

-
1. Lös differensekvationen $y_{n+2} + 2y_n - 3y_n = n$, $y_0 = \frac{1}{16}$, $y_1 = 0$. (7p)
2. Beräkna ett närmevärde till integralen $\int_0^1 \sin(x\sqrt{x})dx$ med ett fel som är mindre än 2×10^{-4} . (8p)
3. Bestäm konvergensintervallet och summan för potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$. (7p)
4. Undersök om gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ existerar, då $f(x,y)$ är (7p)
a) $\frac{xy^2 + y^3}{x^2 + xy}$ b) $\frac{(e^{xy} - 1)x}{x^2 + y^2}$
5. Lös differentialekvationen $y'' + 2xy' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (8p)
med hjälp av en potensserieansats, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Ange lösningen på så enkel form som möjligt.
6. En viss fiskart är fredad och den antas då följa den logistiska tillväxtekvationen (8p)
$$\frac{dN}{dt} = rN(K - N)$$

där $N(t)$ är fiskbeståndets storlek och där r och K är positiva konstanter.
Fiskestoppet för fiskarten upphävs och tillstånd ges att fiska mängden F per tidsenhet (t.ex per år). Vi väljer att skriva $F = \frac{rS}{4}K^2$ där s är en konstant sådan att $0 < s < 1$.
a) Visa att $N(t)$ nu uppfyller differentialekvationen
$$\frac{dN}{dt} = r(N - K_1)(K_2 - N)$$

b) Bestäm lösningen till ekvationen om begynnelsebetingelserna ges av $N(0) = N_0$.
c) Antag att $N_0 < K_1$. Visa att då är $N(t)$ avtagande och avgör när fiskarten är utrotad.
7. Låt $y'' + ay' + by = 0$ vara en differentialekvation med konstanta koefficienter a och b . (7p)
Antag vidare att $r_1 \neq r_2$ och att dessa är rötterna till differentialekvationens karakteristiska ekvation. Visa att då ges den allmänna lösningen av $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, där C_1 och C_2 är två konstanter som kan väljas godtyckligt.
8. a) Definiera följande begrepp (8p)
1) *serie* och *konvergent serie*
2) *likformig konvergens* på en mängd M , för en funktionsföljd $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$
b) Formulera Weierstrass Majorantsats.
c) Ge ett icke trivialt exempel på en likformigt konvergent *funktionsserie* och visa ditt påstående. (Termerna i serien skall alla bero av variabeln x .)