MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Ange CTH - nummer eller personnummer, samt linje, inskrivningsår och namn.

Tentamensskrivning i
Reell Matematisk Analys F, del A, (TMA 975)
Datum: 2001-12-17, 08.45 - 12.45
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt:Elin Götmark tel. 0740 459022

---

1. Lös differensekvationen $y_{n+2}+2y_{n+1}-3y_n = n$, $y_0 = \frac{1}{16}$, $y_1 = 0$. (7p)

2. Beräkna ett närmevärde till integralen $\int_0^1 \sin(x\sqrt{x})dx$ med ett fel som är mindre än 2×10^{-4}. (8p)

3. Bestäm konvergensintervallet och summan för potensserien $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k$. (7p)

4. Undersök om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar, då $f(x,y)$ är (7p)

   a) $\dfrac{xy^2+y^3}{x^2+xy}$ b) $\dfrac{(e^{xy}-1)x}{x^2+y^2}$

5. Lös differentialekvationen $y''+2xy'+2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (8p)

   med hjälp av en potensserieansats, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

   Ange lösningen på så enkel form som möjligt.

6. En viss fiskart är fredad och den antas då följa den logistiska tillväxtekvationen (8p)

   $$\frac{dN}{dt} = rN(K-N)$$

   där $N(t)$ är fiskbeståndets storlek och där r och K är positiva konstanter.
   Fiskestoppet för fiskarten upphävs och tillstånd ges att fiska mängden F per tidsenhet (t.ex per år). Vi väljer att skriva $F = \frac{rs}{4}K^2$ där s är en konstant sådan att $0 < s < 1$.

   a) Visa att $N(t)$ nu uppfyller differentialekvationen

   $$\frac{dN}{dt} = r(N-K_1)(K_2-N)$$

   b) Bestäm lösningen till ekvationen om begynnelsebetingelserna ges av $N(0) = N_0$.

   c) Antag att $N_0 < K_1$. Visa att då är $N(t)$ avtagande och avgör när fiskarten är utrotad.

7. Låt $y''+ay'+by = 0$ vara en differentialekvation med konstanta koefficienter a och b. (7p)
   Antag vidare att $r_1 \neq r_2$ och att dessa är rötterna till differentialekvationens karakteristiska ekvation. Visa att då ges den allmänna lösningen av $y(x) = C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$, där C_1 och C_2 är två konstanter som kan väljas godtyckligt.

8. a) Definiera följande begrepp (8p)
   1) *serie* och *konvergent serie*
   2) *likformig konvergens* på en mängd M, för en funktionsföljd $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   b) Formulera Weierstrass Majorantsats.

   c) Ge ett exempel (icke trivialt*) på en likformigt konvergent *funktionsserie* och visa ditt påstående.

*) Termerna i serien skall alla bero av variabeln x.

Lösningar till Reell Matematisk Analys F, del A, 17/12, 2001

1 $y_{n+2}+2y_{n+1}-3y_n = n$, $y_0 = \frac{1}{16}$, $y_1 = 0$

Karakteristisk ekvation: $r^2+2r-3=0$, $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -3, 1$

så homogen lösning $y_n^h = C_1(-3)^n + C_2$.

För att finna en partikulärlösning så är den "normala" ansatsen $y_n^p = An+B$, men B ingår i y_n^h $(C_1=0, C_2=B)$,

så vi ansätter $y_n^p = n(An+B) = An^2+Bn$.

$y_{n+1}^p = A(n+1)^2+B(n+1) = An^2+(2A+B)n+A+B$

$y_{n+2}^p = A(n+2)^2+B(n+2) = An^2+(4A+B)n+4A+2B$

Dvs, efter insättning i differensekvationen,

$$\underbrace{(A+2A-3A)}_{=0}n^2 + \underbrace{(4A+B+4A+2B-3B)}_{=8A}n + \underbrace{4A+2B+2A+2B}_{=6A+4B} = n$$

$$\begin{cases} 8A = 1 \\ 6A+4B = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = -\frac{3}{16} \end{cases} \quad \therefore\ y_n^p = \frac{1}{8}n^2 - \frac{3}{16}n.$$

Den allmänna lösningen är

$$y_n = y_n^h + y_n^p = C_1(-3)^n + C_2 + \frac{1}{8}n^2 - \frac{3}{16}n$$

Men
$$\begin{cases} \frac{1}{16} = y_0 = C_1+C_2 \\ 0 = y_1 = -3C_1+C_2+\frac{1}{8}-\frac{3}{16} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

Svar: $y_n = \frac{1}{8}n^2 - \frac{3}{16}n + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(2n^2-3n+1)$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

2. $I = \int_0^1 \sin(x\sqrt{x})\,dx$

$$\sin t = \underbrace{t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}}_{= P_{2n-1}} + \underbrace{(-1)^{n+1}\cos(\theta t)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{= R_{2n+1}(t)}$$

$$I = \int_0^1 P_{2n-1}(x\sqrt{x})\,dx + \underbrace{\int_0^1 R_{2n+1}(x\sqrt{x})\,dx}_{= \varepsilon}$$

Vi söker n s.a. $|\varepsilon| < 2\cdot 10^{-4}$.

$$|R_{2n+1}(x\sqrt{x})| \le \frac{(x\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^{3n+\frac{3}{2}}}{(2n+1)!} \le \frac{x^{3n+1}}{(2n+1)!} \quad (0 \le x \le 1)$$

Alltså är

$$|\varepsilon| \le \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{3n+1}\,dx = \frac{1}{(3n+1)(2n+1)!}$$

Vi söker alltså n s.a. $(3n+1)(2n+1)! \ge \frac{1}{2}10^4 = 5000$.

För

$n = 2$, $VL = 7\cdot 5! = 840$

$n = 3$, $VL = 10\cdot 7! = 50400$!

Dvs

$$I = \int_0^1 P_5(x\sqrt{x})\,dx + \varepsilon = \int_0^1 \left(x^{3/2} - \frac{1}{6}x^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{120}x^{\frac{15}{2}}\right)dx + \varepsilon$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{6}\frac{2}{11} + \frac{1}{120}\cdot\frac{2}{17} + \varepsilon = \frac{61}{165} + \frac{1}{17\cdot 110} + \varepsilon = \frac{495}{1337} \pm 2\times 10^{-5}$$

Dvs

$$I = \frac{495}{1337} \pm 2\times 10^{-5} = 0.3702 \pm 10^{-4} \quad !$$

3. $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)(k+1)}{2}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+2}{2}\frac{d}{dx}x^{k+1} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+2}{2}x^{k+1} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^{k+2} \overset{(*)}{=} \frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}x^{k+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right) \overset{(**)}{=} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\cdot\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(-1+\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.$$

(*) : Potensserier ka deriveras termvis och den deriverade serien har samma konvergensradie som de ursprungliga

(**) : Här känner vi igen de geometriska serie som ju har konvergensradie $R = 1$.

Detta visar att de ursprungliga potensserie också har konvergensradie $R = 1$.

För $|x| = 1$ går termerna i serie inte mot noll vilket innebär att potensserien divergerar i dessa fall.

Svar $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k$ konvergerar om.om. $|x| < 1$

och för dessa x är $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$

4

a) $$f(x,y) = \frac{xy^2+y^3}{x^2+xy}$$

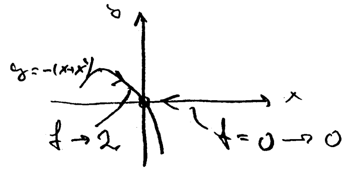
Vi ser att $f(x,0) = 0$

och att $$f(x,-x-x^2) = \frac{-x(x+x^2)^2-(x+x^2)^3}{x^2-x^2-x^3} = \frac{x^3(1+x)^2+x^3(1+x)^3}{x^3}$$

$$\to 2 \quad \text{då } x \to 0$$

$\therefore$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

existerar ej



eftersom $f(x,y)$ närmar sig olika värde längs med olika banor in mot origo ($(x,y)\to(0,0)$).

b) $$f(x,y) = \frac{(e^{xy}-1)x}{x^2+y^2} = \frac{(1+xy+B(xy)\cdot x^2y^2-1)x}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2y(1+B(xy)xy)}{x^2+y^2}, \quad \text{Med } r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ så}$$

finner vi att

$$|f(x,y)| \le \frac{|x|^2|y|\,|1+B(x,y)xy|}{r^2} \le \left[\begin{matrix}|x|\le r\\ |y|\le r\end{matrix}\right]$$

$$\le r\cdot\underbrace{|1+B(x,y)xy|}_{\text{begränsat}} \to 0 \quad \text{då } r\to 0$$

Dvs $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

5. $y''+2xy'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

Potensserieansats: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$

OBS: $\underline{y(0) = a_0 = 1}$, $\underline{y'(0) = a_1 = 0}$.

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \left[n=m+2\right] = \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m$$

byt m mot n

Insättning i Differentialekvationen ger att

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2na_n + 2a_n\right)x^n = 0 \quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n\right)$$

Identifiering av koefficienter ger:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n = 0$$

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{2}{n+2}a_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{2}{3}\cdot 0 = 0 \Rightarrow a_5 = -\frac{2}{5}\, 0 = 0$ osv.

$\therefore$ $a_{2m+1} = 0$, $m = 0,1,2,\ldots$

$a_0 = 1 \to a_2 = -\frac{2}{2}a_0 = -1 \Rightarrow a_4 = -\frac{2}{4}a_2 = \frac{1}{2}$

$$a_{2m} = -\frac{2}{2m}a_{2m-2} = -\frac{1}{m}a_{2m-2} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m-1}a_{2m-4} = \ldots = \frac{-1}{m}\cdot\frac{-1}{m-1}\cdots\frac{-1}{1}a_0$$

$$= (-1)^m\cdot\frac{1}{m!}a_0 = \underline{\underline{\frac{(-1)^m}{m!}}}$$

Dvs $$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^m}{m!} = \underline{\underline{e^{-x^2}}}\;!$$

Svar: $$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}x^{2m} = e^{-x^2}, \quad \underline{\underline{x\in\mathbb{R}}}$$

är lösningen till diff.ekvationen!

6. Tillväxtekvationen utan yttre påverkan är

a)

$$\frac{dN}{dt} = rN(K-N).$$

Om fiske tillåts med mängden F per tidsenhet så påverkas tillväxten ($\frac{dN}{dt}$) med $-F$!

Dvs vi får ekvationen

$$\frac{dN}{dt} = rN(K-N) - F = rN(K-N) - \frac{rs}{4}K^2$$

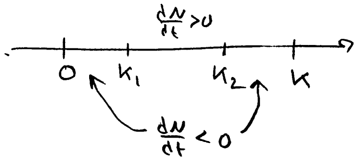
$$HL = -r\left(N^2 - KN + \frac{s}{4}K^2\right) = r(N-K_1)(K_2-N)$$

ty ekv. $x^2 - Kx + \frac{s}{4}K^2 = 0$ har rötterna

$$x = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{4} - s\frac{K^2}{4}} = \frac{K}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-s}\right)$$

och $K_1 = \frac{K}{2}\left(1-\sqrt{1-s}\right)$, $K_2 = \frac{K}{2}\left(1+\sqrt{1-s}\right)$.

b) $$\frac{dN}{dt} = r(N-K_1)(K_2-N)$$



Detta ger

$$\frac{dN}{(N-K_1)(K_2-N)} = r\,dt \quad \text{(separabel!)}$$

$$\frac{1}{K_2-K_1}\left(\frac{1}{N-K_1} + \frac{1}{K_2-N}\right)dN = \int r\,dt \quad (\text{sätt } \alpha = K_2-K_1)$$

$$\ln|N-K_1| - \ln|K_2-N| = \alpha r t + C$$

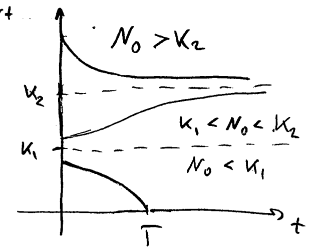
$$\ln\left|\frac{N-K_1}{K_2-N}\right| = \alpha r t + C$$

$$\frac{N-K_1}{K_2-N} = \underbrace{\pm e^C}_{=c_0} e^{\alpha r t}, \quad N(0) = N_0 \iff c_0 = \frac{N_0-K_1}{K_2-N_0}$$

$$N - K_1 = K_2 c_0 e^{\alpha r t} - N c_0 e^{\alpha r t}$$

$$N(1+c_0e^{\alpha r t}) = K_1 + (K_2-K_1+K_1)c_0e^{\alpha r t} = K_1(1+c_0e^{\alpha r t}) + \alpha c_0 e^{\alpha r t}$$

$$N(t) = K_1 + \alpha c_0 \frac{e^{\alpha r t}}{1+c_0e^{\alpha r t}} = K_1 + \alpha\frac{c_0}{c_0+e^{-\alpha r t}}$$



c) För $N_0 < K_1$ så är

$$\frac{dN}{dt} = r\underbrace{(N-K_1)}_{<0 \text{ vid } t=0}\overbrace{(K_2-N)}^{>0}$$

dvs $N(t)$ avtar vilket innebär att $N-K_1$ också fortsättningsvis är <0 !

Mer precist så är

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}\left(K_1 + \alpha\frac{c_0}{c_0+e^{-\alpha r t}}\right) = \alpha c_0\cdot(-1)\cdot(-\alpha r)\frac{1}{(c_0+e^{-\alpha r t})^2}$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha^2 r}{(c_0+e^{-\alpha r t})^2}}_{>0}\cdot \underbrace{c_0}_{=\frac{N_0-K_1}{K_2-N_0}<0} < 0 \quad !$$

Om $N(t)=0$ vid tiden $t=T$ så är

$$K_1 + \frac{\alpha c_0}{c_0+e^{-\alpha r T}} = 0,$$

$$\frac{c_0}{c_0+e^{-\alpha r T}} = -\frac{K_1}{\alpha}, \quad \frac{c_0+e^{-\alpha r T}}{c_0} = -\frac{\alpha}{K_1}$$

$$e^{-\alpha r T} = -c_0\left(1+\frac{\alpha}{K_1}\right) = -c_0\frac{K_1+K_2-K_1}{K_1} = -\frac{N_0-K_1}{K_2-N_0}\cdot\frac{K_2}{K_1}$$

$$= \frac{K_1-N_0}{K_2-N_0}\cdot\frac{K_2}{K_1}, \quad -\alpha r T = \ln\left(\frac{K_1-N_0}{K_2-N_0}\cdot\frac{K_2}{K_1}\right)$$

$$T = \frac{1}{(K_2-K_1)r}\cdot\ln\left(\frac{K_2-N_0}{K_1-N_0}\cdot\frac{K_1}{K_2}\right)$$