

# Lösningar till Övningsskrivningen 2000-11-18

Greger Cronquist

## 1. Lös differentialekvationen

$$y(x)(x^2 - 4)y'(x) = y^2(x) + 1, \quad \text{om} \quad y(0) = 1.$$

**Lösning** Vi gör omskrivningen

$$\frac{y}{y^2 + 1} y' = \frac{1}{x^2 - 4},$$

och ser att vi har med en separabel diffekvation att göra. Integration ger nu att

$$\int \frac{y}{y^2 + 1} dy = \int \frac{1}{x^2 - 4} dx,$$

där

$$\int \frac{y}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{2} \int \frac{2y}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{2} \ln |y^2 + 1| = \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1),$$

eftersom  $2y$  är derivatan av  $y^2 + 1$  och  $y^2 + 1 \geq 1 > 0$ , och

$$\int \frac{1}{x^2 - 4} dx = \int \left( \frac{1/4}{x - 2} - \frac{1/4}{x + 2} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C.$$

Sammanfattningsvis, efter multiplikation med 2, har vi alltså fått att

$$\ln(y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + D,$$

där  $D = 2C$ . Vi kan nu beräkna  $D$  genom att sätta  $y = 1$  och  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \ln(1^2 + 1) &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{0 - 2}{0 + 2} \right| + D \\ \Leftrightarrow D &= \ln 2, \end{aligned}$$

så (eftersom  $x = 0$  ligger i  $D_y$ )

$$\begin{aligned} \ln(y^2 + 1) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2 - x}{x + 2} \right) + \ln 2 \\ \Leftrightarrow y^2 + 1 &= 2 \sqrt{\frac{2 - x}{x + 2}} \\ \Leftrightarrow y(x) &= \sqrt{2 \sqrt{\frac{2 - x}{x + 2}} - 1}, \quad -2 < x \leq \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

(Definitionsmängden fås ur de båda kvadratrötternas definitionsmängder.)

2. Bestäm (t.ex. med hjälp av Maclaurinutveckling) ett approximativt värde på integralen

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2} [1 - \cos(x^3)] dx$$

med ett fel mindre än  $10^{-3}$ .

**Lösning** På formelbladet avläser vi Maclaurinutvecklingen av  $\cos t$ :

$$\begin{aligned} \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} \cos(\theta t), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \\ \Rightarrow 1 - \cos(x^3) &= \frac{x^6}{2} - \frac{x^{12}}{24} + \frac{x^{18}}{720} \cos(\theta x^3), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

Ett approximativt värde av den sökta integralen får vi då om vi bara tar med de två första termerna:

$$I \approx \int_0^1 \frac{1}{x^2} \left( \frac{x^6}{2} - \frac{x^{12}}{24} \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{x^4}{2} - \frac{x^{10}}{24} \right) dx = \frac{1}{5 \cdot 2} - \frac{1}{11 \cdot 24} = \frac{127}{1320}.$$

Felet i denna beräkning blir

$$R = \left| - \int_0^1 \frac{1}{x^2} \frac{x^{18}}{720} \cos(\theta x^3) dx \right| \leq [\cos(\theta x^3) \leq 1] \leq \int_0^1 \frac{x^{16}}{720} dx = \frac{1}{17 \cdot 720} = \frac{1}{12240} < 10^{-4}.$$

Slutsatsen blir att  $I \approx \frac{127}{1320} \approx 0.0962$  med ett fel som är mindre än  $10^{-4} < 10^{-3}$ .

3. Undersök om gränsvärdet  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  existerar då

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}, \quad \text{b) } f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + 4xy + 4y^2}.$$

**Lösning**

a) Vi har t.ex. att

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

och, om vi tittar längs linjen  $x = y$ ,

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{(x-y)^2}{x^2 - xy + y^2} = [x = y] = \frac{0}{x^2} = 0,$$

så gränsvärdet existerar inte.

b) Till att börja med ser vi att

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + 4xy + 4y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Vi ser också att vi kan skriva om funktionen genom att kvadratkomplettera nämnaren till

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{(x + 2y)^2},$$

så funktionen är obegränsad längs linjen  $x + 2y = 0$ . Eftersom varje liten omgivning av  $(0, 0)$  innehåller punkter på denna linje, kan inte gränsvärdet finnas. Eventuellt kan vi också försäkra oss om detta med ytterligare en beräkning. Låt  $x + 2y = h^2$ ,  $y = h \Rightarrow x = h^2 - 2h$ . Vi får då

$$f(x, y) = \frac{(h^2 - 2h) + h^3}{h^4} = \frac{h^6 - 6h^5 + 12h^4 - 7h^3}{h^4} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{7}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\infty.$$

**Gränsvärdet existerar alltså inte.**

- 4.** Antag att  $A$  är en konstant, och att  $y(x)$  och  $z(x)$  är kontinuerliga funktioner med  $z(x) \geq 0$  för  $x \geq 0$ . Visa att om

$$y(x) \leq A + \int_0^x y(t)z(t) dt$$

så är

$$y(x) \leq Ae^{\int_0^x z(t) dt}, \quad \text{för } x \geq 0.$$

**Lösning** Det vi skall visa kallas ofta Grönwalls lemma och används mycket inom forskningen på teorin för ordinära differentialekvationer. Sätt  $w(x) = A + \int_0^x y(t)z(t) dt$ . Då är  $w(x)$  deriverbar, och enligt analysens huvudsats gäller att

$$w'(x) = y(x)z(x) \leq w(x)z(x),$$

där olikheten följer av förutsättningen att  $y(x) \leq w(x)$  (enligt definitionen av  $w(x)$ ). Detta kan vi skriva om med hjälp av den integrerande faktorn  $\exp(-\int_0^x z(t) dt)$  som

$$\begin{aligned} w'(x) - z(x)w(x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow e^{-\int_0^x z(t) dt} w'(x) - e^{-\int_0^x z(t) dt} z(x)w(x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( e^{-\int_0^x z(t) dt} w(x) \right) &\leq 0. \end{aligned}$$

Tydligt är alltså  $e^{-\int_0^x z(t) dt} w(x)$  en avtagande funktion om  $x \geq 0$ . Den har alltså sitt maximum då  $x = 0$ , dvs.

$$e^{-\int_0^x z(t) dt} w(x) \leq e^{-\int_0^0 z(t) dt} w(0) = A,$$

eftersom  $w(0) = A + \int_0^0 y(t)z(t) dt = A$ . Vi kan nu multiplicera upp exponentialfunktionen och får

$$w(x) \leq Ae^{\int_0^x z(t) dt}.$$

Nu hade vi ju att  $y(x) \leq w(x)$  enligt förutsättningarna, så vi är klara. □

- 5.** Formulera och bevisa entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar.

**Lösning** Se sats 3 på sidorna 381–382 i Persson-Böiers.