TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2013-10-26, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Christoffer Standar, tel. 070-3088304, besöker salen ca 15:00 och 17:00.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$; **(b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$; **(c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$; **(d)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$.

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.
(e) Om funktionen f är kontinuerlig i $[a,b]$, så är den begränsad i $[a,b]$.
(f) Om funktionen f är kontinuerlig i $[a,b]$, så är den begränsad i (a,b).
(g) Om funktionen f är kontinuerlig i (a,b), så är den begränsad i (a,b).
(h) Om funktionen f är kontinuerlig i $[a,b]$ och deriverbar i (a,b), så är f' begränsad i (a,b).

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)}\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) \quad (4\text{p}); \qquad \textbf{(b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x} \quad (4\text{p}).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}$. (4p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{e} |\ln x|\,dx$. (4p)

5. Bestäm alla lokala extrema till funktionen $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$. (5p)

6. Givet att $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, betrakta ekvationen

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n} = c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Visa att den har exakt $n-1$ reella lösningar för $c=0$, och exakt n reella lösningar för $c\neq 0$. (8p)

7. Visa att talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, har ett gränsvärde när $n \to \infty$. (7p)

8.(a) Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats (inkl. Rolles sats). (7p)

(b) Funktionen f är två gånger deriverbar i intervallet (a, b). Om $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, där $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, visa att det finns en punkt ξ i (a, b), sådan att $f''(\xi) = 0$. (2p)

Betygsgränser: 24-35p ger betyget 3; 36-47p ger betyget 4; 48p+ ger betyget 5.

/JM