TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2014-10-30, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Elin Solberg, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx; \qquad \textbf{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad \textbf{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{x}dx\,.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Om funktionen f är deriverbar i $[a,\infty)$, och f' har ett ändligt gränsvärde när $x\to\infty$, så har f asymptot i ∞.

(e) Om funktionen f är deriverbar i $[a,\infty)$, och f har asymptot i ∞, så har f' ett ändligt gränsvärde när $x\to\infty$.

(f) Om funktionen f har asymptoten $y=2x$ när $x\to\infty$, sä gäller att $f(x)\to\infty$ när $x\to\infty$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+7}\right)^{2x-1} \quad (3p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x + x}{\ln(1-x)} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x+5}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$. (3p)

(b) Beräkna $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx\,.$ (3p)

5. Bestäm alla reella tal a sådana att ekvationen $x\ln x = a$ har två olika reella lösningar. (6p)

6. Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,,$$

för alla naturliga tal n. Motivera! (6p)

7. Formulera och bevisa Lagranges medelvärdessats (inkl. Rolles sats). (6p) Kan man tillämpa satsen på funktionen $f(x) = |x|$ på intervallet $[-1, 1]$? (1p)

8.(a) Använd satsen om variabelsubstitution i Riemannintegralen för att bevisa påståendena:

Om funktionen f är kontinuerlig och jämn på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad \text{(3p)}$$

Om funktionen f är kontinuerlig och udda på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad \text{(3p)}$$

(b) Beräkna integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{173} \cos x \, dx. \qquad \text{(1p)}$$

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM