;
(e) finns oändligt;
(f) finns oändligt;
(g) finns ändligt;
(h) finns ändligt.

---

2. (a) $\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+2} = \left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x+2} =$

$$= \left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{2}{x+1}(x+2)} =$$

$$= \left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{2(x+2)}{x+1}} =$$

$$= e^{\underbrace{\frac{2(x+2)}{x+1}}_{\to 2,\ x\to\infty}\ln\left[\underbrace{\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}}_{\to e,\ x\to\infty}\right]} \xrightarrow[x\to\infty]{} e^2$$

(b) $$\frac{\sin^2 x}{\ln(1-\sin x^2)} = \frac{-\sin x^2}{\ln(1-\sin x^2)}\cdot\frac{-\sin x^2}{x^2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} 1\cdot(-1)\cdot 1^2 = -1$$

---

3. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} = (-\infty,1)\cup(1,\infty)$

$\triangle 2$

f varken jämn eller udda
ej periodisk
$f > 0 \quad \forall x \in D_f$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e^0 = 1$

$f < 1$ för $x < 1$
$f > 1$ för $x > 1$

$\lim_{x \to 1-} f(x) = "e^{-\infty}" = 0$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = "e^{\infty}" = \infty$

$\Rightarrow$ $y = 1$ horisontell asymptot i $\pm\infty$
$x = 1$ vertikal asymptot

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} < 0$ i D_f

$\Rightarrow$ f avtagande i $(-\infty, 1)$ och
i $(1, +\infty)$

$f''(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}}$

$f'' > 0$ i $(\frac{1}{2}, 1)$ och i $(1, +\infty)$
$f'' < 0$ i $(-\infty, \frac{1}{2})$

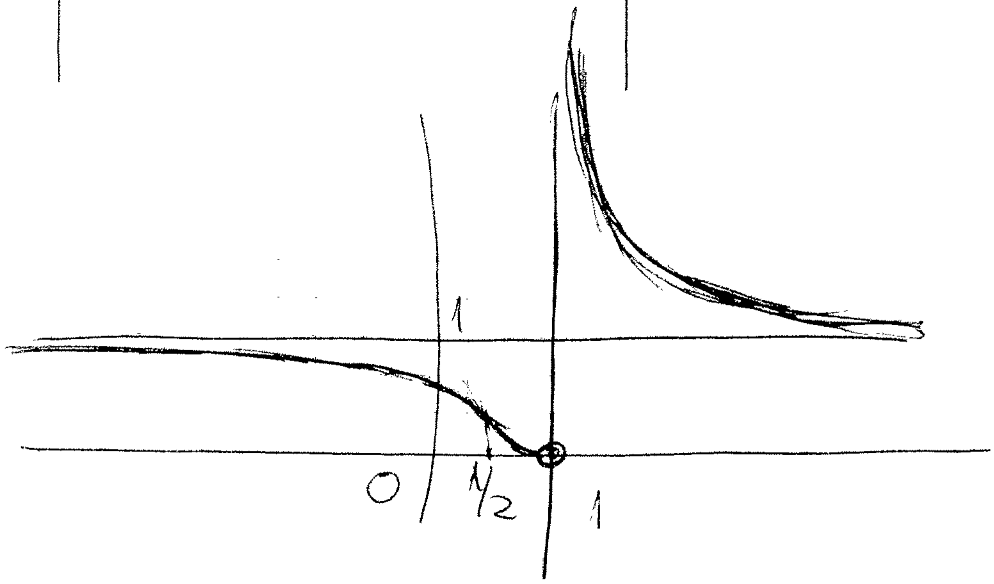
$f''(\frac{1}{2}) = 0$; f'' byter tecken i $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f konvex i $(\frac{1}{2}, 1)$ och i $(1, \infty)$
f konkav i $(-\infty, \frac{1}{2})$
f har inflexionspkt i $1/2$

$(f' \xrightarrow[x \to 1-]{} 0)$

3

	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1			∞
f	1	$\searrow$	inflex.	$\searrow 0$	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	1
f'	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	$-$	
f''	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		



---

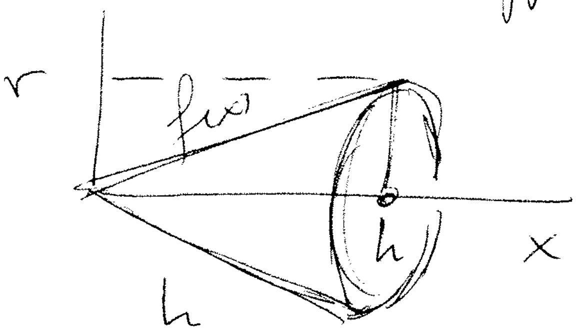
4. (a)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-\frac{2}{3})^2+\underbrace{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}_{=\frac{1}{9}}}} = \frac{1}{(1/3)\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3(x-\frac{2}{3}))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{3\,dx}{1-(3(x-\frac{2}{3}))^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(3x-2)$$
$$(+C)$$

(b) Integranden är udda; integrationsgränserna är symmetriska $\Rightarrow$ integralen $= 0$.

(5.) Rotationskropp:



$$f(x) = \frac{r}{h}x$$

$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

(6.) Vi vill visa att $f(x) = -f(-x)$. $\forall x \in \mathbb{R}$

($D_f = \mathbb{R}$, symmetrisk m.a.p. 0)

$$\big(f(x) + f(-x)\big)' = f'(x) - f'(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ty f' jämn

$\Rightarrow f(x) + f(-x) \equiv \text{const}$

$x = 0$: $f(0) + f(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) + f(-x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ udda funktion

$\Rightarrow$ räcker att rita grafen för $x > 0$

(1>) $f' > 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow f$ växande i $(0, \infty)$

$f'(0) = 0$; $f' > 0 \ \forall x \neq 0$

$\Rightarrow$ i 0 har f terrasspkt

$f''(x) = 2x e^{-x^2} > 0 \ \forall x > 0$

$\Rightarrow f$ konvex i $(0, \infty)$