TMA970
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM
Datum: 2015-10-29, kl. 8:30 - 12:30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, tel. 070-3088304, besöker salen ca 9:30 och 11:30.
===

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$\textbf{(a)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx; \qquad \textbf{(b)} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}; \qquad \textbf{(c)} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^2}dx\,.$$

Funktionerna $f, g : [a, \infty) \to [0, \infty)$ är kontinuerliga. Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Om $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, \infty)$, och $\int_a^{\infty} g(x)dx$ är konvergent, så är $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergent.

(e) Om det finns $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, och $\int_a^{\infty} g(x)dx$ är konvergent, så är $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergent.

(f) Om det finns $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \in (0, \infty)$, och $\int_a^{\infty} g(x)dx$ är konvergent, så är $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergent.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

$$\textbf{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (3p); \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+6x}-5}{\sqrt{x}-2} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}-2}}$. (3p)

(b) Beräkna arean av det begränsade området som avgränsas av parabeln $y = 2x - x^2$ och den räta linjen $x + y = 0$. (3p)

5. Rita grafen till funktionen $f(x) = \arcsin(\cos x)$, utan att använda derivator. (6p)

6. Visa att följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, är avtagande och nedåt begränsad. Vad är dess gränsvärde? (6p)

7. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6p) Varför är satsens påstående sant även för integraler $\displaystyle\int_b^a f$, där $b > a$? (1p)

8.(a) Använd satsen om variabelsubstitution i Riemannintegralen för att bevisa påståendena:

Om funktionen f är kontinuerlig och jämn på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx. \qquad \text{(3p)}$$

Om funktionen f är kontinuerlig och udda på intervallet $[-a, a]$, så gäller att

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad \text{(3p)}$$

(b) Beräkna integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{117} x \cos^{218} x \, dx. \qquad \text{(1p)}$$

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM