TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2015-01-05, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Dawan Mustafa, tel. 070-3088304, besöker salen ca 15:00 och 17:00.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}; \qquad \textbf{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}; \qquad \textbf{(c)} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Om funktionen f är deriverbar i (a, b), och f är strängt växande i (a, b), så gäller att $f' > 0$ i (a, b).
(e) Om funktionen f är deriverbar i (a, b), och f är strängt växande i (a, b), så gäller att $f' \geq 0$ i (a, b).
(f) Om funktionen f är deriverbar i (a, b), och f är strängt växande i (a, b), så gäller att $f' \not< 0$ i (a, b).

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+1)) \quad (3p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$. (3p)

5. Givet funktionen $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$, finn f:s lokala extrema. (6p)

6. Visa att

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,$$

för alla naturliga tal n. (6p)

7. Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p) Använd satsen för att härleda derivatan av arctan. (2p)

8. Använd satsen om variabelsubstitution i Riemannintegralen för att bevisa påståendena:

Om funktionen f är kontinuerlig och jämn på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad \text{(3p)}$$

Om funktionen f är kontinuerlig och udda på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad \text{(3p)}$$

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM