

Kedjeregeln

$$f \circ g$$

g deriverbar i x_0

f deriverbar i $t_0 = g(x_0)$

$\Rightarrow f \circ g$ deriverbar i x_0 och

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Bevis

① Under ytterligare förutsättningar:

g injektiv nära x_0

$$\frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} = \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} \cdot \frac{t - t_0}{t - t_0} \neq 0 \leftarrow$$

$$= \underbrace{\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}_{\downarrow h \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow h \rightarrow 0}$$

$$\downarrow h \rightarrow 0$$
$$f'(t_0) = f'(g(x_0))$$

$$\downarrow h \rightarrow 0$$
$$g'(x_0)$$

$$\text{ty } t - t_0 = g(x_0 + h) - g(x_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

g deriverbar och därmed kontinuerlig i x_0

② (m.h.a. def 2)

$$\text{Sätt } A = f'(t_0) = f'(g(x_0))$$

$$B = g'(x_0)$$

$$? \quad f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) - ABh \stackrel{?}{=} h \varepsilon(x_0, h),$$

$$\text{där } \varepsilon(x_0, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\underbrace{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}_{\text{}} \stackrel{?}{=} ABh + h \varepsilon(x_0, h)$$

$$\text{Vi vet: } f(t) - f(t_0) = A(t - t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t_0, t - t_0),$$

$$\varepsilon_1 \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$$

$$g(x_0+h) - g(x_0) = Bh + h\varepsilon_2(x_0, h), \quad \varepsilon_2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) &= \\ &= A(g(x_0+h) - g(x_0)) + (g(x_0+h) - g(x_0))\varepsilon_1 = \\ &= A \cdot Bh + A h \varepsilon_2 + (B \cdot h + h \varepsilon_2) \varepsilon_1 = \\ &= A \cdot B \cdot h + h \underbrace{(A \varepsilon_2 + B \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2)}_{\varepsilon(x_0, h)} \end{aligned}$$

$$\varepsilon \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\varepsilon_2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\varepsilon_1 \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$$

Men $t \xrightarrow{h \rightarrow 0} t_0$, ty g kontinuerlig

$$\Rightarrow f(g(x_0+h)) - f(g(x_0)) = ABh + h \varepsilon(x_0, h),$$

$$\text{där } \varepsilon \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$\Rightarrow$ enl. def 2 är $f \circ g$ deriverbar i x_0 ,
med derivata $AB = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$